

Devoir surveillé - corrigé

Exercice 1. Questions de cours

1. Voir le cours.
2. Voir le cours.
3. Voir le cours.

Exercice 2. 1.

2. On constate que

$$N(x) = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_2 + |x_3|,$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme 2 sur $\mathbb{R}^2$.

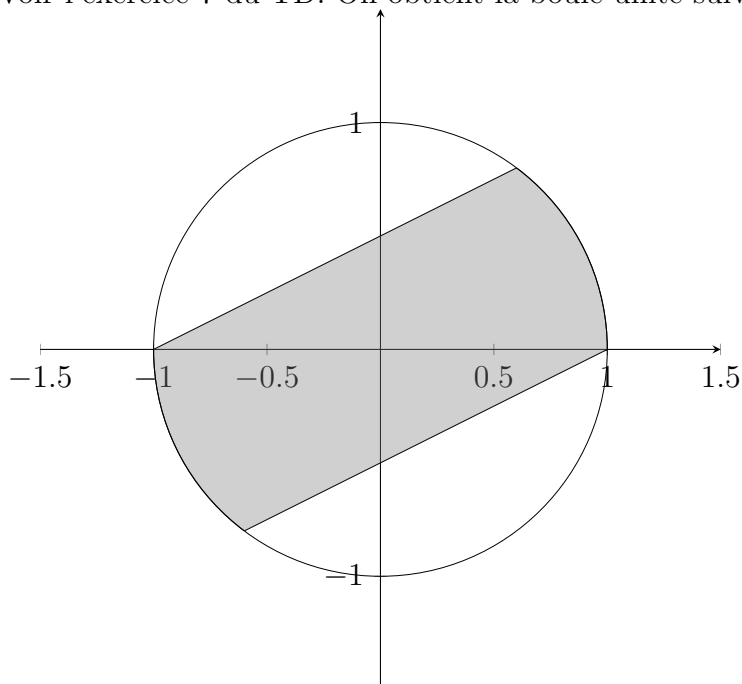
Il s'agit clairement d'une fonction positive et homogène. De plus, si $N(x) = 0$, chacun des deux termes de N est donc nul, ce qui montre d'une part que x_3 et d'autre part que $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Enfin, on vérifie l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} N(x+y) &= \left\| \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \right\|_2 + |x_3 + y_3|, \\ &= \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_2 + |x_3 + y_3|, \\ &\leq \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_2 + \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_2 + |x_3| + |y_3| \\ &= N(x) + N(y), \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$ et pour la valeur absolue que nous avons vues en cours.

3. Voir l'exercice 7 du TD. On obtient la boule unité suivante :



4. L'ensemble B proposé est l'intersection de 4 demi-plans. Il s'agit donc tout d'abord de trouver l'équation des 4 droites frontières de ces plans. Tous calculs faits on trouve les droites suivantes

$$D_1 : 3x_1 + 2x_2 = 7,$$

$$D_2 : 3x_1 + 2x_2 = -7,$$

$$D_3 : x_1 - 4x_2 = -7,$$

$$D_4 : x_1 - 4x_2 = 7.$$

On trouve maintenant les (in-)équations des demi-plans concernés en choisissant le sens des inégalités de sorte que $(0,0)$ appartienne à ces demi-plans. On obtient

$$P_1 : 3x_1 + 2x_2 \leq 7,$$

$$P_2 : 3x_1 + 2x_2 \geq -7,$$

$$P_3 : x_1 - 4x_2 \geq -7,$$

$$P_4 : x_1 - 4x_2 \leq 7.$$

On a donc $B = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4$ et ainsi

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2) \in B &\Leftrightarrow |3x_1 + 2x_2| \leq 7 \text{ et } |x_1 - 4x_2| \leq 7 \\ &\Leftrightarrow \max(|3x_1 + 2x_2|, |x_1 - 4x_2|) \leq 7 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{7} \max(|3x_1 + 2x_2|, |x_1 - 4x_2|) \leq 1. \end{aligned}$$

On voit donc naturellement apparaître la norme qui répond à la question

$$N(x_1, x_2) = \frac{1}{7} \max(|x_1 - 4x_2|, |3x_1 + 2x_2|).$$

Exercice 3.

1. – Méthode 1 : On écrit la contraposée de la propriété attendue

$$x \notin \overline{P} \iff \exists \delta > 0, P \cap B(x, \delta) = \emptyset.$$

On a vu en cours/TD que $(\overline{P})^c$ est égal à $\overset{\circ}{\widehat{P}^c}$. On doit donc établir l'équivalence

$$x \in \overset{\circ}{\widehat{P}^c} \iff \exists \delta > 0, B(x, \delta) \subset P^c.$$

On observe que cette équivalence est vraie car elle correspond exactement à la définition de l'intérieur d'un ensemble.

- Méthode 2 : on prouve les deux implications “directement” :

$\Rightarrow$ Soit $x \in \overline{P}$. Par définition, on a $x = \lim x_n$ où $x_n \in P$. Si on fixe $\delta > 0$, on peut trouver n assez grand tel que $\|x - x_n\| < \delta$, ce qui prouve que $x_n \in B(x, \delta)$ et $x_n \in P$ par construction.

$\Leftarrow$ Supposons la propriété de droite vérifiée et appliquons-là pour $\delta = 1/n$ avec $n \geq 1$. Elle nous donne l'existence d'au moins un point, noté x_n , tel que $x_n \in P$ et $\|x_n - x\| < \frac{1}{n}$. Une telle suite est clairement contenue dans P et converge vers x , ce qui prouve que $x = \lim_{\infty} x_n$.

2. Si $a \in \text{Acc}(A)$, on a par définition

$$a \in \overline{A \setminus \{a\}} \subset \overline{A},$$

ce qui montre l'inclusion $\text{Acc}(A) \subset \overline{A}$.

Si $a \in \overline{A} \setminus A$, alors en particulier, $a \notin A$ et donc on a

$$\overline{A \setminus \{a\}} = \overline{A},$$

et ainsi $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$, ce qui montre que $a \in \text{Acc}(A)$.

3. (a) Si $x = x_{n_0}$ pour un certain n_0 , alors par définition de la suite $(x_n)_n$, on a bien

$$x = x_{n_0} \in \text{Acc}(A).$$

(b) Sous l'hypothèse que $x_n \neq x$ pour tout n , on a bien $\|x_n - x\| > 0$ pour tout n . Comme $x_n \in \text{Acc}(A) \subset \overline{A}$, on peut appliquer la question préliminaire pour en déduire que

$$B(x_n, \delta) \cap A \neq \emptyset, \quad \forall \delta > 0.$$

On peut appliquer ceci avec $\delta = (1/2)\|x_n - x\|$, ce qui donne un point $y_n \in A$ tel que

$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{2}\|x_n - x\|.$$

(c) Utilisons l'inégalité triangulaire

$$\|y_n - x\| \leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - x\| \leq \frac{3}{2}\|x_n - x\| \longrightarrow 0,$$

car $x_n \rightarrow x$. Ceci montre bien que $(y_n)_n$ tend vers x .

Supposons que, pour un certain n , on ait $y_n = x$. L'inégalité de la question (b) devient

$$0 < \|x_n - x\| \leq \frac{1}{2}\|x_n - x\|,$$

ce qui est manifestement impossible.

4. – Un ensemble fini est toujours fermé donc nous avons $\overline{A} = A$ et

$$\overline{\{\pi, 2\pi\}} = \{\pi, 2\pi\} \Rightarrow 0 \notin \overline{\{\pi, 2\pi\}} \Rightarrow 0 \notin \text{Acc}(A).$$

Ce raisonnement fonctionne pour les deux autres points de A . Ainsi, on trouve

$$\text{Acc}(A) = \emptyset,$$

– Dans ce cas, nous avons $\overline{A} = [0, 1]$ donc $\text{Acc}(A) \subset [0, 1]$. On va montrer qu'on a l'égalité $\text{Acc}(A) = [0, 1]$.

– On a vu dans la question 2 que $\overline{A} \setminus A = \{1\}$ est contenu dans $\text{Acc}(A)$.

– Il reste à voir que $[0, 1[\subset \text{Acc}(A)$. Soit donc $a \in [0, 1[$, il s'agit de montrer qu'on peut écrire a comme limite d'une suite de points de $[0, 1[\setminus \{a\}$. Ceci est possible par exemple de la façon suivante

$$a + \frac{1-a}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

– Dans ce cas, nous avons

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \overline{A} \setminus A \subset \text{Acc}(A).$$

Comme $\text{Acc}(A)$ est fermé nous en déduisons que

$$\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \subset \text{Acc}(A),$$

et comme $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, on en déduit $\text{Acc}(A) = \mathbb{R}$.

5. On a

$$\text{Acc}(A) \subset \overline{A} = \{0\} \cup \bigcup_{p \geq 1} \{1/p\}.$$

- On a $\overline{A} \setminus A = \{0\}$ donc $0 \in \text{Acc}(A)$.
- Il faut montrer que $1/p \notin \text{Acc}(A)$ pour tout $p \geq 1$. Supposons que $1/p$ soit dans $\text{Acc}(A)$, il existe alors une suite de la forme $(1/p_n)_n$, avec $p_n \neq p$ pour tout n , qui converge vers $1/p$. Ceci implique que $p_n \rightarrow p$ et comme on a affaire à une suite d'entiers, on a $p_n = p$ pour n assez grand, ce qui est une contradiction.

6. (a) On a

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n},$$

et donc $0 \in \text{Acc}(A)$.

De plus, pour tout $p \geq 1$, on a

$$\frac{1}{p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p} + \frac{1}{n},$$

ce qui montre aussi que $1/p \in \text{Acc}(A)$.

- (b) i. Comme les suites $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ sont bornées, on peut en extraire des sous-suites convergentes. Mais comme ce sont des suites d'entiers, ces suites sont constantes (respectivement égales à p et q) à partir d'un certain rang.

La suite $\frac{1}{p_{\phi(n)}} + \frac{1}{q_{\phi(n)}}$ est donc également constante et nécessairement égale à x , ce qui contredit l'hypothèse que tous ces nombres sont différents de x .

ii. On a

$$\frac{1}{q_{\phi(n)}} = x - \frac{1}{p_{\phi(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x,$$

et comme $x \neq 0$, on a $q = 1/x$. Comme q est un entier, on a bien le résultat.