Examen final - Corrigé

le 26 Mai 2014, durée 1h30, sans document ni calculatrice

Exercice 1. Questions de cours et d'application immédiate du cours

1. Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^d$ est compact si, de **toute** suite $(x_n)_n$ d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite $(x_{\phi(n)})_n$ qui converge **dans** K.
   On peut aussi caractériser les compacts de $\mathbb{R}^d$ en disant que ce sont les ensembles qui sont à la fois fermés et bornés.
2. (a) $K \cap F$ est un sous-ensemble de K qui est borné (car compact) donc $K \cap F$ est borné. Par ailleurs K et F sont tous les deux fermés, donc leur intersection est également fermée.
   Ainsi, $K \cap F$ est à la fois fermé et borné donc compact.

   (b) Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $K + F$ qui converge vers un certain $x \in \mathbb{R}^d$. Il faut montrer que $x \in K + F$.
   On peut, par définition, écrire
   $$x_n = y_n + z_n, \quad \forall n \geq 0,$$
   avec $y_n \in K$ et $z_n \in F$.
   La suite $(y_n)_n$ est une sous-suite du compact K, on peut donc en extraire une sous-suite $(y_{\phi(n)})_n$ qui converge vers un certain $y \in K$. On a alors
   $$z_{\phi(n)} = x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x - y,$$
   ce qui montre que $(z_{\phi(n)})_n$ est une suite convergente d'éléments de F. Comme F est fermé, la limite de cette suite est dans F, i.e. $x - y \in F$.
   On a donc bien
   $$x = \underbrace{x - y}_{\in F} + \underbrace{y}_{\in K} \in K + F.$$
3. $\Rightarrow$ Supposons que f est continue. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ quelconque.
   Nous savons que $\overset{\circ}{A} \subset A$, donc on a
   $$f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset f^{-1}(A),$$
   mais par ailleurs, comme f est continue et $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert, le cours nous dit que $f^{-1}(\overset{\circ}{A})$ est ouvert.
   La caractérisation de l'intérieur d'un ensemble nous dit que $\overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(A)}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $f^{-1}(A)$, ce qui nous permet d'affirmer que
   $$f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(A)}} .$$
   $\Leftarrow$ Supposons la propriété sur les images réciproques vérifiée. Pour montrer que f est continue, le cours nous dit qu'il suffit de montrer que pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$, l'ensemble $f^{-1}(U)$ est ouvert.
   On applique donc l'hypothèse avec $A = U$, ce qui donne
   $$f^{-1}\left(\overset{\circ}{U}\right) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(U)}},$$

mais comme U est ouvert, on a $\overset{\circ}{U} = U$ et on a finalement obtenu

$$f^{-1}(U) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(U)}}.$$

Par ailleurs, l'inclusion $\overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(U)}} \subset f^{-1}(U)$ est toujours vraie (l'intérieur d'un ensemble est toujours contenu dans cet ensemble).
Au final, on a donc l'égalité

$$f^{-1}(U) = \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(U)}}.$$

Ceci montre exactement que $f^{-1}(U)$ est ouvert et le résultat est démontré.

Exercice 2. On observe tout d'abord que les deux fonctions proposées sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car elles sont obtenues par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annulle pas. Le seul problème possible est donc à l'origine.

– On observe que le long du chemin continu $\phi(t) = (0,t)$, on a

$$f_1 \circ \phi(t) = f_1(0,t) = \frac{1}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty,$$

ce qui montre que la fonction f_1 n'est pas continue en $(0,0)$ (et ce quelque soit la valeur choisie pour $f_1(0,0)$).

– Cette fois, on va montrer que f_2 est continue en $(0,0)$ en utilisant la majoration simple

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}, \quad \forall x,y \in \mathbb{R},$$

ce qui donne

$$|f_2(x,y) - f_2(0,0)| = |f_2(x,y) - 0| = |f_2(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

On pouvait aussi utiliser l'inégalité de Young

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2),$$

qui permet d'obtenir

$$|f_2(x,y)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Exercice 3. Problème : Inverses de matrices

1. La positivité et l'homogénéité de $|||\cdot|||_\infty$ sont triviales. Par ailleurs si $|||M|||_\infty = 0$, alors nous avons $Mx = 0$ pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^d$. Cela implique bien que M est la matrice nulle (prendre par exemple pour x tous les vecteurs de la base canonique).

   Pour l'inégalité triangulaire, on utilise l'inégalité triangulaire pour la norme infinie, puis la caractérisation de la triple norme

$$\|(M_1+M_2)x\|_\infty \leq \|M_1x\|_\infty + \|M_2x\|_\infty \leq |||M_1|||_\infty\|x\|_\infty + |||M_2|||_\infty\|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Pour x non nul, on divise cette inégalité par la norme de x et on trouve

$$\frac{\|(M_1+M_2)x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq |||M_1|||_\infty + |||M_2|||_\infty.$$

En prenant le sup pour $x \neq 0$, on obtient l'inégalité triangulaire

$$|||M_1+M_2|||_\infty \leq |||M_1|||_\infty + |||M_2|||_\infty.$$

Pour montrer la dernière propriété, on utilise à nouveau la propriété fondamentale des normes induites. Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}\|M_1M_2x\|_\infty &\leq |||M_1|||_\infty \|M_2x\|_\infty \\ &\leq |||M_1|||_\infty |||M_2|||_\infty \|x\|_\infty.\end{aligned}$$

Pour $x \neq 0$, on peut diviser par la norme de x et obtenir

$$\frac{\|M_1M_2x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq |||M_1|||_\infty |||M_2|||_\infty.$$

Si on prend le sup, on obtient la propriété demandée

$$|||M_1M_2|||_\infty \leq |||M_1|||_\infty |||M_2|||_\infty.$$

2. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On suppose que $|||M|||_\infty < 1$. Pour tout $N \geq 1$, on pose

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} M^n.$$

   (a) Un calcul élémentaire montre que

$$S_{N+p} - S_N = \sum_{n=N+1}^{N+p} M^n.$$

   On prend maintenant la norme de cette égalité et on utilise l'inégalité triangulaire

$$|||S_{N+p} - S_N|||_\infty \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} |||M^n|||_\infty.$$

   D'après la question préliminaire la norme d'un produit de matrices est inférieure au produit des normes, ce qui implique (récurrence immédiate sur le nombre de termes) que

$$|||M^n|||_\infty \leq |||M|||_\infty^n.$$

   On a donc bien montré l'inégalité recherchée

$$|||S_{N+p} - S_N|||_\infty \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} |||M|||_\infty^n.$$

(b) Par hypothèse on a $|||M|||_\infty < 1$, ce qui montre que **la série géométrique** $\sum_n |||M|||_\infty^n$ est convergente, en particulier on peut majorer par le reste de la série

$$|||S_{N+p} - S_N|||_\infty \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |||M|||_\infty^n,$$

et le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 quand $N \to \infty$.
Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on peut trouver $N_0 \geq 1$ tel que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |||M|||_\infty^n \leq \varepsilon, \quad \forall N \geq N_0,$$

et donc pour tout $N \geq N_0$ et tout $p \geq 1$, on a

$$|||S_{N+p} - S_N|||_\infty \leq \varepsilon.$$

Ceci exprime exactement que la suite $(S_N)_N$ est de Cauchy dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
On a vu en cours qu'une telle suite est nécessairement convergente, on peut donc à bon droit noter S sa limite.

(c) Il s'agit ici d'une somme télescopique classique

$$(I - M)S_N = \sum_{n=0}^{N} M^n - M\sum_{n=0}^{N} M^n = \sum_{n=0}^{N} M^n - \sum_{n=1}^{N+1} M^n = I - M^{N+1}.$$

(d) Dans l'égalité de la question précédente, on sait déjà que $(S_N)_N$ converge vers une matrice S. Par ailleurs, comme $|||M|||_\infty < 1$, nous avons

$$|||M^{N+1}|||_\infty \leq |||M|||_\infty^{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

(on a même vu que c'est le terme général d'une série convergente).
On peut donc passer à la limite dans l'égalité matricielle de la question précédente et conclure que

$$(I - M)S = I.$$

Ceci démontre bien que $I - M$ est inversible et que son inverse est S.

(e) Pour tout $N \geq 1$, on a déjà vu que

$$|||S_N|||_\infty \leq \sum_{n=0}^{N} |||M|||^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |||M|||_\infty^n = \frac{1}{1 - |||M|||_\infty}.$$

Ceci étant vrai pour tout N, on peut passer à la limite et obtenir

$$|||S|||_\infty \leq \frac{1}{1 - |||M|||_\infty},$$

ce qui donne le résultat vu que $S = (I - M)^{-1}$.
On effectue le même calcul avec $S_N - I$, ce qui ne fait qu'enlever le premier terme (celui de rang $n = 0$) de la série géométrique

$$|||S_N - I|||_\infty \leq \sum_{n=1}^{N} |||M|||^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |||M|||_\infty^n = \frac{|||M|||_\infty}{1 - |||M|||_\infty}.$$

On conclut à nouveau par passage à la limite.

3. (a) Comme A est inversible, on peut écrire

$$A + H = A(I + A^{-1}H),$$

et on aura bien montré le résultat si on montre que $I + A^{-1}H$ est inversible. On va donc essayer d'appliquer ce qui précède à $M = -A^{-1}H$. Il nous faut pour cela vérifier que la norme de M est strictement inférieure à 1. D'après la propriété de la norme vue en préliminaire, nous avons

$$|||M|||_\infty = ||| - A^{-1}H|||_\infty \leq |||A^{-1}|||_\infty |||H|||_\infty,$$

et l'hypothèse sur $|||H|||_\infty$ nous dit exactement que cette quantité est strictement inférieure à 1. Ceci montre que $(I + A^{-1}H)$ est inversible et donc que $A + H$ est inversible.
De plus, on a

$$(A + H)^{-1} = (I + A^{-1}H)^{-1}A^{-1},$$

et on peut donc estimer la norme en utilisant la question 2.e) par

$$\begin{aligned}|||(A + H)^{-1} - A^{-1}|||_\infty &\leq |||(I + A^{-1}H)^{-1} - I|||_\infty |||A^{-1}|||_\infty,\\ &\leq \frac{|||A^{-1}H|||_\infty}{1 - |||A^{-1}H|||_\infty} |||A^{-1}|||_\infty\\ &\leq \frac{|||A^{-1}|||_\infty^2}{1 - |||A^{-1}|||_\infty |||H|||_\infty} |||H|||_\infty.\end{aligned}$$

(b) La question précédente montre que pour toute matrice $A \in GL_d(\mathbb{R})$, la boule ouverte

$$B_{|||\cdot|||_\infty}\left(A, \frac{1}{|||A^{-1}|||_\infty}\right)$$

est contenue dans $GL_d(\mathbb{R})$.
Cela montre bien que $GL_d(\mathbb{R})$ est ouvert.

(c) Toujours grâce à la question 3.a), nous avons l'estimation

$$|||\Phi(A + H) - \Phi(A)|||_\infty \leq \frac{|||A^{-1}|||_\infty^2}{1 - |||A^{-1}|||_\infty |||H|||_\infty} |||H|||_\infty \xrightarrow[|||H|||\to 0]{} 0,$$

qui montre bien que Φ est continue en A, pour toute matrice $A \in GL_d(\mathbb{R})$.