Master $1^{ère}$ année de Mathématiques — Université de Provence, Université Paul Cézanne

Année 2010-2011

Analyse Numérique - Examen du Lundi 10 Janvier 2011

Aucun document autorisé - Durée : 3h

N.B. : Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans le désordre !
Comme d'habitude, le barême tiendra compte de la longueur du sujet.

Exercice 1

Pour $f \in L^2(]0,1[)$ donnée, on s'intéresse dans cet exercice au problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \ \ \forall x \in]0,1[, \\ u(0) = 0, \\ u'(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Partie 1 : Existence et unicité de la solution

(a) On définit l'espace suivant

$$H = \{v \in H^1(]0,1[), \text{ t.q. } v(0) = 0\}.$$

Montrer que H, muni de la topologie de $H^1(]0,1[)$, est un espace de Hilbert.

(b) Montrer que l'inégalité de Poincaré suivante est vraie dans H

$$\forall v \in H, \ \ \|v\|_{L^2} \leq \|v'\|_{L^2},$$

où v' désigne la dérivée faible de v.
En déduire que l'application $v \mapsto \|v'\|_{L^2}$ est une norme sur H, équivalente à la norme de $H^1(]0,1[)$.
Notation : Dorénavant on travaillera avec cette norme notée $\|v\|_H = \|v'\|_{L^2}$.

(c) On définit les applications suivantes

$$\forall u, v \in H, \ \ a(u,v) = \int_0^1 u'v' \, dx, \tag{2}$$

$$\forall v \in H, \ \ L(v) = \int_0^1 fv \, dx, \tag{3}$$

et on considère le problème variationnel suivant

$$\text{Trouver } u \in H, \text{ tel que } \ a(u,v) = L(v), \ \ \forall v \in H. \tag{$\mathcal{P}$}$$

Démontrer que le problème ($\mathcal{P}$) admet une unique solution notée u dans la suite.

(d) Démontrer que u' est dans $H^1(]0,1[)$ et calculer $(u')'$. En déduire que u est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie $u(0) = 0$.

(e) On suppose de plus que $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie la seconde condition aux limites $u'(1) = 0$.
Indication : Prendre $v(x) = x$ dans ($\mathcal{P}$) (en le justifiant) et intégrer par parties.

Partie 2 : Schéma numérique

Soit $n \geq 0$. On se donne un maillage uniforme de l'intervalle $]0,1[$

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1,$$

avec $x_i = i\Delta x$, $\Delta x = \frac{1}{n+1}$. On suppose f et u aussi régulières que nécessaire et on considère le schéma suivant pour approcher la solution u du problème (1)

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} = f(x_i), \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \\ \qquad\qquad \dfrac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x^2} = \dfrac{1}{3} f(x_{n+1}) + \dfrac{1}{6} f(x_n). \end{cases} \tag{4}$$

avec $u_0 = 0$.

(a) Montrer que le schéma (4) peut se mettre sous la forme d'un système linéaire de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues qui s'écrit $AU = F$ avec A symétrique. Donner explicitement les expressions de A, U et F.

(b) Enoncer et démontrer un principe du maximum discret pour la matrice A. Qu'en déduit-on ?

(c) Définir l'erreur de consistance R_i, $1 \leq i \leq n+1$ associée à ce schéma et à une solution exacte du problème (1). Démontrer que l'on a

$$\sup_{1 \leq i \leq n+1} |R_i| \leq C \Delta x^2 \|u^{(4)}\|_{L^\infty}.$$

(d) Calculer explicitement, la fonction v solution du problème

$$-v'' = 1, \ \ v(0) = 0, \ \ v'(1) = 0.$$

On introduit alors le vecteur $V = (v(x_i))_{1 \leq i \leq n+1}$ et le vecteur $D = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Démontrer, en utilisant les questions précédentes, que

$$AV = D.$$

(e) En déduire que l'on a l'estimation suivante

$$\forall U \in \mathbb{R}^{n+1}, \ \ \|A^{-1}U\|_\infty \leq \|U\|_\infty.$$

Comment s'appelle cette propriété ?

(f) Si on note maintenant $\bar{U} = (u(x_i))_{1 \leq i \leq n+1}$ le vecteur des valeurs exactes de la solution du problème (1) (qu'on suppose aussi régulière que nécessaire), démontrer l'estimation d'erreur

$$\|U - \bar{U}\|_\infty \leq C \Delta x^2,$$

où $C > 0$ dépend de u mais est indépendant du maillage.

Partie 3 : Etude de conditions aux limites non-homogènes

Dans cette dernière partie, on conserve la définition de l'espace H ainsi que celle de l'application a (formule (2)). On se donne maintenant un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$, et on pose

$$L_\alpha(v) = \int_0^1 fv\,dx + \alpha v(1), \ \ \forall v \in H.$$

On s'intéresse au problème

$$\text{Trouver } u \in H \text{ tel que } \ a(u,v) = L_\alpha(v), \ \ \forall v \in H. \qquad (\mathcal{P}_\alpha)$$

(a) Démontrer que le problème $(\mathcal{P}_\alpha)$ admet une unique solution, à nouveau notée u.

(b) Montrer que u vérifie encore, en un sens à préciser, l'équation $-u'' = f$ et la condition au bord $u(0) = 0$.

(c) Calculer $u'(1)$. Quel est donc le problème aux limites que l'on vient de résoudre ?

(d) Comment adapter le schéma numérique (4) à ce nouveau problème ? Donner en particulier la nouvelle matrice A, et le nouveau second membre F associés.

(e) Expliquer **rapidement** comment modifier les différents éléments de l'analyse menée dans la partie 2 pour l'adapter à ce nouveau problème.

Exercice 2

1. On considère le problème de transport suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + c(x)\partial_x u = 0, & \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad (5)$$

avec

$$c(x) = 1 + x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (6)$$

(a) Pour tout $s, x_0 \in \mathbb{R}$, rappeler le problème de Cauchy qui définit la courbe caractéristique $t \mapsto X(t,s,x_0)$ associée à la vitesse c.

(b) Calculer explicitement $X(t,s,x_0)$.

(c) En déduire la formule explicite qui donne la solution $u(t,x)$ de (5) en fonction de u_0, t et x.

2. En expliquant la démarche employée, calculer explicitement la solution $u(t,x)$ du problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + c(x)\partial_x u = xu, & \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad (7)$$

où c est toujours donnée par (6).

Exercice 3

On s'intéresse au problème de transport à vitesse constante

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = 0, \\ \qquad u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{8}$$

où $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ sont des données du problème.
On se donne un pas de temps $\Delta t > 0$ et un pas d'espace $\Delta x > 0$. Les instants de discrétisation sont définis par $t^n = n\Delta t$, pour $n \geq 0$ et les points de discrétisation par $x_i = i\Delta x$, pour $i \in \mathbb{Z}$. On considère le schéma aux différences finies suivant

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{2\Delta x} - \frac{c^2\Delta t}{2}\frac{u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{\Delta x^2} = 0, \ \ \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0, \tag{9}$$

assorti de la donnée initiale $u_i^0 = u_0(x_i)$. On pourra définir et utiliser dans les calculs, le paramètre $\nu = c\Delta t/\Delta x$.

1. Ecrire le schéma (9) sous la forme

$$u_i^{n+1} = \alpha_{-2}u_{i-2}^n + \alpha_{-1}u_{i-1}^n + \alpha_0 u_i^n.$$

   A quelle condition sur ν, le schéma proposé est-il monotone ?

2. Donner en une phrase les raisons pour lesquelles on peut appliquer l'analyse de stabilité de Von Neumann à ce schéma. Donner la formule définissant le facteur d'amplification $a(\xi)$ associé.

3. Démontrer que

$$|a(\xi)|^2 = \nu^2(2-\nu)^2 + (1-\nu)^2 + \nu(2-\nu)(1-\nu)^2 - \nu(2-\nu)(1-\nu)^2\big[\cos(\xi) - 1\big]^2.$$

   Indication : On pourra considérer la quantité $e^{\sqrt{-1}\xi}a(\xi)$.

4. Pour quelles valeurs de ν le schéma (9) est-il L^2-stable ?

5. Définir l'erreur de consistance R_i^n associée au schéma (9) et à la solution exacte u du problème considéré.

6. Démontrer qu'il existe $M > 0$ ne dépendant que des données du problème tel que

$$\sup_{i,n} |R_i^n| \leq M(\Delta t^2 + \Delta x^2).$$

7. Enoncer **(sans démonstration)** une estimation d'erreur pour le schéma (9).