Analyse Numérique - Examen du Lundi 11 Janvier 2010

Aucun document autorisé - Durée : 3h

N.B. : Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans le désordre ! Sauf demande explicite de l'énoncé, vous pouvez utiliser (en les citant) les résultats du cours sans démonstration.

Comme d'habitude, le barême tiendra compte de la longueur du sujet.

Exercice 1

On pose $I =]0,1[$. On cherche dans cet exercice à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' + \lambda u^3 = f, & \text{dans } I, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction continue donnée et λ un paramètre réel **positif** donné.

• **Remarque préliminaire importante :** Le problème (1) est non-linéaire, ce qui implique que certains résultats du cours ne peuvent être directement appliqués et doivent être (légèrement) adaptés. Les questions qui suivent vont vous guider dans l'étude de ce problème.

• **Rappel du cours :** On rappelle que l'application $u \in H_0^1(I) \mapsto \|u'\|_{L^2}$ est une norme sur $H_0^1(I)$ équivalente à la norme H^1 et que de plus, toute fonction de $H_0^1(I)$ est continue (i.e. est égale presque partout à une fonction continue) et qu'on a l'inégalité

$$\forall u \in H_0^1(I), \ \ \|u\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^2}.$$

Partie 1 : Unicité de la solution

Soient u_1 et u_2 deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ solutions du problème (1). Démontrer que l'on a

$$\int_0^1 |u_1' - u_2'|^2\, dx + \lambda \int_0^1 (u_1^3 - u_2^3)(u_1 - u_2)\, dx = 0.$$

En déduire que l'on a nécessairement $u_1 = u_2$.

La suite de l'exercice est donc consacrée à la preuve de l'existence d'une solution à ce problème.

Partie 2 : Formulation variationnelle et existence de la solution

(a) Démontrer l'inégalité suivante

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ \ \left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \leq \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}b^4.$$

(b) Montrer que toute solution éventuelle $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ du problème (1) vérifie la formulation suivante

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[), \ \ \int_0^1 u'\varphi'\, dx + \lambda \int_0^1 u^3 \varphi\, dx = \int_0^1 f\varphi\, dx.$$

(c) Montrer que cette solution éventuelle vérifie également

$$\forall v \in H_0^1(I), \ \ \int_0^1 u'v'\, dx + \lambda \int_0^1 u^3 v\, dx = \int_0^1 fv\, dx. \tag{2}$$

(d) On s'intéresse donc maintenant au problème suivant

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(I) \text{ vérifiant les équations (2).} \tag{$\mathcal{P}$}$$

i. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le théorème de Lax-Milgram pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$?

ii. Pour tout $v \in H_0^1(I)$, on introduit l'énergie suivante (on continue à employer le terme *énergie* même si cette quantité n'a *a priori* aucune signification physique particulière) :

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 |v'|^2\, dx + \frac{\lambda}{4}\int_0^1 |v|^4\, dx - \int_0^1 fv\, dx.$$

Expliquez rapidement pourquoi tous les termes de cette formule sont bien définis pour tout $v \in H_0^1(I)$.

iii. Démontrer que l'énergie E est minorée sur l'espace $H_0^1(I)$. On pourra essayer de minorer E par une fonctionnelle dont les propriétés sont connues.

iv. Démontrer qu'il existe une suite minimisante pour E dans $H_0^1(I)$. On note $(u_n)_n \subset H_0^1(I)$ une telle suite.
En considérant la quantité $E\left(\frac{u_n+u_{n+p}}{2}\right)$, montrer l'**inégalité** suivante

$$\forall n, p \geq 0, \;\; \frac{1}{8}\|u_n' - u_{n+p}'\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}E(u_n) + \frac{1}{2}E(u_{n+p}) - \inf_{v \in H_0^1} E(v).$$

En déduire que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $H_0^1(I)$.

v. Conclure qu'il existe une fonction $u \in H_0^1(I)$ telle que

$$E(u) = \inf_{v \in H_0^1(I)} E(v).$$

vi. Soit $v \in H_0^1(I)$ quelconque. En étudiant la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto E(u+tv) \in \mathbb{R}$ démontrer que la fonction u obtenue à la question précédente est bien solution du problème $(\mathcal{P})$.

vii. Montrer que $u' \in H^1(I)$ et calculer u''. En déduire que u' est continue puis que u'' est également continue. Conclure que finalement u est bien l'unique solution de classe $\mathcal{C}^2$ du problème (1).

Partie 3 : Un schéma numérique aux différences finies

On considère un maillage uniforme de l'intervalle I défini par les points $x_i = i\Delta x$, $i = 0, \dots, n+1$ où $\Delta x = \frac{1}{n+1}$. On propose d'essayer de trouver une approximation de la solution du problème (1) à l'aide du schéma numérique suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \lambda(u_i)^3 = f(x_i), \;\; \forall 1 \leq i \leq n, \\ u_0 = u_{n+1} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Rappel de notations : Le produit scalaire L^2 sur $\mathbb{R}^n$ est défini par $(U, V)_2 = \sum_{i=1}^n \Delta x \, u_i v_i$, et la norme associée est notée $\|\cdot\|_2$. On note également $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie sur $\mathbb{R}^n$.

(a) Démontrer que
$$\forall V \in \mathbb{R}^n, \;\; \|V\|_2 \leq \|V\|_\infty.$$

(b) Soit $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ le vecteur des inconnues du schéma (3). Montrer que le schéma numérique (3) se met sous la forme
$$\text{Trouver } U \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } AU + \lambda\Phi(U) = F, \tag{4}$$
où $\Phi : V \in \mathbb{R}^n \mapsto (v_i^3)_i \in \mathbb{R}^n$, $F = (f(x_i))_i \in \mathbb{R}^n$ et A est une matrice carrée de taille n que vous préciserez.
On va maintenant montrer que ce schéma admet une unique solution.

(c) Démontrer que A est symétrique définie positive pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_2$ défini ci-dessus. On admettra par la suite que A vérifie la propriété suivante

$$\forall V \in \mathbb{R}^n, \;\; \|V\|_2^2 \leq \|V\|_\infty^2 \leq (AV, V)_2. \tag{5}$$

(d) Démontrer que l'application Φ vérifie

$$\forall U, V \in \mathbb{R}^n, \;\; (\Phi(U) - \Phi(V), U - V)_2 \geq 0. \tag{6}$$

$$\forall U \in \mathbb{R}^n, \;\; (\Phi(U), U)_2 \geq 0. \tag{7}$$

(e) Déduire des questions précédentes que le problème (4) admet au plus une solution.
Indication : Considérer deux solutions U_1, U_2. Soustraire les équations qu'elles vérifient et prendre le produit scalaire L^2 avec $U_1 - U_2$.

(f) On considère l'application suivante

$$\Psi : (\lambda, U) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \mapsto AU + \lambda\Phi(U) - F \in \mathbb{R}^n.$$

On appelle Λ l'ensemble des valeurs de $\lambda \geq 0$ pour lesquelles il existe une solution du schéma (4), autrement dit
$$\Lambda = \left\{\lambda \in [0, +\infty[, \;\; \exists U \in \mathbb{R}^n, \Psi(\lambda, U) = 0\right\}.$$

i. Montrer que $0 \in \Lambda$.

ii. Montrer que la Jacobienne par rapport à la variable U de l'application Ψ en un point (λ, U) est de la forme
$$J_U\Psi(\lambda, U) = A + \lambda D_U,$$
où D_U est une matrice diagonale à coefficients positifs qui dépend du vecteur U et qu'on déterminera.

iii. Montrer que pour tout $(\lambda, U) \in [0, +\infty[\times\mathbb{R}^n$, la matrice $J_U\Psi(\lambda, U)$ est symétrique définie positive pour le produit scalaire L^2.

iv. En déduire que l'ensemble Λ est un ouvert de $[0, +\infty[$.
Indication : On pourra utiliser le théorème des fonctions implicites.

v. On veut maintenant montrer que Λ est fermé. Soit donc $(\lambda_k)_k \subset \Lambda$ une suite de réels qui converge vers un certain $\lambda \in [0, +\infty[$. On appelle $U_k \in \mathbb{R}^n$ une solution de $\Psi(\lambda_k, U_k) = 0$ (une telle solution existe par définition de l'ensemble Λ).
En utilisant les questions c) et d), montrer que la suite $(U_k)_k$ vérifie
$$\forall k \geq 0, \|U_k\|_2 \leq \|F\|_2.$$
En déduire que $(U_k)_k$ admet une sous-suite convergente et conclure que $\lambda \in \Lambda$.

vi. Déduire des questions précédentes que $\Lambda = [0, +\infty[$. Conclure.

Partie 4 : Analyse de l'erreur

On note $\bar{U} = (u(x_i))_i \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des valeurs exactes de la solution du problème (1) et $U \in \mathbb{R}^n$ la solution du schéma (3) associée aux mêmes données λ et f.

(a) Définir l'erreur de consistance R associée au schéma (3) et à la solution u du problème étudié.

(b) En supposant que la solution u est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0, 1]$, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de Δx telle que
$$\|R\|_2 \leq \|R\|_\infty \leq C\Delta x^2.$$

(c) Montrer que l'erreur $E = \bar{U} - U$ vérifie
$$(AE, E)_2 \leq (R, E)_2.$$
En déduire qu'on a l'estimation suivante
$$\|E\|_2 \leq C'\Delta x^2.$$

Exercice 2

On considère le système d'équations différentielles suivant
$$\begin{cases} x' = ax - cxy, \\ y' = by - dxy, \end{cases} \tag{8}$$
assorti de conditions initiales $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$, où $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^+$ sont des données du problème. Les coefficients a, b, c et d sont positifs dans tout cet exercice.

Ce système modélise l'évolution des populations de deux espèces en compétition. Plus précisément :

– En l'absence d'interactions (i.e. si $c = d = 0$) alors les effectifs des deux espèces croissent exponentiellement et de façon indépendante.
– Les effets d'interaction (i.e. les termes non-linéaires) modélisent le fait que les deux espèces se combattent pour accéder à la nourriture, ce qui a pour effet de créer de la mortalité pour chacune des deux espèces.

Partie 1 : Analyse théorique du modèle

(a) Démontrer que le problème de Cauchy associé à ce système admet une unique solution maximale pour toutes données initiales positives (on rappelera la définition précise d'une solution maximale !). On notera J l'intervalle de définition de cette solution.

(b) Si $x_0 = 0$ et $y_0 \geq 0$, calculer **explicitement** la solution maximale $t \mapsto (x(t), y(t))$ du problème en précisant son intervalle de définition. Même question si $x_0 \geq 0$ et $y_0 = 0$.

(c) Démontrer que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, alors pour tout temps $t \in J$, on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.

(d) Toujours sous l'hypothèse que les données x_0 et y_0 sont positives, montrer que l'on a

$$\forall t \in J \cap [0, +\infty[, \quad x(t) \leq x_0 e^{at},$$

$$\forall t \in J \cap [0, +\infty[, \quad y(t) \leq y_0 e^{bt}.$$

(e) En déduire que la solution maximale de ce problème est bien définie sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$ ou autrement dit que $[0, +\infty[\subset J$.

Partie 2 : Un schéma numérique

Soit $T > 0$. On se propose de résoudre numériquement le problème précédent sur l'intervalle $[0, T]$ à l'aide du schéma suivant

$$\begin{cases} \dfrac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = ax^n - cx^{n+1}y^n, \\ \dfrac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = by^n - dx^n y^{n+1}, \end{cases} \tag{9}$$

avec $x^0 = x_0 > 0$, $y^0 = y_0 > 0$ et où $\Delta t > 0$ est le pas de temps. On notera $t^n = n\Delta t$, les instants de discrétisation.

(a) Montrer que le schéma (9) est bien défini. Plus précisément, on montrera que les suites $(x^n)_n$ et $(y^n)_n$ sont définies de façon unique et que de plus, pour tout $n \geq 0$, on a $x^n > 0$ et $y^n > 0$. On pourra raisonner par récurrence.

(b) Décrire en quelques lignes (par exemple en pseudo-language Scilab) la façon dont vous programmeriez ce schéma.

(c) Démontrer que la solution du schéma (9) vérifie

$$\forall n \geq 0, \;\; x^n \leq x_0 e^{an\Delta t},$$

$$\forall n \geq 0, \;\; y^n \leq y_0 e^{bn\Delta t}.$$

(d) En déduire qu'il existe $M_1 > 0$ qui ne dépend que de T, x_0, y_0, a et b telle que

$$\max\left(\sup_{n \leq \frac{T}{\Delta t}} x^n, \sup_{n \leq \frac{T}{\Delta t}} y^n, \sup_{n \leq \frac{T}{\Delta t}} x(t^n), \sup_{n \leq \frac{T}{\Delta t}} y(t^n)\right) \leq M_1.$$

(e) On définit les erreurs de consistance suivantes (une pour chaque équation du système !)

$$R_x^n = \frac{x(t^{n+1}) - x(t^n)}{\Delta t} - ax(t^n) + cx(t^{n+1})y(t^n),$$

$$R_y^n = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{\Delta t} - by(t^n) + dx(t^n)y(t^{n+1}).$$

Démontrer qu'il existe $M_2 > 0$ (dépendant seulement des fonctions x et y, des paramètres a, b, c, d et de T mais indépendante de Δt) telle que

$$\sup_{n \leq \frac{T}{\Delta t}} \left(|R_x^n| + |R_y^n|\right) \leq M_2 \Delta t.$$

(f) On définit maintenant les erreurs d'approximation pour chacune des deux inconnues par

$$e_x^n = x(t^n) - x^n, \;\; e_y^n = y(t^n) - y^n.$$

Montrer que l'on a

$$\begin{cases} \dfrac{e_x^{n+1} - e_x^n}{\Delta t} = ae_x^n - cx(t^{n+1})e_y^n - ce_x^{n+1}y^n + R_x^n, \\ \dfrac{e_y^{n+1} - e_y^n}{\Delta t} = be_y^n - dy(t^{n+1})e_x^n - de_y^{n+1}x^n + R_y^n. \end{cases}$$

(g) En déduire les inégalités suivantes

$$\forall n \leq \frac{T}{\Delta t}, \quad |e_x^{n+1}| \leq (1 + a\Delta t)|e_x^n| + cM_1\Delta t|e_y^n| + \Delta t|R_x^n|,$$

$$\forall n \leq \frac{T}{\Delta t}, \quad |e_y^{n+1}| \leq (1 + b\Delta t)|e_y^n| + dM_1\Delta t|e_x^n| + \Delta t|R_y^n|.$$

(h) On définit maintenant l'erreur totale $E^n = |e_x^n| + |e_y^n|$. Montrer qu'il existe $M_3 > 0$ ne dépendant pas de Δt telle que

$$\forall n \leq \frac{T}{\Delta t}, \quad E^{n+1} \leq (1 + M_3\Delta t)E^n + \Delta t(|R_x^n| + |R_y^n|).$$

(i) Montrer finalement qu'il existe $M_4 > 0$ indépendante de Δt telle que

$$\sup_{n \leq \frac{T}{\Delta t}} E^n \leq M_4\Delta t.$$

Quel est l'ordre d'approximation du schéma ?

(j) Ecrire les deux schémas qu'on obtiendrait en utilisant la méthode d'Euler explicite et la méthode d'Euler implicite pour le problème étudié ici. Dire en quelques lignes pourquoi ces deux méthodes plus classiques semblent moins bien adaptées au problème que le schéma (3).

Exercice 3

On se donne un pas d'espace $\Delta x > 0$, un pas de temps $\Delta t > 0$ et une fonction $u_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ régulière et à support compact.
On considère le schéma numérique suivant

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0, \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^n + u_i^n - 2u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \tag{10}$$

avec $u_i^0 = u_0(x_i)$.

1. Soit $(t, x) \mapsto u(t, x)$ une fonction régulière vérifiant $u(0, x) = u_0(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
   (a) Définir l'erreur de consistance associée au schéma (10) et à la fonction u.
   (b) Quelle est l'équation aux dérivées partielles que doit vérifier la fonction u pour que cette erreur de consistance tende vers 0 quand Δt et Δx tendent vers 0 ?
   (c) Résoudre explicitement l'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue en fonction de la donnée initiale u_0.
2. Ecrire le schéma sous la forme
   $$u_i^{n+1} = \alpha_{-1}u_{i-1}^n + \alpha_0 u_i^n + \alpha_1 u_{i+1}^n,$$
   où α_{-1}, α_0 et α_1 sont des coefficients qu'on déterminera explicitement en fonction du paramètre $\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.
   Pour quelles valeurs de ν le schéma est-il monotone ? Commentez le résultat obtenu.
3. (a) Définir et calculer le facteur d'amplification $\xi \mapsto a(\xi)$ associé à ce schéma (celui-ci dépend de ν).
   (b) Démontrer que si $0 \leq \nu \leq \frac{1}{9}$, alors le schéma proposé est L^2-stable.