MASTER Mathématiques 2ème année, 2012-2013, AMU / ECM.
Spécialité EDP et Calcul Scientifique.
Notes de cours autorisées - Durée : 3h

EQUATIONS DE STOKES ET NAVIER-STOKES INCOMPRESSIBLES

- Il est tout à fait possible (et même conseillé) d'utiliser tous les résultats vus en cours sans les redémontrer, dès lors que c'est utile. Il faudra bien sûr mentionner clairement le résultat utilisé et les hypothèses qu'il est nécessaire de vérifier.
- Vous pouvez bien sûr admettre le résultat de certaines questions que vous n'arrivez pas à faire et les utiliser dans la suite du sujet.

Sur une méthode d'approximation des problèmes de Stokes et de Navier-Stokes

On se propose d'étudier une méthode d'approximation des solutions des problèmes de Stokes et Navier-Stokes par l'intermédiaire d'un problème elliptique plus standard. On se place dans un domaine Ω régulier, borné, connexe de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou $d = 3$).

Partie I- Le problème approché :

Dans cette partie, on se donne un nombre $\varepsilon > 0$.
On considère l'espace de Hilbert $H = (H_0^1(\Omega))^d \times H_m^1(\Omega)$. On rappelle que $H_m^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega)$ à moyenne nulle.
On choisit l'application $v \mapsto \|\nabla v\|_{L^2}$ comme norme sur $H_0^1(\Omega)$ et sur $H_m^1(\Omega)$; celle-ci étant équivalente à celle de $H^1(\Omega)$ sur ces deux espaces (inégalités de Poincaré). Par ailleurs, la norme sur l'espace produit est définie par

$$\|(v,p)\|_H^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|\nabla p\|_{L^2}^2.$$

On introduit la forme bilinéaire suivante

$$a_\varepsilon : \big((v,p),(w,q)\big) \in H \times H \mapsto \int_\Omega \nabla v : \nabla w \, dx + \varepsilon \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q \, dx - \int_\Omega p(\text{div } w)\, dx + \int_\Omega q(\text{div } v)\, dx.$$

1. Montrer que la forme bilinéaire a_ε est continue et coercive sur $H \times H$.
2. Pour toute $f \in (H^{-1}(\Omega))^d$, montrer qu'il existe un unique $(v_\varepsilon, p_\varepsilon) \in H$ vérifiant
$$a_\varepsilon\big((v_\varepsilon,p_\varepsilon),(w,q)\big) = \langle f, w\rangle_{H^{-1},H_0^1}, \quad \forall (w,q) \in H. \qquad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$
3. Montrer que le couple $(v_\varepsilon, p_\varepsilon)$ est solution du problème suivant
$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f, \ \text{ dans } \Omega, \\ \text{div } v_\varepsilon - \varepsilon \Delta p_\varepsilon = 0, \ \text{ dans } \Omega, \\ v_\varepsilon = 0, \ \text{ sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, \ \text{ sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega p_\varepsilon \, dx = 0. \end{cases}$$
On donnera toutes les justifications nécessaires sans toutefois remplir 10 pages ...

On admettra que le problème ($\mathcal{P}_\varepsilon$) est, en un certain sens, plus "facile" à résoudre que le problème de Stokes (obtenu formellement en posant $\varepsilon = 0$ dans le système) dont il est une approximation. On dit qu'on a stabilisé le système de Stokes.

Partie II- Convergence :

On veut montrer dans cette partie que les solutions $(v_\varepsilon, p_\varepsilon)$ du problème ($\mathcal{P}_\varepsilon$) convergent vers l'unique solution du problème de Stokes sous-jacent.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\|v_\varepsilon\|_{H_0^1} \leq \|f\|_{H^{-1}},$$
$$\sqrt{\varepsilon}\|\nabla p_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^{-1}}.$$

2. Montrer, en utilisant un résultat vu en cours, qu'il existe également un $C > 0$ indépendant de ε (mais dépendant de Ω et f) tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\|p_\varepsilon\|_{L^2} \leq C.$$

3. Montrer qu'il existe $v \in (H_0^1(\Omega))^d$, $p \in L_0^2(\Omega)$ et une suite $(\varepsilon_k)_k$ avec $\varepsilon_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ telle que
$$v_{\varepsilon_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} v, \text{ dans } (H_0^1(\Omega))^d \text{ faible},$$
$$p_{\varepsilon_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} p, \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible},$$
$$\varepsilon_k \nabla p_{\varepsilon_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \text{ dans } (L^2(\Omega))^d \text{ fort}.$$

4. Montrer que (v, p) est solution du problème de Stokes
$$\begin{cases} -\Delta v + \nabla p = f, \text{ dans } \Omega, \\ \text{div } v = 0, \text{ dans } \Omega, \\ v = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega p\, dx = 0. \end{cases} \tag{1}$$

5. Montrer que toute la famille $(v_\varepsilon, p_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifie
$$v_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} v, \text{ dans } (H_0^1(\Omega))^d \text{ faible},$$
$$p_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} p, \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}.$$

   On va maintenant établir la convergence forte de ces suites.

6. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ on a
$$\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \langle f, v_\varepsilon\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$
   En déduire que
$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

7. Montrer que
$$\|\nabla v\|_{L^2}^2 = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1},$$
   et en déduire que $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers v fortement dans $(H_0^1(\Omega))^d$.

8. En calculant $\nabla(p_\varepsilon - p)$ et en utilisant un résultat du cours, démontrer que la convergence de $(p_\varepsilon)_\varepsilon$ vers p est forte dans $L^2(\Omega)$.

Partie III- Estimation de l'erreur :

Sous des hypothèses supplémentaires, on souhaite établir une estimation de l'erreur en fonction de ε. On va supposer que $f \in (L^2(\Omega))^d$, ce qui implique (comme on l'a vu en cours) que la solution du problème de Stokes (1) vérifie
$$v \in (H^2(\Omega))^d, \text{ et } p \in H^1(\Omega).$$

On note $w_\varepsilon = v - v_\varepsilon$ et $q_\varepsilon = p - p_\varepsilon$ les erreurs en vitesse et en pression respectivement.
On va d'abord établir une estimation en $\sqrt{\varepsilon}$ de la norme H^1 de w_ε et de la norme L^2 de q_ε. Dans un second temps, on montrera une estimation en ε de la norme L^2 de w_ε et de la norme H^{-1} de q_ε.

1. Vérifier que w_ε et q_ε sont solutions de

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon + \nabla q_\varepsilon = 0, \text{ dans } \Omega, \\ \text{div } w_\varepsilon - \varepsilon\Delta q_\varepsilon = -\varepsilon\Delta p, \text{ dans } \Omega, \\ w_\varepsilon = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega q_\varepsilon \, dx = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Etablir l'inégalité

$$2\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\nabla q_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon\|\nabla p\|_{L^2}^2.$$

En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\|v - v_\varepsilon\|_{H^1} \leq \|\nabla p\|_{L^2}\sqrt{\varepsilon},$$

et

$$\|\nabla q_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|\nabla p\|_{L^2}.$$

2. Montrer ensuite que, pour $C > 0$ indépendant de ε, on a

$$\|p - p_\varepsilon\|_{L^2} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

3. Justifier l'existence d'un unique couple $(z_\varepsilon, r_\varepsilon) \in (H_0^1(\Omega))^d \times L_0^2(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta z_\varepsilon + \nabla r_\varepsilon = w_\varepsilon, \text{ dans } \Omega, \\ \text{div } z_\varepsilon = 0, \text{ dans } \Omega, \\ z_\varepsilon = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega r_\varepsilon \, dx = 0. \end{cases} \tag{3}$$

En utilisant un résultat du cours, justifier que $r_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ et vérifie

$$\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2} \leq C\|w_\varepsilon\|_{L^2}, \ \forall\varepsilon > 0,$$

pour un $C > 0$ indépendant de ε.

4. En utilisant w_ε comme fonction-test dans (3) et z_ε comme fonction test dans (2), montrer que

$$\|w_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq 2\varepsilon\|\nabla p\|_{L^2}\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2}.$$

5. Conclure qu'il existe $C > 0$ indépendant de ε telle que

$$\|v - v_\varepsilon\|_{L^2} \leq C\varepsilon.$$

6. Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une unique solution $\varphi_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ du problème

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_\varepsilon = q_\varepsilon, \text{ dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega \varphi_\varepsilon \, dx = 0. \end{cases}$$

Montrer que

$$\|q_\varepsilon\|_{H^{-1}} \leq \|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^2},$$

puis que

$$\int_\Omega q_\varepsilon\varphi_\varepsilon \, dx = \|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2.$$

7. Justifier l'existence d'une solution $(\Phi_\varepsilon, \pi_\varepsilon) \in (H_0^1(\Omega))^d \times L_0^2(\Omega)$ au problème

$$\begin{cases} -\Delta\Phi_\varepsilon + \nabla\pi_\varepsilon = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon, & \text{dans } \Omega, \\ \Phi_\varepsilon = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Montrer que $\Phi_\varepsilon \in (H^2(\Omega))^d$ et qu'il existe $C > 0$ indépendant de ε telle que

$$\|\Phi_\varepsilon\|_{H^2} \leq C\|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^2}.$$

8. En utilisant Φ_ε comme fonction test dans le problème vérifié par $(w_\varepsilon, q_\varepsilon)$ établir que

$$\int_\Omega q_\varepsilon \varphi_\varepsilon \, dx = \int_\Omega \nabla w_\varepsilon : \nabla\Phi_\varepsilon \, dx.$$

9. Déduire des trois questions précédentes qu'il existe $C > 0$ indépendant de ε telle que

$$\|q_\varepsilon\|_{H^{-1}} \leq C\|w_\varepsilon\|_{L^2}.$$

Conclure.

Partie IV- Le problème de Navier-Stokes stationnaire :

On souhaite ici adapter l'analyse précédente au cas des équations de Navier-Stokes stationnaires. Pour cela, on introduit l'application tri-linéaire suivante

$$b : (v, \widetilde{v}, w) \in (H^1(\Omega))^d \times (H^1(\Omega))^d \times (H^1(\Omega))^d \longmapsto \frac{1}{2}\int_\Omega \big((v\cdot\nabla)\widetilde{v}\big)\cdot w \, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \big((v\cdot\nabla)w\big)\cdot\widetilde{v}\, dx.$$

1. Montrer que l'application b est continue et plus précisément qu'il existe $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que

$$|b(v, \widetilde{v}, w)| \leq C\|v\|_{L^3}\|\widetilde{v}\|_{H^1}\|w\|_{H^1}, \quad \forall v, \widetilde{v}, w \in (H^1(\Omega))^d.$$

2. On admet que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe au moins une solution $(v_\varepsilon, p_\varepsilon) \in H$ au problème non-linéaire suivant

$$a_\varepsilon((v_\varepsilon, p_\varepsilon), (w, q)) + b(v_\varepsilon, v_\varepsilon, w) = \langle f, w\rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \ \forall (w, q) \in H. \qquad (\mathcal{P}'_\varepsilon)$$

Justifier que cette solution vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon + (v_\varepsilon\cdot\nabla)v_\varepsilon + \dfrac{1}{2}(\text{div } v_\varepsilon)v_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } v_\varepsilon - \varepsilon\Delta p_\varepsilon = 0, & \text{dans } \Omega, \\ v_\varepsilon = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega p_\varepsilon \, dx = 0. \end{cases}$$

3. En s'inspirant de ce qui a fait dans la partie II, démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\|v_\varepsilon\|_{H_0^1} \leq \|f\|_{H^{-1}}, \quad \sqrt{\varepsilon}\|\nabla p_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^{-1}},$$

et qu'il existe $C > 0$ dépendant seulement de Ω telle que

$$\|p_\varepsilon\|_{L^2} \leq C(1 + \|f\|_{H^{-1}})\|f\|_{H^{-1}}.$$

4. Montrer qu'il existe une sous-suite $(v_{\varepsilon_k}, p_{\varepsilon_k})_k$ et un couple $(v, p) \in (H_0^1(\Omega))^d \times L_0^2(\Omega)$ tels que

$$v_{\varepsilon_k} \xrightharpoonup[k\to\infty]{} v, \quad \text{dans } (H_0^1(\Omega))^d \text{ faible},$$

$$v_{\varepsilon_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} v, \quad \text{dans } (L^3(\Omega))^d \text{ fort},$$

$$p_{\varepsilon_k} \xrightharpoonup[k\to\infty]{} p, \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible}.$$

5. Montrer que (v, p) est solution des équations de Navier-Stokes stationnaires avec conditions aux limites de Dirichlet homogène.
6. Montrer que la convergence de $(v_{\varepsilon_k}, p_{\varepsilon_k})_k$ vers (v, p) dans $(H_0^1(\Omega))^d \times L^2(\Omega)$ est forte.

FIN DU PROBLÈME