

Analyse Numérique - Correction de l'examen du Lundi 11 Janvier 2010

Aucun document autorisé - Durée : 3h

Exercice 1**Partie 1 : Unicité de la solution**

On soustrait les équations vérifiées par u_1 et u_2 (ce qui fait disparaître le terme contenant f), on multiplie le résultat par $u_1 - u_2$ et on intègre sur I . Il vient

$$\int_0^1 -(u_1'' - u_2'')(u_1 - u_2) dx + \lambda \int_0^1 (u_1^3 - u_2^3)(u_1 - u_2) dx = 0.$$

On obtient le résultat annoncé en intégrant par parties le premier terme et en utilisant les conditions aux limites $u_1(0) = u_2(0) = u_1(1) = u_2(1) = 0$. On a donc bien

$$\int_0^1 |u_1' - u_2'|^2 dx + \lambda \int_0^1 (u_1^3 - u_2^3)(u_1 - u_2) dx = 0.$$

La fonction $s \mapsto s^3$ est une fonction croissante et le paramètre λ est positif donc les deux termes dans la somme précédente sont positifs et de somme nulle. On en déduit que ces deux termes sont nuls. En particulier, on a $u_1' = u_2'$, ce qui implique que $u_1 - u_2$ est constante et donc nulle par les conditions aux limites.

Partie 2 : Formulation variationnelle et existence de la solution

(a) Plusieurs preuves sont possibles :

- Méthode 1 : On utilise la convexité de la fonction $\Phi : s \mapsto s^4$.
- Méthode 2 : On utilise la convexité de la fonction $s \mapsto s^2$ et on obtient

$$0 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2},$$

(ceci se déduit aussi de l'identité du parallélogramme !). On élève le résultat au carré et on utilise à nouveau la convexité de $s \mapsto s^2$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \leq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}b^4.$$

- Méthode 3 : On constate que si $a = 0$ il n'y a rien à montrer. Dans le cas $a \neq 0$, on est ramené à démontrer que

$$\left(\frac{1+\frac{b}{a}}{2}\right)^2 \leq \frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^4}{2},$$

ce qui revient à effectuer l'étude de la fonction $g : x \mapsto \frac{1+(1+x)^4}{4(1+x^4)}$. et à montrer que $g(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On dresse aisément le tableau de variations de g afin de conclure.

- (b) Il suffit de multiplier par φ l'équation vérifiée par u , d'intégrer le résultat sur I puis d'effectuer une intégration par parties en utilisant les conditions aux limites.
- (c) On raisonne par densité. Toute fonction $v \in H_0^1(I)$ peut être approchée par une suite de fonctions $(\varphi_n)_n \subset C_c^\infty(I)$ pour la topologie de H^1 . Il suffit alors de passer à la limite dans la formule de la question précédente. Ceci ne présente aucune difficulté car tous les termes sont linéaires par rapport à φ .
- (d) i. Le théorème de Lax-Milgram ne permet que de traiter des problèmes linéaires, de la forme $a(u, v) = L(v)$ avec a bilinéaire et L linéaire. Ce n'est pas le cas de ce problème à cause du terme en u^3 .
- ii. Le premier terme ne pose pas de problème par définition de l'espace H^1 , le dernier terme non plus par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, enfin le second terme est également bien défini car toute fonction de $H^1(I)$ est dans $L^\infty(I)$ et en particulier dans $L^4(I)$, donc l'intégrale a bien un sens.
- iii. Le terme contenant λ est manifestement positif on peut donc écrire

$$\forall v \in H_0^1(I), \quad E(v) \geq \frac{1}{2} \int_0^1 |v'|^2 dx - \int_0^1 f v dx.$$

On a donc minoré E par l'énergie de la corde élastique que nous avons étudié en cours et dont nous avons vu qu'elle était bien minorée sur $H_0^1(I)$.

- iv. Par définition de l'infimum, pour tout $n \geq 1$, $\inf_{H_0^1} E + \frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de l'énergie, il existe donc $u_n \in H_0^1(I)$ telle que

$$\inf_{H_0^1(I)} E \leq E(u_n) \leq \left(\inf_{H_0^1(I)} E \right) + \frac{1}{n},$$

on a donc bien construit une suite d'éléments de $H_0^1(I)$ dont la suite des énergies converge vers l'infimum de E , c'est ce qu'on appelle une **suite minimisante**.

On calcule la quantité proposée dans l'énoncé en utilisant l'identité du parallélogramme et la question a) pour traiter le cas du terme contenant la puissance quatrième

$$\begin{aligned} E\left(\frac{u_n + u_{n+p}}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left\| \frac{u'_n + u'_{n+p}}{2} \right\|_{L^2}^2 + \lambda \int_I \left| \frac{u_n + u_{n+p}}{2} \right|^4 dx - \int_I f \frac{u_n + u_{n+p}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \|u'_n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|u'_{n+p}\|_{L^2}^2 - \left\| \frac{u'_n - u'_{n+p}}{2} \right\|_{L^2}^2 \right) + \lambda \int_I \left| \frac{u_n + u_{n+p}}{2} \right|^4 dx - \int_I f \frac{u_n + u_{n+p}}{2} dx \\ &\leq \frac{1}{2} E(u_n) + \frac{1}{2} E(u_{n+p}) - \frac{1}{8} \|u'_n - u'_{n+p}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Comme $\inf_{H_0^1(\Omega)} E \leq E((u_n + u_{n+p})/2)$, on a bien le résultat attendu.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, on a $\left| \inf_{H_0^1} E - E(u_n) \right| \leq \varepsilon$, d'après ce qui précède on a

$$\forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, \|u'_n - u'_{n+p}\|_{L^2}^2 \leq 8\varepsilon.$$

La suite $(u_n)_n$ est donc bien de Cauchy dans $H_0^1(I)$.

- v. Comme $H_0^1(I)$ est un Hilbert, la suite $(u_n)_n$ converge dans $H_0^1(I)$ vers une certaine fonction u . Il suffit de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = E(u)$.

Pour le premier et le troisième terme de E , on procède comme dans l'exemple traité en cours. Pour le second terme, on utilise le fait que (Cf. le rappel en début d'énoncé)

$$\|u_n - u\|_{L^4(I)} \leq \|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u'_n - u'\|_{L^2(I)},$$

et donc que la convergence H^1 implique la convergence dans $L^4(I)$. En particulier, on a bien $\int_I |u_n|^4 dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_I |u|^4 dx$.

- vi. Par définition de u , la fonction $\psi_v : t \mapsto E(u + tv)$ admet un minimum local en $t = 0$ donc sa dérivée en $t = 0$ doit être nulle. Or, cette fonction est polynomiale de degré 4 par rapport à t et on peut aisément identifier le coefficient de t dans le développement. Ce coefficient doit être nul, cela fournit le résultat attendu.
- vii. On a obtenu $u \in H^1(I)$ qui vérifie donc la formulation de la question b)

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I), \int_0^1 u' \varphi' dx = \int_0^1 (f - \lambda u^3) \varphi dx.$$

Ceci exprime exactement, par définition, que u' admet une dérivée faible dans $L^2(I)$, celle-ci étant donnée par $u'' = (u')' = \lambda u^3 - f$ (attention au signe !!).

Comme u' est dans H^1 elle continue et de plus d'après la formule ci-dessus u'' est aussi continue (car u^3 et f le sont), donc u est bien de classe C^2 .

Partie 3 : Un schéma numérique aux différences finies

- (a) Par définition, pour tout i , on a $|v_i| \leq \|V\|_\infty$ et donc

$$\|V\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \Delta x v_i^2 \leq \|V\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n \Delta x = \|V\|_\infty^2 \frac{n}{n+1} \leq \|V\|_\infty^2.$$

- (b) Le schéma s'écrit bien sous la forme attendue où A est la matrice tridiagonale symétrique étudiée en cours qui contient $2/\Delta x^2$ sur la diagonale et $-1/\Delta x^2$ sur les sous- et sur-diagonales.
- (c) Il s'agit d'un calcul fait en cours (par changement d'indices dans les sommes) qui montre que

$$(AV, V)_2 = \sum_{i=0}^n \Delta x \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x} \right)^2.$$

Ceci est clairement positif et ne peut être nul que si tous les v_i sont égaux et donc nuls car $v_0 = v_{n+1} = 0$.

(d) La seconde propriété découle de la première en prenant $V = 0$ et en remarquant que $\Phi(0) = 0$.

Pour montrer la première propriété on utilise juste encore une fois la monotonie de la fonction $s \mapsto s^3$ donc

$$(\Phi(U) - \Phi(V), U - V)_2 = \sum_{i=1}^n \Delta x \underbrace{(u_i^3 - v_i^3)}_{\geq 0} (u_i - v_i) \geq 0.$$

(e) Si U_1 et U_2 sont deux solutions on a

$$A(U_1 - U_2) + \lambda(\Phi(U_1) - \Phi(U_2)) = 0,$$

de sorte que

$$(A(U_1 - U_2), U_1 - U_2)_2 + \lambda(\Phi(U_1) - \Phi(U_2), U_1 - U_2)_2 = 0.$$

D'après les questions précédentes, les deux termes sont positifs donc nuls. Il vient bien $U_1 = U_2$.

- (f) i. Pour $\lambda = 0$, l'équation à résoudre s'écrit $AU = F$. Celle-ci admet une unique solution car A est symétrique définie positive donc inversible.
 ii. C'est un calcul élémentaire. La matrice D_U est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont donnés par $3(u_i)^2$. Ce sont bien des coefficients positifs.
 iii. A est symétrique et D_U diagonale donc la Jacobienne est bien symétrique. De plus, pour tout $V \in \mathbb{R}^n$ on a

$$(J_U \Psi \cdot V, V)_2 = (AV, V)_2 + \lambda(D_U V, V)_2 \geq (AV, V)_2,$$

$$\text{car } (D_U V, V)_2 = 3 \sum_{i=1}^n \Delta x (u_i)^3 (v_i)^2 \geq 0.$$

- iv. Soit $\lambda \in \Lambda$ et $U \in \mathbb{R}^n$ tels que $\Psi(\lambda, U) = 0$. On a vu que la Jacobienne de Ψ par rapport à U en (λ, U) est inversible (car définie positive). D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un intervalle ouvert contenant λ noté $J_\varepsilon =]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$ et une application $g : J_\varepsilon \mapsto \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $g(\lambda) = U$ et

$$\Psi(s, g(s)) = 0, \quad \forall s \in J_\varepsilon.$$

Ainsi si $s \in J_\varepsilon \cap [0, +\infty[$, il existe bien une solution de l'équation $\Psi(s, U) = 0$ (donnée par $g(s)$) et donc $J_\varepsilon \cap [0, +\infty[\subset \Lambda$. Cela donne le résultat.

- v. Par définition U_k vérifie

$$AU_k + \lambda_k \Psi(U_k) = F.$$

En prenant le produit scalaire avec U_k on trouve (grâce à la question d)

$$(AU_k, U_k)_2 + \lambda_k \underbrace{(\Psi(U_k), U_k)_2}_{\geq 0} = (F, U_k)_2.$$

En utilisant la propriété admise sur A et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\|U_k\|_2^2 \leq (AU_k, U_k) \leq (F, U_k)_2 \leq \|F\|_2 \|U_k\|_2,$$

d'où le résultat $\|U_k\|_2 \leq \|F\|_2$.

$(U_k)_k$ est donc une suite bornée de \mathbb{R}^n (qui est de dimension finie !), elle admet donc bien une sous-suite $(U_{\varphi(k)})_k$ qui converge vers un certain U . Comme on a de plus $\lambda_{\psi(k)} \rightarrow \lambda$, on peut aisément passer à la limite dans l'équation $AU_{\varphi(k)} + \lambda_{\varphi(k)} \Phi(U_{\varphi(k)}) = F$, et obtenir que U est bien solution du même problème pour la valeur de λ initialement choisie.

Ainsi on a montré que $\lambda \in \Lambda$ et que Λ est donc bien un fermé.

- vi. Comme $[0, +\infty[$ est connexe, et que Λ est non vide, ouvert et fermé, on a bien $\Lambda = [0, +\infty[$. Ceci prouve bien que le schéma admet une unique solution pour toute valeur du paramètre λ .

Partie 4 : Analyse de l'erreur

- (a) Celle-ci est définie, comme d'habitude, par

$$R = A\bar{U} + \lambda\Phi(\bar{U}) - F, \tag{1}$$

soit encore en travaillant par coordonnées

$$R_i = -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{\Delta x^2} + \lambda(u(x_i))^3 - f(x_i).$$

Cela revient à injecter les valeurs exactes de la solution dans le schéma numérique.

- (b) C'est un développement de Taylor autour du point x_i totalement standard, car le terme non-linéaire ne contribue pas dans le calcul (il n'est pas nécessaire d'effectuer un développement de Taylor de ce terme !).
- (c) On soustrait l'équation vérifiée par \bar{U} et R (équation (1) ci-dessus) et la définition du schéma. On trouve

$$AE + \lambda(\Phi(\bar{U}) - \Phi(U)) = R,$$

on prend alors le produit scalaire avec E et on utilise la positivité du second terme (Cf. question d) pour conclure.

Avec les propriétés admises de A et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\|E\|_2 \leq \|R\|_2 \leq C\Delta x^2.$$

Exercice 2

Partie 1 : Analyse théorique du modèle

- (a) La fonction $F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} ax - cxy \\ by - dxy \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ est polynomiale donc, en particulier, de classe \mathcal{C}^1 . Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc et fournit l'existence et l'unicité d'une solution maximale pour toute donnée de Cauchy.
- (b) Si $x_0 = 0$ et $y_0 \geq 0$, on voit que la fonction $(x(t), y(t)) = (0, y_0 e^{bt})$ est bien solution du problème (et c'est la seule d'après ce qui précède !). Elle est définie sur tout \mathbb{R} .
Si $x_0 \geq 0$ et $y_0 = 0$, alors la solution est donnée par $(x(t), y(t)) = (x_0 e^{at}, 0)$.
- (c) On suppose $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. On suppose qu'il existe $t^* > 0$ tel que $x(t^*) = 0$. La solution considérée est alors également solution du problème de Cauchy pour la donnée $(0, y(t^*))$ au temps t^* . On a vu à la question précédente qu'une telle solution vérifie $x(t) = 0$ pour tout t , ce qui contredit le fait que $x(0) = x_0 > 0$. Même raisonnement pour la fonction y .
- (d) Comme x et y sont toujours positives et que c et d sont positifs, la première équation du système donne

$$\forall t \geq 0, \quad x'(t) \leq ax(t).$$

Par le lemme usuel sur les inégalités différentielles (de type Gronwall), on obtient bien

$$\forall t \geq 0, \quad x(t) \leq x_0 e^{at}.$$

On peut également, si on a oublié le lemme, vérifier que la fonction $x(t)e^{-at}$ est décroissante.

C'est exactement la même démonstration pour y .

- (e) Les estimations précédentes montrent que la solution maximale est bornée par e^{aT} et e^{bT} respectivement sur tout intervalle fini $[0, T] \subset J$. Le théorème d'explosion en temps fini nous assure donc que la solution est bien définie sur $[0, +\infty[$.

Partie 2 : Un schéma numérique

- (a) Le schéma proposé s'écrit également

$$(1 + c\Delta t y^n) x^{n+1} = (1 + a\Delta t) x^n,$$

$$(1 + d\Delta t x^n) y^{n+1} = (1 + b\Delta t) y^n.$$

Si x^n et y^n sont donnés et strictement positifs, alors les facteurs devant x^{n+1} et y^{n+1} ne sont pas nuls, ce qui définit bien x^{n+1} et y^{n+1} , et de plus on a

$$x^{n+1} = \frac{1 + a\Delta t}{1 + c\Delta t y^n} x^n > 0, \tag{2}$$

$$y^{n+1} = \frac{1 + b\Delta t}{1 + d\Delta t x^n} y^n > 0. \tag{3}$$

Comme on part de données initiales x_0 et y_0 strictement positives, le résultat découle d'une récurrence immédiate.

- (b) Il s'agit de faire une boucle qui utilise les formules (2)-(3) ci-dessus. D'un point de vue pratique, et malgré les apparences, le schéma est donc totalement explicite.

(c) Comme les suites $(x^n)_n$ et $(y^n)_n$ sont positives, on constate que l'on a les inégalités

$$\begin{aligned}x^{n+1} &\leq (1 + a\Delta t)x^n, \\y^{n+1} &\leq (1 + b\Delta t)y^n,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}x^n &\leq x_0(1 + a\Delta t)^n = x_0 \exp(n \log(1 + a\Delta t)) \leq x_0 \exp(an\Delta t), \\y^n &\leq y_0(1 + b\Delta t)^n = y_0 \exp(n \log(1 + b\Delta t)) \leq y_0 \exp(bn\Delta t).\end{aligned}$$

(d) D'après la question précédente et la question 1-d), il suffit de prendre

$$M_1 = \max(x_0 e^{aT}, y_0 e^{bT}).$$

(e) On utilise les formules de Taylor autour de l'instant t^n (et bien sûr les deux équations différentielles vérifiées par x et y). On trouve ainsi qu'il existe $\xi^n, \tilde{\xi}^n, \zeta^n, \tilde{\zeta}^n \in]t^n, t^{n+1}[$ tels que

$$\begin{aligned}R_x^n &= \frac{\Delta t}{2} x''(\xi^n) + c\Delta t x'(\tilde{\xi}^n) y(t^n), \\R_y^n &= \frac{\Delta t}{2} y''(\zeta^n) + d\Delta t x(t^n) y'(\tilde{\zeta}^n).\end{aligned}$$

On a donc le résultat annoncé avec (par exemple)

$$M_2 = \frac{1}{2} \left(\sup_{[0,T]} |x''| + \sup_{[0,T]} |y''| \right) + c \left(\sup_{[0,T]} |x'| \right) \left(\sup_{[0,T]} |y| \right) + d \left(\sup_{[0,T]} |x| \right) \left(\sup_{[0,T]} |y'| \right).$$

(f) Il suffit ici de soustraire la définition de R_x^n et R_y^n et le schéma numérique proposé. La seule subtilité provient des termes non-linéaires pour lesquels on écrit

$$x(t^{n+1})y(t^n) - x^{n+1}y^n = x(t^{n+1})(y(t^n) - y^n) + (x(t^{n+1}) - x^{n+1})y^n = x(t^{n+1})e_y^n + e_x^{n+1}y^n.$$

(g) On rassemble les termes en e_x^{n+1} et e_y^{n+1} dans le membre de gauche

$$\begin{aligned}(1 + c\Delta t y^n) e_x^{n+1} &= (1 + a\Delta t) e_x^n - c\Delta t x(t^{n+1}) e_y^n + \Delta t R_x^n, \\(1 + d\Delta t x^n) e_y^{n+1} &= (1 + b\Delta t) e_y^n - d\Delta t x y(t^{n+1}) e_x^n + \Delta t R_y^n.\end{aligned}$$

On prend la valeur absolue et on utilise le fait que les facteurs devant e_x^{n+1} et e_y^{n+1} sont supérieurs ou égaux à 1 (car c, d, x^n, y^n sont positifs). Cela donne le résultat demandé en majorant $x(t^{n+1})$ et $y(t^{n+1})$ par M_1 .

(h) Il suffit de sommer les inégalités précédentes et de prendre (par exemple)

$$M_3 = (a + b) + M_1(c + d).$$

On définit maintenant l'erreur totale $E^n = |e_x^n| + |e_y^n|$. Montrer qu'il existe $M_3 > 0$ ne dépendant pas de Δt telle que

$$\forall n \leq \frac{T}{\Delta t}, \quad E^{n+1} \leq (1 + M_3 \Delta t) E^n + \Delta t (|R_x^n| + |R_y^n|).$$

(i) On applique le lemme de Gronwall discret exactement comme dans le cours. Le schéma est donc d'ordre 1.

(j) La méthode d'Euler explicite s'écrirait

$$\begin{cases} \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = ax^n - cx^n y^n, \\ \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = by^n - dx^n y^n. \end{cases}$$

Pour ce schéma, l'existence et l'unicité de la solution approchée est triviale mais on n'est pas certain que celle-ci reste positive (pour cela il faut imposer une condition sur le pas de temps).

La méthode d'Euler implicite s'écrirait

$$\begin{cases} \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = ax^{n+1} - cx^{n+1}y^{n+1}, \\ \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = by^{n+1} - dx^{n+1}y^{n+1}. \end{cases}$$

C'est cette fois l'existence et l'unicité de la solution qui ne sont plus immédiates. De plus, là encore la positivité n'est pas garantie sans condition sur le pas de temps. Par exemple si $c = 0$ et $a\Delta t > 1$, alors le schéma est oscillant.

Exercice 3

1. (a) On injecte les valeurs exactes de la fonction u dans le schéma. La quantité obtenue est l'erreur de consistance

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0, R_i^n = \frac{u(t^{n+1}, x_i) - u(t^n, x_i)}{\Delta t} + \frac{u(t^n, x_{i+1}) + u(t^n, x_i) - 2u(t^n, x_{i-1})}{\Delta x}.$$

- (b) En effectuant des développements de Taylor de la fonction u autour du point (t^n, x_i) on a

$$u(t^{n+1}, x_i) = u + \Delta t \partial_t u + O(\Delta t^2),$$

$$u(t^n, x_{i+1}) = u + \Delta x \partial_x u + O(\Delta x^2),$$

$$u(t^n, x_{i-1}) = u - \Delta x \partial_x u + O(\Delta x^2).$$

Si on remplace ces formules dans la définition de R_i^n , on trouve

$$R_i^n = \partial_t u + 3\partial_x u + O(\Delta t + \Delta x).$$

On voit donc que, pour que R_i^n soit petit quand Δt et Δx sont petits, il faut que u soit solution de l'équation $\partial_t u + 3\partial_x u = 0$.

- (c) On a vu en cours que la solution de ce problème est donnée par

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, u(t, x) = u_0(x - 3t).$$

2. C'est un calcul immédiat qui donne

$$u_i^{n+1} = 2\nu u_{i-1}^n + (1 - \nu)u_i^n - \nu u_{i+1}^n,$$

Le schéma est monotone si tous les coefficients $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1$ sont positifs. Cela ne peut arriver que pour $\nu = 0$ mais ceci est impossible car $\Delta t > 0$ et $\Delta x > 0$ et donc nécessairement $\nu > 0$. Donc, le schéma n'est jamais monotone.

3. (a) Le facteur d'amplification $a(\xi)$ a pour définition

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, a(\xi) = 2\nu e^{-\xi\sqrt{-1}} + (1 - \nu) - \nu e^{\xi\sqrt{-1}} = (1 - \nu) + \nu \cos(\xi) - 3\nu \sin(\xi)\sqrt{-1}.$$

- (b) On déduit du calcul précédent que

$$|a(\xi)|^2 = \left[(1 - \nu) + \nu \cos(\xi) \right]^2 + 9\nu^2 \sin^2(\xi) = (1 - \nu)^2 + 9\nu^2 + 2\nu(1 - \nu) \cos(\xi) - 8\nu^2 \cos^2(\xi).$$

D'après la théorie de Von Neumann, le schéma sera L^2 -stable si $\sup_{\xi} |a(\xi)| \leq 1$. On doit donc trouver le supremum sur $[-1, 1]$ de la fonction polynomiale de degré 2 définie par

$$f(X) = (1 - \nu)^2 + 9\nu^2 + 2\nu(1 - \nu)X - 8\nu^2 X^2.$$

Par construction (c'est le carré du module d'un nombre complexe !), cette fonction est positive sur $[-1, 1]$, de plus son coefficient dominant est négatif, il suffit donc de vérifier que $f'(1) \geq 0$.

On trouve $f'(1) = 2\nu(1 - \nu) - 16\nu^2 = 2\nu(1 - 9\nu)$, et on voit bien que $f'(1) \geq 0$ si et seulement si $0 \leq \nu \leq \frac{1}{9}$.