Master $1^{ère}$ année de Mathématiques

CMI, Université de Provence
Année 2007-2008

Analyse Numérique - Examen du Mardi 8 Janvier 2008

Aucun document autorisé - Durée : 3h

N.B. : Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans le désordre !

Exercice 1

On s'intéresse à la discrétisation par différences finies du problème suivant (où $k > 0$ est un réel fixé) :

$$\begin{cases} -k\partial_x^2 u + \partial_x u = f(x), \quad \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

On se donne un maillage uniforme de $[0,1]$ défini par les points $x_i = i\Delta x$ pour tout $0 \leq i \leq n+1$ et $\Delta x = \frac{1}{n+1}$ (avec $n \geq 2$). On se propose d'étudier le schéma suivant :

$$\begin{cases} -k\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = f_i, \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \\ u_0 = u_{n+1} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

où on a posé $f_i = f(x_i)$.

1. Ecrire le schéma (2) sous la forme

$$\alpha(u_i - u_{i+1}) + \beta(u_i - u_{i-1}) = f_i, \ \ \forall i \in \{1, \cdots, n\},$$

   où α et β sont deux coefficients à déterminer. Démontrer que $|\alpha| < \beta$.

2. On regarde le schéma (2) comme un système linéaire de la forme $AU = F$ où $U = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ et $F = (f_i)_{1\leq i\leq n}$. Donner explicitement la matrice A en fonction de α et β. Cette matrice a-t'elle une structure particulière et si oui quels avantages peut-on en tirer d'un point de vue pratique ?

3. La matrice A est-elle symétrique ? Pour tout vecteur $U = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{R}^n$, démontrer que

$$(AU, U) = k\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}\right)^2,$$

   où $u_0 = u_{n+1} = 0$. En déduire que la matrice A est inversible.

4. Enoncer le *principe du maximum discret* pour la matrice A. Démontrer que ce principe est vérifié si α est strictement positif (ce qui implique que $\beta > 0$).

5. On s'intéresse dans cette question au cas où $\alpha = 0$. Quelle est la forme de la matrice A dans ce cas particulier ? Calculer explicitement A^{-1} et vérifier que le principe du maximum discret est encore vrai dans ce cas.

6. On suppose maintenant que $\alpha < 0$. On va montrer que le principe du maximum discret n'est plus vérifié.

   Pour cela, on considère le vecteur b de $\mathbb{R}^n$ défini par

   $$b_i = 0, \ \ \forall i \in \{1, \cdots, n-1\}, \ \text{ et } \ b_n = 1,$$

   et on note v l'unique solution de $Av = b$. On rappelle que l'on pose toujours $v_0 = v_{n+1} = 0$.

   (a) Démontrer que si $v_1 = 0$, alors $v_i = 0$ pour tout $i \leq n$, en déduire que l'on a nécessairement $v_1 \neq 0$.

   (b) Calculer v_2 en fonction de v_1, de α et de β. En déduire que v_2 est non nul et de signe différent de v_1. Conclure.

7. Déduire des questions 4, 5 et 6 une condition liant k et Δx qui soit nécessaire et suffisante pour assurer le principe du maximum discret pour le schéma (2).

8. En supposant la solution exacte u du problème (1) suffisament régulière, définir pour tout $1 \leq i \leq n$ l'erreur de consistance R_i associée à ce schéma au point x_i. Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de Δx telle que

   $$\|R\|_\infty \leq C\Delta x^2 \left(\sup_{[0,1]} |u^{(3)}| + \sup_{[0,1]} |u^{(4)}| \right).$$

9. On pose $v_i = x_i(1 - x_i)$ pour tout $i \in \{0, \cdots, n+1\}$ et on note $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Donner, quasiment sans calcul, la valeur du vecteur $AV \in \mathbb{R}^n$ et démontrer que l'on a l'inégalité suivante (composante par composante) :

   $$AV \geq (2k - 1)D,$$

   où $D \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1.

10. On suppose que $k > \frac{1}{2}$. Vérifier qu'on est bien dans un cas où le schéma (2) satisfait le principe du maximum discret pour tout choix du nombre n de points de discrétisation. En déduire que dans ce cas, on a

    $$A^{-1}D \leq \frac{1}{2k-1} V.$$

    En conclure que le schéma proposé, dans ces conditions, est L^∞-stable et plus précisément que l'on a :

    $$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{4(2k-1)}.$$

11. Enoncer et démontrer une estimation d'erreur en norme L^∞ pour ce schéma.

Exercice 2

Soient $m \geq 1$ et A une matrice carrée de taille m symétrique définie positive. On se donne un paramètre $\theta \in [0,1]$, un autre paramètre $\tau > 0$ et $U^0 \in \mathbb{R}^m$. On considère la suite $(U^n)_n$ de vecteurs de $\mathbb{R}^m$ définie par :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + A(\theta U^{n+1} + (1-\theta)U^n) = 0, \ \ \forall n \geq 0.$$

1. Démontrer que la matrice $\mathrm{Id} + \tau\theta A$ est symétrique définie positive. En déduire que la suite $(U^n)_n$ est bien définie.
2. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne naturelle de $\mathbb{R}^m$. Démontrer la relation suivante :

$$\frac{1}{2}\|U^{n+1}\|^2 - \frac{1}{2}\|U^n\|^2 + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)\|U^{n+1} - U^n\|^2 \\ + \tau\Big(A(\theta U^{n+1} + (1-\theta)U^n), \theta U^{n+1} + (1-\theta)U^n\Big) = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

3. En déduire que si $\theta \geq \frac{1}{2}$, on a la propriété de stabilité suivante pour toute valeur du paramètre $\tau > 0$:
$$\|U^n\| \leq \|U^0\|, \ \ \forall n \geq 0. \tag{3}$$
4. On suppose maintenant que $\theta \in [0, \frac{1}{2}[$. On note $\rho(A)$ le rayon spectral de A (c'est-à-dire sa plus grande valeur propre, car A est sym. définie positive).
   (a) Démontrer que
   $$\|AV\|^2 \leq \rho(A)(AV, V), \ \ \forall V \in \mathbb{R}^m.$$
   (b) En déduire que la propriété de stabilité (3) est encore vérifiée sous la condition
   $$\tau \leq \frac{1}{(1/2 - \theta)\rho(A)}. \tag{4}$$
5. **Application :** On applique les résultats précédents, à la résolution numérique de l'équation de la chaleur. Le paramètre τ n'est autre que le pas de temps Δt et la matrice A la matrice du laplacien
$$A = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$
   où Δx est le pas d'espace de la discrétisation choisie.

On rappelle que A vérifie

$$(AU,U)=\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}\right)^2,\quad \forall U\in\mathbb{R}^m$$

où on a posé $u_0=u_{m+1}=0$, par convention. Démontrer que

$$(AU,U)\leq\frac{4}{\Delta x^2}\|U\|^2,\quad \forall U\in\mathbb{R}^m,$$

et en déduire que

$$\rho(A)\leq\frac{4}{\Delta x^2}.$$

Comment s'écrit donc la condition de stabilité (4) dans ce contexte en fonction de Δt et Δx ?

Exercice 3

Dans tout l'exercice, on note $I=]0,1[$ et on **admet** la propriété ($\mathcal{A}$) suivante :

$$\boxed{\text{Pour tous } u,v\in H^1(I)\text{, on a } uv\in H^1(I),\ \text{ et }\ \nabla(uv)=(\nabla u)v+u(\nabla v).}\qquad (\mathcal{A})$$

1. Démontrer que, pour tout $u\in H_0^1(I)$ et tout $v\in H^1(I)$ on a

$$\int_0^1(\nabla u)v\,dx=-\int_0^1 u(\nabla v)\,dx.$$

   Quel nom peut-on donner à cette formule ?

2. Soit $c:\overline{I}\mapsto\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $f\in L^2(I)$. On s'intéresse au problème elliptique suivant

$$\begin{cases}-\partial_x^2 u+c(x)\partial_x u=f(x),\\ \quad u(0)=u(1)=0.\end{cases}\qquad (5)$$

   On propose la formulation variationnelle suivante de ce problème

$$\text{Trouver } u\in H_0^1(I)\text{, tel que } a(u,v)=L(v),\ \forall v\in H_0^1(I),\qquad (\mathcal{P})$$

   où a et L sont des applications définies par

$$a(u,v)=\int_I\nabla u\,\nabla v\,dx+\int_I c(x)(\nabla u)v\,dx,\ \ \forall u,v\in H_0^1(I),$$

$$L(v)=\int_I fv\,dx,\ \ \forall v\in H_0^1(I).$$

   (a) Démontrer que a est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(I)$ et que L est une forme linéaire continue sur $H_0^1(I)$.

(b) Démontrer que pour tout $u \in H_0^1(I)$ on a

$$a(u,u) = \int_I |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_I c'(x) u^2 \, dx.$$

(c) En déduire que, si c est une fonction décroissante, le problème $(\mathcal{P})$ admet une unique solution.

(d) On suppose maintenant que c n'est pas nécessairement décroissante. Montrer que si on a

$$\sup_{x \in [0,1]} c'(x) < 2,$$

alors le problème $(\mathcal{P})$ admet aussi une unique solution.