Analyse Numérique - Correction de l'examen du Mardi 8 Janvier 2008

Exercice 1

1. On obtient après un calcul immédiat :

$$\alpha = \frac{k}{\Delta x^2} - \frac{1}{2\Delta x}, \quad \beta = \frac{k}{\Delta x^2} + \frac{1}{2\Delta x}.$$

   Comme k et Δx sont positifs, il est clair que $|\alpha| \leq \beta$ et que l'égalité ne peut avoir lieu ...

2. La matrice A est tridiagonale de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & -\alpha & 0 \\ -\beta & \alpha+\beta & -\alpha \\ 0 & -\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}.$$

   La structure tridiagonale permet en pratique d'utiliser la commande `sparse` de MATLAB, ce qui permet un gain en place mémoire et une accélération du calcul de la solution du système linéaire associé à A.

3. La matrice A n'est pas symétrique car $\alpha \neq \beta$. Néanmoins nous avons

$$\begin{aligned}
(AU, U) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha(u_i - u_{i+1})u_i + \beta(u_i - u_{i-1})u_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \alpha(u_i - u_{i+1})u_i + \beta(u_{i+1} - u_i)u_{i+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} \alpha\left(u_i^2 - u_{i+1}^2 + (u_i - u_{i+1})^2\right) + \beta\left(u_{i+1}^2 - u_i^2 + (u_{i+1} - u_i)^2\right) \\
&= \frac{\alpha+\beta}{2}\sum_{i=0}^{n}(u_i - u_{i+1})^2 = k\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}\right)^2.
\end{aligned}$$

   Si $AU = 0$, on a $(AU, U) = 0$ et donc $u_i = u_{i+1}$ pour tout i, ce qui implique $U = 0$ car $u_0 = 0$.

4. Le principe du maximum discret pour la matrice A dit que si v et b sont tels que $Av = b$ et $b \geq 0$, alors $v \geq 0$.

   Si α et β sont positifs, on peut refaire exactement la même démonstration que dans le cours. La condition sur k et Δx est donc

$$\Delta x < 2k.$$

5. On suppose $\alpha < 0$.
   (a) Supposons qu'il existe i tel que $v_i \neq 0$. Choisissons le plus petit i_0 vérifiant $v_{i_0} \neq 0$. Par hypothèse, on a nécessairement $i_0 \geq 2$. Regardons l'équation numéro $i_0 - 1$ du système linéaire $Av = b$:
   $$\alpha(v_{i_0-1} - v_{i_0}) + \beta(v_{i_0-1} - v_{i_0-2}) = b_{i_0-1} = 0,$$
   car $i_0 - 1 \leq n - 1$. Dans cette équation $v_{i_0-1} = v_{i_0-2} = 0$ par définition de i_O, ce qui implique $v_{i_0} = 0$ et qui contredit la définition de i_0.
   (b) Regardons l'équation numéro 1 du système linéaire $Av = b$, on trouve
   $$\alpha(v_1 - v_2) + \beta(v_1 - \underbrace{v_0}_{=0}) = 0.$$
   On obtient
   $$v_2 = \frac{\alpha+\beta}{\alpha} v_1.$$
   Le coefficient $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ est strictement négatif ce qui implique que v_2 est non nul et de signe différent de v_1.
   En conséquence, le vecteur v ne peut pas être positif car soit v_1 soit v_2 est strictement négatif.
6. C'est un calcul de développement de Taylor standard. On obtient que le schéma est d'ordre 2.
7. D'après la question précédente, le schéma est exact pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Donc le vecteur AV est donné par les valeurs aux points x_i de la fonction f définie par
   $$f(x) = -k\partial_x^2(x(1-x)) + \partial_x(x(1-x)) = 2k + (1-2x),$$
   on trouve donc
   $$AV = (2k + (1-2x_i))_{1 \leq i \leq n},$$
   et il vient immédiatement que
   $$AV \geq (2k-1)D.$$

8. Si $k > \frac{1}{2}$, la condition $\Delta x < 2k$ est toujours vérifiée, donc le schéma vérifie le principe du maximum discret. Soit $F \in \mathbb{R}^m$, nous avons

$$-\|F\|_\infty D \leq F \leq \|F\|_\infty D,$$

d'où

$$-\|F\|_\infty A^{-1} D \leq A^{-1} F \leq \|F\|_\infty A^{-1} D,$$

mais on a vu plus haut que

$$A^{-1} D \leq \frac{1}{2k-1} V,$$

d'où

$$A^{-1} D \leq \frac{\|V\|_\infty}{2k-1} = \frac{1}{4(2k-1)}.$$

D'où le résultat.

9. Le résultat d'estimation d'erreur est le suivant : si on note U la solution approchée et $\overline{U}$ la solution exacte et $E = \overline{U} - U$, on a

$$\|E\|_\infty \leq C \Delta x^2,$$

où C ne dépend que de u et de k.
La preuve est la suivante : on a $AE = A\overline{U} - AU = A\overline{U} - F = R$, d'où

$$\|E\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|R\|_\infty \leq C \Delta x^2,$$

d'après l'estimation de l'erreur de consistance.

Exercice 2

1. La symétrie de la matrice de fait aucun doute. Soit $U \in \mathbb{R}^m$, on a

$$\Big((\,\mathrm{Id} + \tau\theta A)U, U \Big) = \|U\|^2 + \underbrace{\tau\theta(AU,U)}_{\geq 0} \geq \|U\|^2,$$

   ce qui prouve bien qu'elle est définie positive. En particulier elle est inversible et la suite $(U^n)_n$ est donc bien définie.

2. On prend le produit scalaire de l'équation au rang n par le vecteur $\theta U^{n+1} + (1 - \theta)U^n$ pour faire apparaître le terme dissipatif. Il reste à calculer la quantité suivante

$$\begin{aligned}(U^{n+1} - U^n, \theta U^{n+1} + (1-\theta)U^n) &= \theta(U^{n+1} - U^n, U^{n+1}) + (1-\theta)(U^{n+1} - U^n, U^n) \\ &= \theta\left(\frac{1}{2}\|U^{n+1}\|^2 - \frac{1}{2}\|U^n\|^2 + \frac{1}{2}\|U^{n+1} - U^n\|^2\right) \\ &\quad + (1-\theta)\left(\frac{1}{2}\|U^{n+1}\|^2 - \frac{1}{2}\|U^n\|^2 - \frac{1}{2}\|U^{n+1} - U^n\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\|U^{n+1}\|^2 - \frac{1}{2}\|U^n\|^2 + (\theta - \frac{1}{2})\|U^{n+1} - U^n\|^2.\end{aligned}$$

3. Si $\theta \geq \frac{1}{2}$, les deux derniers termes de l'inégalité obtenues à la question précédente sont positifs. On a donc $\|U^{n+1}\| \leq \|U^n\|$, ce qui montre que la norme de U^n décroit, d'où le résultat.

4. On suppose $\theta < \frac{1}{2}$.

   (a) On écrit V dans la base (orthonormale !) des vecteurs propres (ψ_i) de A

$$V = \sum_{i=1}^m v_i \psi_i.$$

   Il vient

$$AV = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \psi_i,$$

   et donc

$$\|AV\|^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 v_i^2 \leq \rho(A) \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i^2 = \rho(A)(AV, V).$$

(b) Revenons à l'inégalité de stabilité, on pose $V^n = \theta U^{n+1} + (1-\theta)U^n$, et on a par définition du schéma

$$\|U^{n+1} - U^n\|^2 = \tau^2 \|AV^n\|^2 \leq \tau^2 \rho(A)(AV^n, V^n),$$

de sorte que

$$(\frac{1}{2} - \theta)\|U^{n+1} - U^n\|^2 \leq \tau^2 \rho(A)(\frac{1}{2} - \theta)(AV^n, V^n).$$

Ainsi, sous la condition $\tau \leq \frac{1}{\rho(A)(\frac{1}{2}-\theta)}$ on a

$$(\frac{1}{2} - \theta)\|U^{n+1} - U^n\|^2 \leq \tau(AV^n, V^n),$$

et donc la décroissance de la norme L^2 est encore vérifiée.

5. On a

$$(AU, U) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}\right)^2 \leq \frac{2}{\Delta x^2} \sum_{i=0}^{n} (u_i^2 + u_{i+1}^2) \leq \frac{4}{\Delta x^2}\|U\|^2.$$

Si on applique cela à un vecteur propre U associé à la valeur propre $\rho(A)$, on trouve

$$\rho(A)\|U^2\| \leq \frac{4}{\Delta x^2}\|U\|^2,$$

d'où le résultat.
La condition de stabilité s'écrit donc

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2 - 4\theta}.$$

Exercice 3

1. D'après la propriété admise dans l'énoncé, le produit uv est dans $H^1(I)$. De plus, comme $u \in H_0^1$ on a $u(0) = u(1) = 0$ et donc $uv(0) = uv(1) = 0$, donc $uv \in H_0^1(I)$.
   D'après la propriété vue en cours, nous avons donc pour tout $x \in [0, 1]$

   $$uv(x) = uv(0) + \int_0^x \nabla(uv)(t)\, dt,$$

   en prenant $x = 1$, on obtient

   $$0 = 0 + \int_0^1 \nabla(uv)(t)\, dt,$$

   soit en utilisant la propriété admise dans l'énoncé :

   $$0 = \int_0^1 u\nabla v\, dx + \int_0^1 v\nabla u\, dx.$$

2. (a) Le fait que a soit bilinéaire est trivial, de même que la linéarité de L.
   Pour tous $u, v \in H^1(I)$, on a les inégalités suivantes :

   $$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + \|c\|_\infty\|\nabla u\|_{L^2}\|v\|_{L^2},$$

   et d'après l'inégalité de Poincaré, on a

   $$|a(u, v)| \leq C\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1},$$

   ce qui montre la continuité de a. De plus, on a

   $$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}\|v\|_{H_0^1},$$

   ce qui montre la continuité de L.

   (b) Pour calculer $a(u, u)$, il n'y a rien à faire pour le premier terme. Occupons nous du second :

   $$\int_0^1 c(x)(\nabla u)u\, dx = \int_0^1 \frac{c(x)}{2}\nabla(u^2)\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 c'(x)u^2\, dx.$$

   (c) Si c est décroissante, le second terme dans $a(u, u)$ est positif et on a donc

   $$a(u, u) \geq \|\nabla u\|^2,$$

   ce qui prouve la coercivité de a. D'après le théorème de Lax-Milgram, on obtient l'existence et l'unicité de la solution du problème.

   (d) En utilisant l'inégalité de Poincaré, on peut contrôler le second terme par le premier et donc on a encore la coercivité de la forme bilinéaire a et le th. de Lax-Milgram s'applique à nouveau.