MASTER Mathématiques 2ème année, 2012-2013, AMU / ECM.
Spécialité EDP et Calcul Scientifique.
Notes de cours autorisées - Durée : 3h

EQUATIONS DE STOKES ET NAVIER-STOKES INCOMPRESSIBLES

Sur une méthode d'approximation des problèmes de Stokes et de Navier-Stokes

Correction

Partie I- Le problème approché :

1. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on vérifie aisément que

$$\begin{aligned}|a_\varepsilon((v,p),(w,q))| &\leq \|\nabla v\|_{L^2}\|\nabla w\|_{L^2} + \varepsilon\|\nabla p\|_{L^2}\|\nabla q\|_{L^2} + \|p\|_{L^2}\|\text{div } w\|_{L^2} + \|q\|_{L^2}\|\text{div } v\|_{L^2}\\ &\leq C\|(v,p)\|_H\|(w,q)\|_H,\end{aligned}$$

ce qui montre la continuité de a_ε.
On observe maintenant que, dans le calcul de $a_\varepsilon((v,p),(v,p))$, les deux derniers termes se compensent exactement de sorte que

$$a_\varepsilon((v,p),(v,p)) = \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\nabla p\|_{L^2}^2 \geq \alpha\|(v,p)\|_H^2,$$

pour un certain $\alpha > 0$ (qui dépend de ε).

2. Il est clair que l'application $(w,q) \in H \mapsto \langle f, w\rangle_{H^{-1},H_0^1}$ est linéaire continue sur H. On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram et ainsi prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème considéré.

3. • On commence par choisir des couples-tests de la forme $(w,q) = (\varphi, 0)$ où $\varphi \in (H_0^1(\Omega))^d$ et on obtient bien que $(v_\varepsilon, p_\varepsilon)$ est solution de la première équation

$$-\Delta v_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f,$$

au sens des distributions.
   • On prend maintenant des couples-tests de la forme $(w,q) = (0,\psi)$ où $\psi \in H_m^1(\Omega)$, ce qui donne

$$\int_\Omega \nabla p_\varepsilon \cdot \nabla\psi\, dx = -\int_\Omega \psi(\text{div } v_\varepsilon)\, dx.$$

On retrouve un problème de Dirichlet-Neumann comme on l'a vu en cours qui s'écrit

$$-\varepsilon\Delta p_\varepsilon = -\text{div } v_\varepsilon.$$

   • La condition aux limites sur v_ε est contenue dans la définition de l'espace, alors que celle sur la pression p_ε s'interprète par intégration par parties comme on l'a fait en cours.

Partie II- Convergence :

1. On prend $(w, q) = (v_\varepsilon, p_\varepsilon)$ comme fonction test dans le problème étudié. On trouve
$$\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\nabla p_\varepsilon\|_{L^2}^2 = \langle f, v_\varepsilon\rangle_{H^{-1},H_0^1} \leq \|f\|_{H^{-1}}\|v_\varepsilon\|_{H_0^1}.$$
Il vient, d'abord
$$\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^{-1}},$$
puis
$$\sqrt{\varepsilon}\|\nabla p_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^{-1}}.$$
2. Pour obtenir l'estimation en pression il faut utiliser l'inégalité de Necas. On utilise la première équation pour écrire
$$\nabla p_\varepsilon = f + \Delta v_\varepsilon,$$
et donc
$$\|\nabla p_\varepsilon\|_{H^{-1}} \leq \|f\|_{H^{-1}} + \|\Delta v_\varepsilon\|_{H^{-1}} \leq \|f\|_{H^{-1}} + \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2} \leq 2\|f\|_{H^{-1}}.$$
Comme p_ε est à moyenne nulle, l'inégalité de Necas, donne
$$\|p_\varepsilon\|_{L^2} \leq C\|\nabla p_\varepsilon\|_{H^{-1}} \leq 2C\|f\|_{H^{-1}}.$$
3. D'après les bornes uniformes obtenues précédemment, il s'agit juste d'utiliser la compacité faible des fermés bornés dans les espaces de Hilbert : de toute suite bornée dans un Hilbert, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.
Pour la dernière convergence, on utilise la borne sur $\sqrt{\varepsilon}\nabla p_\varepsilon$, ce qui donne
$$\varepsilon_k\|\nabla p_{\varepsilon_k}\|_{L^2} = \sqrt{\varepsilon_k}\,(\sqrt{\varepsilon_k}\|\nabla p_{\varepsilon_k}\|_{L^2}) \leq C\sqrt{\varepsilon_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$
4. Le problème étant linéaire, on peut passer à la limite faible dans la première équation et obtenir
$$-\Delta v + \nabla p = f.$$
Il faut maintenant montrer que v est à divergence nulle. Pour cela, on utilise que
$$\text{div } v_{\varepsilon_k} \xrightharpoonup[k\to\infty]{} \text{div } v, \text{ dans } L^2 \text{ faible},$$
et que
$$\varepsilon_k\Delta p_{\varepsilon_k} = \text{div } (\varepsilon_k\nabla p_{\varepsilon_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \text{ dans } L^2 \text{ fort.}$$
En passant à la limite dans la deuxième équation du problème $\mathcal{P}_{\varepsilon_k}$, on trouve donc
$$\text{div } v = 0.$$
5. Comme la limite faible éventuelle (v, p) de toute sous-suite est solution du problème de Stokes, qui admet une solution unique, l'argument standard de compacité montre que l'ensemble de la famille $(v_\varepsilon, p_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifie les propriétés de convergence annoncées.
6. On a déjà vu que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\nabla p_\varepsilon\|_{L^2}^2\langle f, v_\varepsilon\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$
Le terme en gradient de pression étant positif, on a bien l'inégalité demandée. Comme on a convergence faible de v_ε vers v, on peut passer à la limite dans le membre de droite de l'inégalité. En revanche, on ne sait pas que le membre de gauche a une limite, ce qui nous contraint de passer à la limite supérieure et donne le résultat attendu.
7. On obtient l'égalité demandée en prenant v comme fonction-test dans le problème de Stokes obtenu à la limite.
En combinant les deux résultats précédents, on trouve
$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|\nabla v\|_{L^2},$$
ou encore
$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|v_\varepsilon\|_{H_0^1} \leq \|v\|_{H_0^1}.$$
Comme v est la limite faible de $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ dans H_0^1, cette inégalité implique la convergence forte par un résultat classique d'analyse fonctionnelle.

8. On soustrait les deux équations vérifiée par $(v_\varepsilon, p_\varepsilon)$ et (v, p), et on trouve

$$\nabla(p_\varepsilon - p) = \Delta(v_\varepsilon - v).$$

Comme $v_\varepsilon - v$ tend vers 0 dans H^1 fort, on obtient que $\Delta(v_\varepsilon - v)$ converge vers 0 dans H^{-1} fort. D'après l'inégalité de Necas, cela montre que $p_\varepsilon - p$ tend vers 0 dans L^2 fort.

Partie III- Estimation de l'erreur :

1. L'obtention du système vérifié par les erreurs est une simple soustraction.
On prend alors w_ε comme fonction test dans la première équation et q_ε comme fonction test dans la seconde. Il vient, en intégrant par parties le terme en laplacien de pression,

$$\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\nabla q_\varepsilon\|_{L^2} = \varepsilon \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q_\varepsilon \, dx \leq \varepsilon \|\nabla p\|_{L^2}\|\nabla q_\varepsilon\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla q_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla p\|_{L^2}^2.$$

En absorbant le premier terme du membre de droite par le membre de gauche, on trouve l'inégalité souhaitée. Par définition de w_ε, l'estimation de $\|v - v_\varepsilon\|_{H^1}$ s'en suit.

2. On revient encore une fois à l'équation vérifiée par $(w_\varepsilon, q_\varepsilon)$ pour écrire

$$\nabla q_\varepsilon = \Delta w_\varepsilon,$$

d'après l'inégalité de Necas, il vient

$$\|q_\varepsilon\|_{L^2} \leq C\|\nabla q_\varepsilon\|_{H^{-1}} \leq C\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2} \leq C'\sqrt{\varepsilon}.$$

3. Il s'agit tout simplement d'un problème de Stokes avec donnée au bord homogène et second membre w_ε dans H_0^1 et donc en particulier dans H^{-1}.
Comme l'ouvert est régulier, le théorème de régularité elliptique s'applique et montre que, dès lors que w_ε est dans L^2, la solution $(z_\varepsilon, r_\varepsilon)$ est dans $(H^2(\Omega))^d \times H^1(\Omega)$ et qu'en plus on a une estimation du type de celle demandée.

4. On effectue les manipulations proposées pour obtenir

$$\int_\Omega \nabla z_\varepsilon : \nabla w_\varepsilon \, dx + \int_\Omega \nabla r_\varepsilon \cdot w_\varepsilon \, dx = \|w_\varepsilon\|_{L^2}^2,$$

et

$$\int_\Omega \nabla w_\varepsilon : \nabla z_\varepsilon \, dx + \int_\Omega \nabla q_\varepsilon \cdot z_\varepsilon \, dx = 0.$$

Comme div $z_\varepsilon = 0$, le second terme ci-dessus est nul et on obtient

$$\|w_\varepsilon\|_{L^2}^2 = \int_\Omega \nabla r_\varepsilon \cdot w_\varepsilon \, dx = -\int_\Omega r_\varepsilon \mathrm{div}\, w_\varepsilon = \varepsilon \int_\Omega \Delta(p - q_\varepsilon) r_\varepsilon, \, ds = \varepsilon \int_\Omega \nabla(q_\varepsilon - p)\cdot \nabla r_\varepsilon.$$

Il vient

$$\|w_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon(\|\nabla q_\varepsilon\|_{L^2} + \|\nabla p\|_{L^2})\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2} \leq 2\varepsilon\|\nabla p\|_{L^2}\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2}.$$

5. Il suffit de combiner les inégalités des deux questions précédentes.

6. Il s'agit d'un problème de Laplace-Neumann. L'existence et l'unicité d'une solution à moyenne nulle est assurée par la condition de compatibilité qui est vérifiée ici car q_ε est elle-même à moyenne nulle.
L'inégalité $\|q_\varepsilon\|_{H^{-1}} \leq \|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^2}$ est une conséquence immédiate de la définition de la norme H^{-1}.
Pour la seconde propriété, on prend simplement φ_ε comme fonction test dans le problème étudié.

7. Il s'agit d'un problème de Stokes avec terme source en divergence dont l'existence et unicité de la solution est assurée dès lors que ce terme source est à moyenne nulle, ce qui est bien le cas ici.
Par ailleurs, on dispose d'un théorème de régularité elliptique pour ce problème qui donne exactement les propriétés demandées.

8. En prenant Φ_ε comme fonction test dans l'équation $-\Delta w_\varepsilon + \nabla q_\varepsilon = 0$, on trouve

$$\int_\Omega q_\varepsilon \underbrace{\mathrm{div}\, \Phi_\varepsilon}_{=\varphi_\varepsilon} \, dx = \int_\Omega \nabla w_\varepsilon : \nabla \Phi_\varepsilon \, dx.$$

9. On combine les résultats précédents

$$\|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2 = \int_\Omega q_\varepsilon\varphi_\varepsilon\,dx = \int_\Omega \nabla w_\varepsilon : \nabla\Phi_\varepsilon\,dx$$
$$= \int_\Omega w_\varepsilon(-\Delta\Phi_\varepsilon)\,dx \leq \|w_\varepsilon\|_{L^2}\|\Phi_\varepsilon\|_{H^2} \leq C\|w_\varepsilon\|_{L^2}\|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^2},$$

ce qui fournit
$$\|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^2} \leq C\|w_\varepsilon\|_{L^2},$$
et donc
$$\|q_\varepsilon\|_{H^{-1}} \leq C\|w_\varepsilon\|_{L^2}.$$
Comme on a déjà obtenu une estimation en ε pour $\|w_\varepsilon\|_{L^2}$, l'estimation d'erreur en pression en norme H^{-1} s'en suit.

Partie IV- Le problème de Navier-Stokes stationnaire :

1. Il suffit d'utiliser l'inégalité de Hölder avec les exposants 3, 2 et 6 (étant entendu que $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$) ainsi que l'injection de Sobolev $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ valable en dimension inférieure ou égale à 3.
2. La plupart des termes se traite de la même façon que dans le cas linéaire. Seul le terme non-linéaire nécessite une attention particulière.

   Plus précisément, en prenant $w \in (\mathcal{D}(\Omega))^d$ dans $b(v_\varepsilon, v_\varepsilon, w)$, le premier terme est déjà sous la forme adéquate, quand au second terme il se traite ç l'aide d'une intégration par parties et fait apparaître le terme en $1/2(\text{div } v_\varepsilon)v_\varepsilon$ dans l'équation.

   On ne s'attend pas à trouver une trace de ce nouveau terme dans le problème limite car la divergence du champ de vitesse limite sera nulle. Néanmoins, la présence de ce terme additionel est fort utile sur le problème approché. Il est là pour faire en sorte que le terme non-linéaire ne contribue pas à l'estimation d'énergie bien que v_ε ne soit pas à divergence nulle. Concrètement cela signifie que si on prend $w = v_\varepsilon$ dans le problème approché, le terme en b s'écrit

   $$b(v_\varepsilon, v_\varepsilon, v_\varepsilon) = 0,$$

   par un calcul immédiat à partir de la définition de b qui n'utilise aucune propriété de v_ε.
3. D'après les considérations précédentes, l'estimation d'énergie pour le problème s'écrit exactement de la même façon que dans le cas linéaire

   $$\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2} + \varepsilon\|\nabla p_\varepsilon\|_{L^2}^2 = \langle f, v_\varepsilon\rangle_{H^{-1},H_0^1},$$

   ce qui donne les deux premières bornes souhaitées, exactement comme dans la partie linéaire.

   Pour obtenir la borne L^2 sur la pression avec l'inégalité de Necas il faut estimer la norme H^{-1} du gradient de pression en partant de l'égalité

   $$\nabla p_\varepsilon = f + \Delta\varepsilon - (v_\varepsilon\cdot\nabla)v_\varepsilon - \frac{1}{2}(\text{div } v_\varepsilon)v_\varepsilon.$$

   La nouveauté provient du terme non-linéaire encore une fois. Celui-ci s'estime comme suit (grâce à la question 1)
   $$\forall w \in (H_0^1(\Omega))^d,\ \ |b(v_\varepsilon, v_\varepsilon, w)| \leq C\|v_\varepsilon\|_{H^1}^2\|w\|_{H^1},$$
   ce qui montre que
   $$\left\|(v_\varepsilon\cdot\nabla)v_\varepsilon + \frac{1}{2}(\text{div } v_\varepsilon)v_\varepsilon\right\|_{H^{-1}} \leq C\|v_\varepsilon\|_{H^1}^2.$$

   Comme on a déjà une borne H^1 sur v_ε, le résultat attendu vient.
4. L'extraction de sous-suite faiblement convergentes est maintenant classique. Il faut ensuite invoquer la compacité de l'injection de Sobolev sous-critique $H^1(\Omega) \subset L^3(\Omega)$ pour obtenir la convergence forte attendue.
5. Là encore tous les termes linéaires se traitent comme dans les parties précédentes. Il reste à justifier le passage à la limite dans le terme non-linéaire ; d'après la question 1 on voit que la convergence forte dans L^3 de v_ε et la convergence faible dans H^1 de v_ε suffisent à passer à la limite dans ce terme dans H^{-1} et donc au sens des distributions.

6. La convergence forte de la vitesse s'obtient d'abord en passant à la limite dans l'égalité d'énergie exactement comme dans le cas linéaire (on utilise à nouveau de façon fondamentale le fait que le terme en $b(.,.,.)$ ne contribue pas à cette égalité !).

   Une fois cette convergence forte établie on en déduit la convergence forte dans H^{-1} du terme bilinéaire et donc du gradient de pression. L'inégalité de Necas permet alors de conclure.