Problème d'Analyse Numérique - Corrigé

Centrale-Supélec 2002 - Maths 1

Préliminaires

a) Si $(\lambda_n)_n$ est à décroissance exponentielle, pour tout k nous avons

$$n^k\lambda_n \leq Mr^n n^k,$$

avec $r < 1$. Le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 quand $n \to \infty$ (croissance comparée des suites géométriques et polynômiales) et en particulier cette quantité est bornée.
La suite $(\lambda_n)_n$ est donc à décroissance rapide.

b) Soient f et g dans E_{exp} (resp. E_∞) et $\lambda \in \mathbb{C}$. Par définition il existe des polynomes $Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$, $R_n \in \mathbb{C}_n[X]$ tels que $(\|f - Q_n\|_\infty)_n$ et $(\|g - R_n\|_n)_n$ sont à décroissance exponentielle (resp. rapide).
On constate alors aisément que la suite de polynomes $\lambda Q_n + R_n$ est bien telle que le degré de chacun de ces polynomes est inférieur ou égal à n et de plus nous avons

$$\|(\lambda f + g) - (\lambda Q_n + R_n)\|_\infty \leq |\lambda|\|f - Q_n\|_\infty + \|g - R_n\|_\infty,$$

ce qui prouve que la suite $(\|(\lambda f + g) - (\lambda Q_n + R_n)\|_\infty)_n$ est elle-même à décroissance exponentielle (resp. rapide).
Détaillons un peu ce derniet point.

– Dans le cas de la décroissance rapide, nous avons pour tout k

$$\sup_{n\geq 0} n^k\|f - Q_n\|_\infty < +\infty,$$

$$\sup_{n\geq 0} n^k\|g - R_n\|_\infty < +\infty,$$

et donc

$$\sup_{n\geq 0} n^k\|(\lambda f + g) - (\lambda Q_n + R_n)\|_\infty < +\infty.$$

– Dans le cas de la décroissance exponentielle, nous avons

$$\|f - Q_n\|_\infty \leq M_1 r_1^n, \ \ \forall n \geq 0,$$

$$\|g - R_n\|_\infty \leq M_2 r_2^n, \ \ \forall n \geq 0,$$

avec $r_1, r_2 \in]0, 1[$. On voit alors que nous avons

$$\|(\lambda f + g) - (\lambda Q_n + R_n)\|_\infty (|\lambda| M_1 + M_2)(\max(r_1, r_2))^n, \ \ \forall n \geq 0,$$

ce qui montre bien le résultat vu que $\max(r_1, r_2) < 1$.
D'après la question a) il est clair que $E_{exp} \subset E_\infty$.

– i) Soit f une telle fonction, on va vérifier que la suite Q_n constitué par les polynômes de Taylor de f en 0 conviennent. Ces polynômes s'écrivent

$$Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k,$$

et vérifient, d'après la formule de Taylor-Lagrange et l'hypothèse sur les dérivées de f,

$$\forall x \in [-1, 1] |f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{1}{(n + 1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq \frac{M}{(n + 1)!}.$$

Il reste à vérifier que la suite $\lambda_n = \frac{M}{(n+1)!}$ est à décroissance exponentielle.
Ceci est vrai car nous avons

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{1}{n + 1} \leq \frac{1}{2}, \ \forall n \geq 1,$$

et donc

$$\lambda_n \leq \lambda_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\lambda_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ \ \forall n \geq 1.$$

ii) Les fonctions trigonométriques sin et cos par exemple ou encore la fonction exp vérifient les hypothèses de la question précédente.

1 Polynomes de Tchebychev

I.A) 1) Pour $y \in \mathbb{R}$, nous écrivons

$$e^{iny} = (e^{iy})^n = (\cos y + i \sin y)^n,$$

puis nous développons ce dernier terme avec la formule du binôme

$$e^{iny} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k (\sin y)^k (\cos y)^{n-k}.$$

En prenant la partie réelle de cette formule (on remarque que les termes pour k impair disparaissent de la somme) on obtient

$$\cos(ny) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} C_n^k (-1)^{k/2} (\sin y)^k (\cos y)^{n-k}.$$

Ensuite, on utilise le fait que pour k pair nous avons

$$(\sin y)^k = \big((\sin y)^2\big)^{k/2} = \big(1 - \cos^2 y\big)^{k/2}.$$

In fine, on obtient

$$\cos(ny) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} C_n^k (-1)^{k/2} (1 - \cos^2 y)^{k/2} (\cos y)^{n-k}.$$

Ceci montre bien que $\cos(ny)$ est un polynôme en $\cos y$. Autrement dit, en posant

$$T_n(X) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} C_n^k (-1)^{k/2} (1 - X^2)^{k/2} X^{n-k},$$

on a bien un polynôme à coefficients entiers qui vérifie

$$T_n(\cos y) = \cos(ny),$$

et donc

$$T_n(x) = \cos(n\text{Arccos } x), \ \ \forall x \in [-1, 1].$$

2) Des calculs élémentaires montrent que

$$T_1(X) = X,$$

puis que

$$\cos(2y) = (\cos y)^2 - (\sin y)^2 = 2(\cos y)^2 - 1,$$

et donc

$$T_2(X) = 2X^2 - 1.$$

Pour le rang $n = 3$, on écrit

$$\cos(3y) = \cos(y)\cos(2y) - \sin(y)\sin(2y) = \cos(y)(2(\cos y)^2 - 1) - 2\cos(y)(\sin y)^2 = 4(\cos y)^3 - 3(\cos y),$$

d'où

$$T_3(X) = 4X^3 - 3X.$$

Enfin, nous avons

$$\cos(4y) = T_2(\cos(2y)) = T_2(T_2(\cos y)),$$

d'où

$$T_4(X) = T_2(T_2(X)) = 2(T_2(X))^2 - 1 = 2(2X^2 - 1)^2 - 1 = 8X^4 - 8X^2 + 1.$$

3) Utilisons les formules de trigonométrie

$$\cos((n+2)y) = \cos((n+1)y + y) = \cos((n+1)y)\cos(y) - \sin((n+1)y)\sin(y),$$

$$\cos(ny) = \cos((n+1)y - y) = \cos((n+1)y)\cos(y) + \sin((n+1)y)\sin(y),$$

qui donnent par addition

$$\cos((n+2)y) + \cos(ny) = 2\cos((n+1)y)\cos(y).$$

Appliquant cette formule à $y = \text{Arccos }(x)$, on trouve bien la récurrence attendue.

4) Par une récurrence immédiate on constate que T_n a la même parité que n et que son coefficient dominant vaut 2^{n-1}.

5) La construction de T_n proposée plus haut nous donne exactement cette formule.

I.B) 1) Pour tout $x \in [-1, 1]$ nous avons

$$|T_n(x)| = |\cos(n\text{Arccos } x)| \leq 1,$$

mais par ailleurs

$$T_n(1) = \cos(n\text{Arccos } 1) = \cos(0) = 1,$$

donc

$$\|T_n\|_\infty = 1.$$

2) On procède par réccurence en constatant que le cas $n = 1$ est trivial. Ensuite on écrit

$$\sin((n+1)u) = \sin(nu)\cos(u) + \sin(u)\cos(nu),$$

puis on majore en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$|\sin((n+1)u)| \leq |\sin(nu)| + |\sin(u)| \leq n|\sin u| + |\sin u| = (n+1)|\sin u|.$$

3) On va dériver la formule de la question I.A.6)

$$-\sin(t)T_n'(\cos t) = -n\sin(nt), \quad \forall t \in [0, \pi], \tag{1}$$

En prenant la valeur absolue et en utilisant la question précédente, il vient

$$|\sin t||T_n'(\cos t)| \leq n^2|\sin t|, \forall t \in [0, \pi].$$

En excluant les valeurs $t = 0$ et $t = \pi$ où le sinus s'annule nous obtenons

$$|T_n'(\cos t)| \leq n^2, \ \forall t \in]0, \pi[.$$

Quand t parcours $]0, \pi[$, $\cos(t)$ parcours $]-1, 1[$ et on a donc montré

$$|T'n(x)| \leq n^2, \ \ \forall x \in]-1, 1[.$$

Comme T_n' est continue cette inégalité se prolonge aux bornes de l'intervalle et fournit

$$\|T_n'\|_\infty \leq n^2.$$

En reprenant (1) pour $t > 0$ petit nous avons

$$T_n'(\cos t) = n\frac{\sin(nt)}{\sin t} \xrightarrow[t \to 0]{} n^2,$$

ce qui prouve que $T_n'(1) = n^2$ et on a donc bien l'égalité

$$\|T_n'\|_\infty = n^2.$$

I.C) 1) Utilisons la formule de récurrence établie plus haut

$$\begin{aligned} T_{n+2}\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right) &= 2\frac{r+r^{-1}}{2}T_{n+1}\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right) - T_n\left(\frac{r+r^{-1}}{2}\right) \\ &= 2\frac{r+r^{-1}}{2}\frac{r^{n+1}+r^{-(n+1)}}{2} - \frac{r^n+r^{-n}}{2} \\ &= \frac{r^{n+2}+r^{-(n+2)}}{2}. \end{aligned}$$

2) a) La fonction $\varphi : r \in]0, +\infty[\mapsto \varphi(r) = (r + r^{-1})/2$ est continue, tend vers $+\infty$ en 0 et $+\infty$ et atteint son minimum en $r = 1$ (ce minimum valant 1). Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, tout réel $x \geq 1$ peut s'écrire sous la forme proposée pour un certain $r > 0$. On peut même imposer que $r \geq 1$ (sinon on échange r et $1/r$).

b) On combine les résultats précédents pour obtenir

$$T_n(x) = T_n((r + r^{-1})/2) = (r^n + r^{-n})/2 = \varphi(r^n).$$

On a vu que φ est minorée par 1 sur $\mathbb{R}^+$ donc $T_n(x) \geq 1$ pour tout $x \geq 1$. Par ailleurs, nous avons

$$T_n(x) \leq r^n,$$

vu que $r \geq 1$. Il reste à exprimer r en fonction de x. Pour cela on calcule

$$x^2 = \frac{r^2 + 2 + r^{-2}}{4},$$

$$x^2 - 1 = \frac{r^2 - 2 + r^{-2}}{4} = \left(\frac{r - r^{-1}}{2}\right)^2,$$

et donc

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{r - r^{-1}}{2}, \text{ car } r \geq 1.$$

Ainsi nous avons

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{r + r^{-1}}{2} + \frac{r - r^{-1}}{2} = r,$$

ce qui fournit le résultat annoncé.

I.D) 1) Dérivons une première fois

$$-\sin(t)T_n'(\cos t) = -n\sin(nt), \ \forall t \in [0, \pi],$$

puis une seconde fois

$$\sin(t)^2 T_n''(\cos t) - \cos(t)T_n'(\cos t) = -n^2\cos(nt),$$

ce qui donne

$$\sin(t)^2 T_n''(\cos t) - \cos(t)T_n'(\cos t) = -n^2 T_n(\cos t),$$

et enfin en utilisant $\sin^2(t) = 1 - \cos^2 t$, on trouve

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0, \ \forall x \in [-1, 1].$$

Mais comme il s'agit d'une égalité entre polynomes valables sur tout l'intervalle $[-1, 1]$, cette égalité est encore vraie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2) Pour $k = 0$ et $k = 1$ les valeurs de T_n et T_n' en 1 ont déjà été obtenues plus haut.
On fixe n et, comme nous devons évaluer les valeurs des dérivées successives de T_n au point 1, il est naturel d'écrire le développement de Taylor d polynôme en 1

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T_n^{(k)}(1)}{k!}(X - 1)^k.$$

On effectue donc le changement d'indéterminée $Y = X - 1$

$$T_n(X) = P_n(Y).$$

On utilise la question précédente pour déterminer l'équation différentielle vérifiée par P_n

$$(1 - (1 + y)^2)P_n''(y) - (1 + y)P_n'(y) + n^2 P_n(y) = 0,$$

ou encore

$$\big[-2yP_n''(y) - P_n'(y)\big] + \big[-y^2 P_n''(y) - yP_n'(y) + n^2 P_n(y)\big] = 0.$$

Il s'agit ici d'une égalité entre polynômes de degré n, et nous pouvons donc identifier les coefficients de y^k pour tout $k \geq 2$. Nous obtenons

$$\left[-2\frac{T_n^{(k+1)}(1)}{(k-1)!} - \frac{T_n^{(k+1)}(1)}{k!}\right] + \left[-\frac{T_n^{(k)}(1)}{(k-2)!} - \frac{T_n^{(k)}(1)}{(k-1)!} + n^2\frac{T_n^{(k)}(1)}{k!}\right] = 0.$$

On multiplie tout par $k!$ et on obtient la relation de récurrence suivante

$$(2k+1)T_n^{(k+1)}(1) = (n^2-k^2)T_n^{(k)}(1). \tag{2}$$

On pose $\lambda_n^k = \frac{n}{n+k}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\frac{2^k k!}{(2k)!}$ qui est la quantité proposée par l'énoncé. On a déjà vu que $\lambda_n^0 = T_n(1)$ et $\lambda_n^1 = T_n'(1)$. Pour montrer l'égalité pour toute valeur de k, il faut et il suffit que les λ_n^k vérifient la relation de récurrence (2). On calcule donc les deux membres de l'égalité

$$(2k+1)\lambda_n^{k+1} = (2k+1)\frac{n}{n+k+1}\frac{(n+k+1)!}{(n-k-1)!}\frac{2^{k+1}(k+1)!}{(2k+2)!} = n\frac{(n+k)!}{(n-k-1)!}\frac{2^k k!}{(2k)!},$$

$$(n^2-k^2)\lambda_n^k = (n-k)(n+k)\frac{n}{n+k}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\frac{2^k k!}{(2k)!} = n\frac{(n+k)!}{(n-k-1)!}\frac{2^k k!}{(2k)!},$$

dont on constate bien qu'elles sont égales. Le résultat est démontré.

2 Application des polynômes de Tchebychev à la majoration des polynômes et de leurs dérivées

II.A) 1) Résoudre l'équation proposée revient à chercher les $t \in [0,\pi]$ tels que $|T_n(\cos t)| = 1$ et donc par la formule qui définit T_n, on doit finalement résoudre l'équation

$$1 = |\cos(nt)|, \;\; t \in [0,\pi].$$

Les solutions de ce problème sont définies par

$$t = \frac{k}{n}\pi, \;\; \text{avec } 0 \leq k \leq n.$$

En retournant à l'inconnue x initiale, les solutions cherchées sont donc les

$$\cos(k\pi/n), \;\; k = 0, ..., n,$$

c'est-à-dire exactement les a_j.
Nous avons déjà calculé

$$T_n'(a_n) = T_n'(1) = 1,$$

$$T_n'(a_0) = T_n'(-1) = (-1)^{n+1}T_n(1) = (-1)^{n+1}.$$

Pour $j \in \{1, ..., n-1\}$, les a_j sont à l'intérieur de l'intervalle $]-1,1[$ sur lequel nous avons $|T_n| \leq 1$ et donc ce sont des extrema locaux de T_n. En conséquence, nous avons

$$T_n'(a_j) = 0, \;\; \forall j \in \{1, ..., n-1\}.$$

2) D'après la formule de l'interpolation de Lagrange, il suffit de montrer que

$$T_n(a_j) = (-1)^{n-j}.$$

Il suffit pour cela d'écrire

$$T_n(a_j) = T_n(\cos((1-j/n)\pi)) = \cos((n-j)\pi) = (-1)^{n-j}.$$

3) D'après la question précédente, il s'agit de montrer que pour $x \geq 1$, $L_i(x)$ a pour signe $(-1)^{n-i}$.
Reprenons la formule qui définit $L_i(x)$. Pour $x \geq 1$, comme tous les a_j sont dans $]-1,1[$, le numérateur est toujours positif. Il reste à déterminer le signe du dénominateur.
Il s'agit donc de compter, pour i fixé, combien il y a de $j \in E_i$ tels que $a_j > a_i$. Ce nombre est exactement égal à $n+1-(i+1) = n-i$. Le signe de $L_i(x)$ est donc $(-1)^{n-i}$.

4) D'après la formule de l'interpolation de Lagrange sur les points de Tchebychev, nous avons, pour tout polynôme P

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i(x).$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il vient

$$|P(x)| \leq \sum_{i=0}^{n} |P(a_i)||L_i(x)| \leq \|P\|_\infty \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|,$$

cette dernière inégalité étant valable du fait que les points a_i sont tous dans $[-1,1]$.

Si maintenant, on suppose deplus que $x \geq 1$, on peut utiliser la question précédente pour obtenir

$$|P(x)| \leq \|P\|_\infty T_n(x),$$

Enfin, grâce à la question I.C.2.b) nous obtenons bien

$$|P(x)| \leq \|P\|_\infty \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n.$$

II.B) 1) Il faut constater que L_i est un polynôme de degré n qui a toutes ses racines dans $]-1,1[$ et qui sont toutes simples. Par le théorème de Rolle, nous déduisons que toutes les dérivées successives $L_i^{(k)}$ ont également leurs racines dans cet intervalle.

Ainsi, pour i fixé, tous les $L_i^{(k)}$ ont un signe constant sur $[1,+\infty[$. Par ailleurs ce signe est déterminé par le signe du coefficient dominant de L_i et donc ce signe ne dépend pas de k.

Ainsi $L_i^{(k)}$ a aussi pour signe $(-1)^{n+i}$ sur $[1,+\infty[$ et on obtient la formule attendue en dérivant k fois la formule de Lagrange de la question II.A.2)

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} L_i(x).$$

2) Même démonstration que II.A.4).

II.C) 1) Un calcul élémentaire montre que

$$P_\lambda^{(k)}(1) = \left(\frac{\lambda+\varepsilon}{2}\right)^k P^{(k)}(\lambda).$$

La définition de ε permet de conclure.

2) En utilisant la question II.B.2) (appliquée au polynôme P_λ) et la question précédente, on trouve

$$|P^{(k)}(\lambda)| = \left(\frac{2}{\lambda+\varepsilon}\right)^k |P_\lambda^{(k)}(1)| \leq 2^k \|P_\lambda\|_\infty T_n^{(k)}(1).$$

Il reste à voir que, par définition de λ et ε, nous avons $\|P_\lambda\|_\infty \leq \|P\|_\infty$ car quand x parcours $[-1,1]$, la quantité $(\lambda+\varepsilon)/2x + (\lambda-\varepsilon)/2$ reste dans ce même intervalle $[-1,1]$.

3) Il suffit d'utiliser les questions I.D.2) et I.B.3).

3 Détermination de l'ensemble E_∞

III.A) 1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$|e_k(t)| = 1,$$

et donc

$$N_\infty(c_k(\varphi)e_k) = |c_k(\varphi)|, \ \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

L'hypothèse montre donc que les séries de fonctions $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(\varphi)e_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} c_{-k}(\varphi)e_{-k}$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$ et donc uniformément convergentes.

Appelons ψ la limite de la suite $(S_n(\varphi))_n$ (qui est donc une fonction continue). Pour $n_0 \in \mathbb{Z}$ fixé et pour $n \geq |n_0|$ nous avons par construction

$$c_{n_0}(S_n(\varphi)) = (S_n(\varphi), e_{n_0}) = c_{n_0}(\varphi),$$

et donc en faisant tendre n vers l'infini, nous obtenons que $c_{n_0}(\psi) = c_{n_0}(\varphi)$ pour tout $n_0 \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\varphi - \psi$ est une fonction continue qui a tous ses coefficients de Fourier nuls. Nous en déduisons que $\varphi - \psi = 0$ ou bien en utilisant le théorème de Fejer ou bien la théorie L^2 des séries de Fourier. **Attention :** le théorème de Dirichlet ne s'applique pas ici car il nécessite un peu plus de régularité sur la fonction étudiée.

2) Nous calculons en développant le produit scalaire

$$\begin{aligned} N_2(\varphi - \omega)^2 &= N_2\big((\varphi - S_n(\varphi)) + (S_n(\varphi) - \omega)\big)^2 \\ &= N_2(\varphi - S_n(\varphi))^2 + 2\big(\varphi - S_n(\varphi), S_n(\varphi) - \omega) + N_2(S_n(\varphi) - \omega)\big)^2. \end{aligned}$$

Comme $S_n(\varphi)$ est la projection orthogonale de φ sur τ_n et que $S_n(\varphi) - \omega$ appartient à l'espace τ_n, le produit scalaire qui apparait dans le membre de droite est nul. Par ailleurs, $\omega \neq S_n(\varphi)$ donc le troisième terme de la somme est strictement positif. On a bien obtenu

$$N_2(\varphi - \omega)^2 > N_2(\varphi - S_n(\varphi))^2.$$

3) Comme φ est de classe $\mathcal{C}^p$ et 2π-périodique nous pouvons intégrer par parties plusieurs fois dans la définition de $c_k(\varphi)$ (les termes de bord disparaissent par périodicité)

$$\begin{aligned} 2\pi c_k(\varphi) &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-ikt}\, dt \\ &= \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(t) e^{-ikt}\, dt \\ &= \frac{1}{(ik)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi''(t) e^{-ikt}\, dt \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{(ik)^p} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^{(p)}(t) e^{-ikt}\, dt. \end{aligned}$$

On peut maintenant prendre le module et utiliser l'inégalité triangulaire

$$2\pi |c_k(\varphi)| \leq \frac{1}{|k|^p} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi^{(p)}(t)|\, dt \leq \frac{2\pi}{|k|^p} N_\infty(\varphi^{(p)}),$$

ce qui est bien l'inégalité souhaitée.

III.B)

– Soit $f \in \mathcal{C}^0([-1,1])$ telle que $Lf = 0$. Cela signifie que $f(\cos(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $\cos(t)$ parcours tout l'ensemble $[-1,1]$ quand t parcours $\mathbb{R}$, nous en déduisons que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [-1,1]$ et donc que $f = 0$. Ceci prouve l'injectivité de L.

– Pour tout f, le même argument que ci-dessus montre que

$$\sup_{x \in [-1,1]} |f(x)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(\cos t)|,$$

autrement dit

$$N_\infty(Lf) = \|f\|_\infty, \ \ \forall f \in \mathcal{C}^0([-1,1]).$$

Ainsi, nous avons

$$|||L|||_\infty = 1.$$

– Pour tout f nous avons (on utilise la question précédente)

$$N_2(Lf)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\cos(t))|^2\, dt \leq N_\infty(Lf)^2 \leq N_\infty(Lf)^2 \|f\|_\infty^2.$$

Mais par ailleurs, les inégalités ci-dessus sont toutes des égalités si, par exemple, on prend pour f une fonction constante non nulle.

Nous déduisons de cela que $|||L|||_\infty = 1$.

III.C) 1) Il s'agit ici d'un argument de parité. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On effectue le calcul suivant par chanegement de variable $s = -t$ dans l'intégrale

$$2\pi c_k(Lf) = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(t))e^{-ikt}\,dt = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(-s))e^{iks}\,ds = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(s))e^{-i(-k)s}\,ds = 2\pi c_{-k}(Lf).$$

2) Nous commençons par remarquer que, si $Q_{k-1}(X) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j X^j$ est un élément de $\mathcal{C}_{k-1}[X]$, alors

$$LQ_{k-1}(t) = Q_{k-1}(\cos(t)) = Q_{k-1}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^j \in \tau_{k-1} = \mathrm{vect}(e_{-(k-1)}, ..., e_0, ..., e_{k-1}).$$

En conséquence nous avons

$$c_k(LQ_{k-1}) = (LQ_{k-1}, e_k) = 0,$$

car e_k est orthogonal à l'espace τ_{k-1}.

Ainsi, nous pouvons écrire, en utilisant la première question

$$\begin{aligned} c_k(Lf) &= c_k(Lf - LQ_{k-1}) \\ &= c_k(L(f - Q_{k-1})) \\ &= \frac{1}{2}\big(c_k(L(f-Q_{k-1})) + c_{-k}(L(f-Q_{k-1}))\big) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} L(f-Q_{k-1})(t)(e^{ikt}+e^{-ikt})\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} L(f-Q_{k-1})(t)\cos(kt)\,dt. \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$|c_k(Lf)| \leq N_2(L(f-Q_{k-1}))N_2(\cos(k.)).$$

D'après la question III.B) le premier terme se majore par $\|f - Q_{k-1}\|_\infty$ alors que le second terme se calcule bien classiquement par linéarisation

$$N_2(\cos(k.))^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kt)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1+\cos(2kt))\,dt = \frac{1}{2},$$

et donc

$$N_2(\cos(k.)) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3) Nous utilisons la propriété de parité de la question III.C.1 pour écrire, en isolant le cas $k = 0$

$$S_n(Lf) = c_0(Lf)e_0 + 2\sum_{k=1}^{n} c_k(Lf)\cos(k.),$$

et donc en spécifiant cette égalité en Arccos (x) et en utilisant la définition des polynômes de Tchebychev, il vient

$$U_n(f)(x) = S_n(Lf)(\mathrm{Arccos}\ x) = c_0(Lf) + 2\sum_{k=1}^{n} c_k(Lf)\cos(k\mathrm{Arccos}\ (x)) = c_0(Lf) + 2\sum_{k=1}^{n} c_k(Lf)T_k(x).$$

4) D'après la question III.A.1, la suite $(U_n(f))_n$ converge uniformément vers $x \mapsto Lf(\mathrm{Arccos}\ x) = f(x)$. De plus comme $\|T_k\|_\infty = 1$ pour tout k, nous pouvons écrire pour tout n et p,

$$\|U_{n+p}(f) - U_n(f)\|_\infty \leq 2\sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k(Lf)|\|T_k\|_\infty \leq 2\sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k(Lf)| \leq 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} |c_k(Lf)|,$$

En passant à la limite quand p tend vers l'infini, on obtient l'estimation demandée.

III.D) Soit donc une suite $(Q_n)_n$ de polynômes de degré au plus n tels que $(\|f - Q_n\|_\infty)_n$ soit à décroissance rapide. D'après III.C.2, nous avons

$$|c_k(Lf)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f - Q_{k-1}\|_\infty,$$

et donc $(|c_k(Lf)|)_k$ est elle-même à décroissance rapide.

D'après la question précédente, nous avons en particulier pour un certain M

$$|c_k(Lf)| \leq \frac{M}{k^2}, \ \ \forall k \geq 1,$$

et donc la série de terme général $|c_k(Lf)|$ est convergente. Les questions de la partie III.C montrent alors exactement que la série de fonctions proposée (dont les $U_n(f)$ sont les sommes partielles) converge normalement vers la fonction f.

2) Nous devons appliquer le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions. Pour cela, considérons la série de fonctions dont le terme général est la dérivée k-ième de la série étudiée

$$\sum_{n \geq 1} |c_n(Lf)| T_n^{(k)}.$$

Pour montrer le résultat attendu, il nous suffit de montrer la convergence normale (locale uniforme aurait suffit) de cette série de fonctions pour toute valeur fixée de k.

Nous utilisons la majoration de la question II.C.3 pour $n \geq k$ (sinon le terme étudié est nul !)

$$\|T_n^{(k)}\|_\infty \leq 2^{2k} \frac{k!}{(2k!)} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \|T_n\|_\infty = M_k (n+k) \ldots (n-k+1) \leq M_k (2n)^{2k} = M_k' n^{2k}.$$

Nous avons donc

$$|c_n(Lf)| \|T_n^{(k)}\|_\infty \leq M_k' |c_n(Lf)| n^{2k},$$

qui est le terme général d'une série convergente vu que $(|c_n(Lf)|)_n$ est à décroissance rapide.

III.E) 1) Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, Lf l'est aussi. D'après la question III.A.3 nous avons pour tout k et tout p

$$|c_k(Lf)| \leq \frac{N_\infty((Lf)^{(p)})}{k^p},$$

ce qui prouve bien que la suite est à décroissance rapide.

2) On pose $Q_n = U_n(f)$ comme défini dans la partie III.C. Il s'agit bien d'un polynôme de degré n et nous avons

$$\|f - U_n(f)\|_\infty \leq 2 \sum_{k=n+1} |c_k(Lf)|.$$

et d'après la question précédente et la question III.C.4, pour tout $p \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
\|f - U_n(f)\|_\infty &\leq 2 N_\infty((Lf)^{(p)}) \sum_{k=n+1} \frac{1}{k^p} \\
&\leq 2 N_\infty((Lf)^{(p)}) \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx \\
&\leq \frac{2}{p} N_\infty((Lf)^{(p)}) \frac{1}{n^{p-1}}.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout p, on a bien montré que la suite $\|f - U_n(f)\|_\infty$ est à décroissance rapide.

4 Etude de l'ensemble E_{exp}

III.A) 1) Pour montrer que $a) \Rightarrow b)$ on utilise la question III.C.2 et le fait qu'une suite majorée par une suite à décroissance exponentielle est elle-même à décroissance exponentielle.

Pour montre que $b) \Rightarrow a)$ il faut utiliser la question III.C.4 et vérifier que si $(|c_k(Lf)|)_k$ est à décroissance exponentielle alors la suite des restes de la série associée l'est également. C'est un calcul immédiat : pour un $M > 0$ et un $r \in [0, 1[$ convenable, pour tout $n \geq 0$ nous avons

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} |c_k(Lf)| \leq M \sum_{k=n+1}^{+\infty} r^k = \frac{Mr}{1-r} r^n.$$

III.B) 1) Comme $E_{exp} \subset E_\infty$ nous pouvons simplement appliquer les résultats de la partie III.

2) Nous reprenons les estimations des dérivées des polynômes de Tchebychev obtenues plus haut.

$$\begin{aligned}\|f^{(k)}\|_\infty &\leq 2\sum_{n\geq k} |c_n(Lf)| \|T_n^{(k)}\|\infty\\ &\leq 4M\frac{2^{2k}k!}{(2k)!}\sum_{n\geq k} r^n \frac{(n+k)!}{(n-k)!}\\ &= 4M\frac{2^{2k}k!}{(2k)!} r^k \sum_{p\geq 0} r^p \frac{(p+2k)!}{p!}.\end{aligned}$$

Si on pose $\varphi(r) = \frac{1}{1-r} = \sum_{p\geq 0} r^p$, on voit que la série de droite de l'inégalité précédente n'est rien d'autre que la dérivée $2k$-ième de φ en r. Cette dérivée se calcule explicitement

$$\varphi^{(2k)}(r) = \frac{(2k-1)!}{(1-r)^{2k+1}}.$$

On a donc obtenu

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leq 4M\frac{2^{2k}k!}{(2k)!} r^k \frac{(2k-1)!}{(1-r)^{2k+1}} = \frac{2}{k}\frac{M}{1-r}\frac{k!(4r)^k}{(1-r)^{2k}} \leq \frac{2M}{1-r}\frac{k!(4r)^k}{(1-r)^{2k}},$$

qui est bien l'inégalité attendue.

III.C) Il s'agit de montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor de f en a est au moins égal à $\lambda(r)$ pour cela, nous devons montrer que

$$\text{La suite } \left(\frac{f^n(a)}{n!}\lambda(r)^n\right)_n \text{ est bornée.}$$

Pour cela, il suffit d'utiliser la question précédente

$$\left|\frac{f^n(a)}{n!}\lambda(r)^n\right| \leq \|f^{(n)}\|_\infty \frac{\lambda(r)^n}{n!} \leq \frac{2M}{1-r}.$$

III.D) C'est un grand classique : cette fonction est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$, y compris en 0 et elle appartient donc à E_∞ (question III.E.2). Par contre toutes ses dérivées en 0 sont nulles et donc f ne peut pas être la somme de sa série de Taylor au voisinage de 0. D'après la question IV.C, cela implique que f ne peut être dans E_{exp}.

III.E) On va introduire le polynôme de Taylor de f en 0 d'ordre n

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!},$$

et on va montrer que $\|f - Q_n\|_\infty$ est à décroissance exponentielle.

Comme le rayon de convergence de la série de Taylor de f en 0 est au moins égal à $\rho > 1$ nous savons que la suite

$$\left(\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}\rho^n\right)_n$$

est bornée. On note $M > 0$ une borne de cette suite.

On écrit maintenant pour tout $x \in [-1, 1]$

$$f(x) - Q_n(x) = \sum_{k\geq n+1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!},$$

d'où on déduit

$$\|f - Q_n\|_\infty \leq \sum_{k\geq n+1}\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leq M\sum_{k\geq n+1}\left(\frac{1}{\rho}\right)^k = \frac{M}{1-1/\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{n+1}.$$

Comme $\rho > 1$, on a bien montré que cette suite était à décroissance exponentielle.