

# Equations de Stokes et de Navier-Stokes

COURS SPÉCIALISÉ M2 RECHERCHE EDP/CS 2012-2013

F. BOYER

Ce cours a pour but l'étude (essentiellement théorique) des équations de la mécanique des fluides visqueux incompressibles.

En guise d'introduction, je présenterai l'obtention des équations à partir des principes fondamentaux de la mécanique et de la thermodynamique et de lois comportementales bien identifiées. La validité de l'hypothèse d'incompressibilité sera en particulier discutée.

La suite du cours consistera à étudier, dans des cadres fonctionnels adaptés, les principales propriétés de ces équations, en allant des modèles les plus simples jusqu'aux modèles plus complexes :

- Problème de Stokes : c'est une brique de base dans toute cette théorie. Ce sera l'occasion d'introduire l'inégalité de Necas, les espaces de fonctions à divergence nulle, la projection de Leray, etc ... La question de la régularité elliptique des solutions sera également discutée.
- Problème de Navier-Stokes stationnaire : De nouvelles difficultés apparaissent lors de l'étude de ce premier modèle non-linéaire. On discutera en particulier la prise en compte de conditions aux limites de Dirichlet non-homogènes.
- Problème de Navier-Stokes instationnaire : Les fonctions inconnues étant maintenant dépendantes du temps, de nouveaux outils d'analyse fonctionnelle sont requis. On explicitera notamment les propriétés d'existence et unicité (en dimension 2) des solutions faibles, on discutera quelques questions liées à la stabilité asymptotique de solutions stationnaires, etc ...

Au détour de ces chapitres, on pourra discuter quelques problématiques d'origine numérique.

# Stokes and Navier-Stokes equations

2ND YEAR PDE MASTER COURSE 2012-2013

F. BOYER

This course aims at studying (mainly from a theoretical point of view) the equations of viscous incompressible fluid.

As an introduction, I will describe the complete derivation of the equations from the basic principles of mechanics and thermodynamics. In particular, the validity of the incompressibility assumption will be discussed.

In the main matter of the course the main properties of these equations, in suitable functional framework, will be studied starting from the simplest models up to more complex ones :

- the steady Stokes problem : this is a key stone in the theory and the opportunity to discuss fundamental topics like : the Necas's inequality, the divergence-free function spaces, the Leray projection, ... Elliptic regularity properties of the solutions of the Stokes problem will be in particular discussed.
- the steady Navier-Stokes problem : New difficulties appear due to the nonlinear terms in this problem. We will particularly discuss the case of non-homogeneous Dirichlet boundary data.
- the unsteady Navier-Stokes problem : since the unknowns are now time-dependent functions we will need new functional analysis tools in this chapter. Questions of existence and uniqueness of weak solutions will be discussed as well as some stability issues.

During this course we will occasionally deal with some issues related to the numerical approximation of these systems.