Master $1^{ère}$ année de Mathématiques — CMI, Université de Provence, Université Paul Cézanne

Année 2008-2009

Analyse Numérique - Examen du Lundi 12 Janvier 2009

Aucun document autorisé - Durée : 3h

N.B. : Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans le désordre !

Le barême tiendra compte de la longueur, sans doute excessive, du sujet.

Exercice 1

On s'intéresse dans cet exercice au problème suivant (où c est une fonction donnée de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et f une fonction continue sur $[0,1]$) :

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u + c(x)\partial_x u = f(x), & \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Pour toute fonction continue $w : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, on rappelle la notation $\|w\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |w(x)|$.

Partie 1 : Résolution explicite dans un cas particulier

On suppose *uniquement dans cette partie* que les fonctions c et f sont constantes et que $c \neq 0$.

(a) Calculer, en fonction de f et c, toutes les fonctions u de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifient l'équation différentielle

$$-\partial_x^2 u + c\partial_x u = f, \quad \forall x \in]0,1[.$$

(b) Montrer que, parmi toutes les fonctions u calculées précédemment, il en existe une seule qui vérifie $u(0) = u(1) = 0$. En déduire que le problème (1) admet une unique solution que l'on donnera explicitement.

(c) Vérifier que, si $f \geq 0$, la solution obtenue précédemment est concave sur $[0,1]$. En déduire que, dans ce cas particulier, le principe du maximum est vérifié, c'est-à-dire :

$$\text{Si } f \geq 0, \text{ alors la solution } u \text{ de (1) vérifie } u \geq 0. \tag{2}$$

Partie 2 : Principe du maximum dans le cas général

On revient maintenant au cas général où c et f ne sont pas nécessairement constantes. On admet que, dans ces conditions, le problème (1) admet une unique solution u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.

On va montrer dans cette partie que le principe du maximum (i.e. la propriété (2)) est encore vraie dans ce cadre.

Pour cela, on procède par l'absurde en supposant que $f \geq 0$ et que $\min_{[0,1]} u < 0$.

(a) Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $u(x_0) < 0$. Un tel réel x_0 est désormais fixé.

(b) Démontrer qu'on peut trouver $R > 0$ assez grand pour qu'on ait la propriété suivante :

$$R\,y^2 - \|c\|_\infty |y| + 2 > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

On fixe dorénavant une valeur de R vérifiant (3).

(c) On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < |u(x_0)|$ et on introduit la fonction v définie sur $[0,1]$ par

$$v(x) = u(x) + \varepsilon\left(1 - e^{-Rx(1-x)}\right).$$

Démontrer que $v(0) = v(1) = 0$ et que $v(x_0) < 0$.

(d) Démontrer qu'il existe $\tilde{x}$ dans l'intervalle ouvert $]0,1[$ tel que $v(\tilde{x}) = \min_{[0,1]} v$. En conclure que l'on a
$$\partial_x v(\tilde{x}) = 0, \ \text{ et } \ \partial_x^2 v(\tilde{x}) \geq 0.$$

(e) Calculer $\partial_x u$ et $\partial_x^2 u$ en fonction de $\partial_x v$ et $\partial_x^2 v$. En déduire que
$$\partial_x u(\tilde{x}) = -\varepsilon R(1-2\tilde{x})e^{-R\tilde{x}(1-\tilde{x})},$$
$$\partial_x^2 u(\tilde{x}) \geq \varepsilon R\Big(2 + R(1-2\tilde{x})^2\Big)e^{-R\tilde{x}(1-\tilde{x})}.$$

(f) Démontrer que
$$f(\tilde{x}) \leq -\varepsilon R\Big(R(1-2\tilde{x})^2 - \|c\|_\infty |1-2\tilde{x}| + 2\Big)e^{-R\tilde{x}(1-\tilde{x})},$$
et en déduire que $f(\tilde{x}) < 0$. Conclure.

Partie 3 : Schéma aux différences finies

On suppose dans cette partie que la fonction c est **positive**.

On souhaite approcher la solution du problème (1) à l'aide d'une méthode de différences finies. On se donne un maillage **uniforme** du segment $[0,1]$ constitué des points uniformément espacés $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$, avec $\Delta x = 1/(N+1)$. On propose le schéma suivant
$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c(x_i)\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} = f(x_i), \tag{4}$$
où on a posé $u_0 = u_{N+1} = 0$ pour prendre en compte les conditions aux limites du problème.

(a) Montrer que le schéma (4) peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire $AU = F$, où A est une matrice carrée de taille $N \times N$ et $U = (u_i)_{1\leq i\leq N}$. On écrira précisément la matrice A et le second membre F.

(b) La matrice A est-elle symétrique ? Que pouvez-vous dire de la structure de A ?

(c) Enoncer et démontrer le principe du maximum discret pour la matrice A. En déduire que A est inversible.

(d) Définir l'erreur de consistance $R = (R_i)_{1\leq i\leq N}$ associée à ce schéma numérique et à une solution u de classe $\mathcal{C}^3$ du problème (1). Montrer qu'il existe $M > 0$ ne dépendant que de c telle que
$$\|R\|_\infty = \sup_i |R_i| \leq M\Delta x(\|u''\|_\infty + \|u'''\|_\infty).$$

(e) Soit $\tilde{u}$ l'unique solution du problème (1) pour la donnée f définie par $f(x) = 1$, pour tout $x \in [0,1]$.

i. Montrer que $\tilde{u}$ est de classe $\mathcal{C}^3$.

ii. On note $\tilde{U} = (\tilde{u}(x_i))_{1\leq i\leq N}$ et $\tilde{R} \in \mathbb{R}^N$ l'erreur de consistance du schéma (4) pour la solution $\tilde{u}$. On note D le vecteur de $\mathbb{R}^N$ dont toutes les composantes valent 1.

A. Exprimer $A\tilde{U}$ en fonction de $\tilde{R}$ et D.

B. En déduire que si on pose
$$\delta = \frac{1}{2M(\|\tilde{u}''\|_\infty + \|\tilde{u}'''\|_\infty)},$$
alors on a la propriété suivante :
$$\text{si } \Delta x \leq \delta, \text{ on a } \ A\tilde{U} \geq \frac{1}{2}D.$$

(f) Montrer que, dès que $\Delta x \leq \delta$, on a

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq 2\|\tilde{u}\|_{L^\infty}.$$

Comment s'appelle cette propriété du schéma numérique ?

(g) Soit f un terme source continu quelconque et u la solution de (1) associée. On note $\bar{U} = (u(x_i))_{1\leq i\leq N}$, U la solution du schéma (4) et $E = \bar{U} - U$, l'erreur d'approximation. Montrer que si u est de classe $\mathcal{C}^3$, et si $\Delta x \leq \delta$ on a l'estimation

$$\|E\|_\infty \leq \tilde{M}\Delta x(\|u''\|_{L^\infty} + \|u'''\|_{L^\infty}),$$

où $\tilde{M} > 0$ est une constante qui de ne dépend ni de u ni de Δx.

(h) Quel schéma proposeriez-vous dans le cas où c est négative ? On se contentera d'une réponse précise et concise.

Exercice 2

Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 0$. On s'intéresse dans cette question au problème **non-linéaire** suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + c(x)\partial_x u = g(u), & \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5}$$

où $c : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction bornée et de classe $\mathcal{C}^1$ et u_0 une donnée initiale régulière à support compact.

1. Rappeler la définition des courbes caractéristiques $t \mapsto X(t, t_0, x_0)$ associées à ce problème et expliquer rapidement pourquoi elles sont globalement bien définies, c'est-à-dire pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et u une fonction régulière. Montrer que u est solution de (5) si et seulement si, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(t, X(t, 0, x_0))$, vérifie un problème de Cauchy du type

$$\begin{cases} y' = g(y), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{6}$$

pour lequel on précisera la valeur de y_0 en fonction des données du problème.
3. Quelle est la solution du problème (6) quand $y_0 = 0$? Même question avec $y_0 = 1$.
4. Montrer que si $y_0 \in]0, 1[$, alors le problème (6) admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et que celle-ci vérifie $0 < y(t) < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
5. En déduire que si la donnée initiale u_0 vérifie $0 \leq u_0(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors le problème (5) admet une unique solution régulière qui vérifie de plus

$$0 \leq u(t,x) \leq 1, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

Dans tout l'exercice on notera $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^N$ et $\|\cdot\|_\infty$ la norme matricielle définie par $\|M\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} \dfrac{\|Mx\|_\infty}{\|x\|_\infty}$.

Partie 1 : Un schéma éléments finis pour un problème elliptique

Soit $I =]0,1[$ et $\tau > 0$ donné. Pour toute fonction $f \in L^2(I)$, on s'intéresse au problème suivant

$$\begin{cases} -\tau\partial_x^2 u + u = f, & \text{dans }]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

(a) Démontrer qu'il existe une unique fonction $u \in H_0^1(I)$ qui vérifie

$$\tau \int_I \nabla u \nabla v \, dx + \int_I uv \, dx = \int_I fv \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(I). \tag{8}$$

On rappelle que pour un élément v de $H_0^1(I)$, la notation ∇v désigne la dérivée faible de v.

(b) On suppose que la solution u de (8) est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. Démontrer que u est alors solution, au sens classique, du problème (7).

(c) On se donne maintenant un maillage uniforme de l'intervalle I, constitué des points $0 = x_0 < \cdots < x_{N+1} = 1$, avec un pas d'espace $\Delta x = \frac{1}{N+1}$. On rappelle la définition des fonctions "chapeaux" vues en TD :
- Pour tout $i \in \{0, \cdots, N+1\}$, φ_i est continue sur $[0,1]$, affine sur chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, $j \in \{0, ..., N\}$.
- Pour tout $i \in \{0, \cdots, N+1\}$ on a

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall j \in \{0, \ldots, N+1\}.$$

On introduit l'espace $V_N = \text{Vect}\left((\varphi_i)_{1 \le i \le N}\right)$. Démontrer que V_N est un sous-espace de $H_0^1(I)$ de dimension N dont $(\varphi_i)_{1 \le i \le N}$ est une base.

(d) Montrer qu'il existe une unique fonction $u_N \in V_N$ qui vérifie le problème approché suivant

$$\tau \int_I \nabla u_N \nabla v_N \, dx + \int_I u_N v_N \, dx = \int_I f v_N \, dx, \quad \forall v_N \in V_N. \tag{9}$$

(e) En écrivant la solution u_N du problème (9) dans la base des $(\varphi_i)_i$, montrer que le problème (9) est équivalent à un système linéaire de dimension N de la forme

$$(\tau A + M)U = F,$$

pour lequel on écrira explicitement la définition de U, du second membre F et des matrices A et M. On pourra vérifier en particulier que $A = \Delta x \tilde{A}$ où $\tilde{A}$ est la *matrice du Laplacien* que l'on a étudiée en cours.

(f) En utilisant (sans les redémontrer) les propriétés de $\tilde{A}$ établies en cours, montrer que A est symétrique définie positive et vérifie $A^{-1} \ge 0$ et $\|A^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{8\Delta x}$.

(g) Vérifier que $M \ge 0$. Soit alors $v \in V_N$ et $V \in \mathbb{R}^N$ le vecteur des coordonnées de v dans la base $(\varphi_i)_{1 \le i \le N}$. Que représente la quantité (MV, V) pour la fonction v ? En déduire que M est symétrique définie positive.

(h) Soit W un vecteur de $\mathbb{R}^N$ tel que $W \ge 0$ et tel que MW a toutes ses coordonnées nulles sauf éventuellement une. Démontrer que $W = 0$. En déduire que toutes les colonnes de M^{-1} contiennent au moins un coefficient strictement négatif et un coefficient strictement positif.

Que peut-on en conclure pour la matrice $(\tau A + M)^{-1}$ si $\tau > 0$ est petit ?

(i) Montrer que l'on peut écrire

$$\tau A + M = \alpha A + \beta \text{Id},$$

où α et β sont deux coefficients qui dépendent de τ et Δx et qu'on calculera explicitement.

Vérifier que si $\tau \ge \frac{\Delta x^2}{6}$, alors α et β sont positifs. En déduire que, sous cette condition, la matrice $\tau A + M$ vérifie le principe du maximum discret.

Partie 2 : Résolution d'un problème parabolique du type "équation de la chaleur"
On s'intéresse dans cette partie à l'étude du problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u - \alpha u = 0, \ \ \forall t > 0, \forall x \in]0,1[, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \ \ \forall t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \ \ \forall x \in]0,1[, \end{cases} \tag{10}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un coefficient réel fixé et u_0 une donnée initiale suffisament régulière.
On admet que, comme le problème de la chaleur étudié en cours, ce problème (10) admet une unique solution u régulière sur $]0,+\infty[\times]0,1[$, pour toute donnée initiale u_0 convenable.

(a) Calculer explicitement la solution u dans le cas où la donnée initiale est $u_0(x) = \sin(\pi x)$. On pourra chercher u sous une forme particulière bien choisie.
Discuter le comportement qualitatif de cette solution quand t tend vers l'infini, en fonction de la valeur de α.

(b) Si u_0 est une donnée initiale régulière quelconque, démontrer que la solution u du problème (10) vérifie
$$\forall t \geq 0, \quad \|u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leq e^{2\alpha t}\|u_0\|_{L^2}^2,$$
où on a noté $\|w\|_{L^2} = \left(\int_0^1 w(x)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$, pour toute fonction w définie sur $[0,1]$.

On suppose à partir de maintenant que $\alpha > 0$.
En reprenant les notations de la Partie 1 concernant la discrétisation en espace du problème, on envisage maintenant le schéma numérique suivant pour trouver une approximation de u.

$$\begin{cases} M\dfrac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} + AU^{n+1} - \alpha M U^n = 0, \ \forall n \geq 0, \\ U^0 = (u_0(x_i))_{1\leq i \leq N}. \end{cases} \tag{11}$$

(c) Ecrire le schéma (11) sous la forme $BU^{n+1} = CU^n$ où B et C sont deux matrices que l'on précisera. En déduire que le schéma (11) définit bien la suite $(U^n)_n$ de façon unique.

(d) Démontrer que pour tout $n \geq 0$, on a
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(MU^{n+1}, U^{n+1}) - \frac{1}{2}(MU^n, U^n) + \frac{1}{2}(M(U^{n+1}-U^n), U^{n+1}-U^n) \\ \leq \alpha\Delta t(MU^n, U^n) + \alpha\Delta t(MU^n, U^{n+1}-U^n).\end{aligned}$$

(e) Démontrer que pour tous vecteurs $V, W \in \mathbb{R}^N$, et tout $\beta > 0$, on a
$$(MV, W) \leq \sqrt{(MV,V)}\sqrt{(MW,W)} \leq \frac{\beta}{2}(MV,V) + \frac{1}{2\beta}(MW,W).$$

(f) Montrer que la suite $(U^n)_n$ solution de (11) vérifie
$$(MU^{n+1}, U^{n+1}) \leq \left(1 + 2\alpha\Delta t + \alpha^2\Delta t^2\right)(MU^n, U^n), \ \ \forall n \geq 0.$$

(g) Démontrer finalement qu'on a, pour tout temps final $T > 0$:
$$\sup_{n \leq \frac{T}{\Delta t}} (MU^n, U^n) \leq e^{2\alpha T}(MU^0, U^0). \tag{12}$$

(h) Comment interprétez-vous cette propriété (12) ? On pourra se référer à la question 1-g).

(i) A votre avis, comment doit-on modifier le schéma dans le cas où $\alpha < 0$? Une réponse concise et brièvement argumentée est attendue, sans calculs supplémentaires.