Option B : Devoir à la maison

Systèmes hyperboliques linéaires

1 A propos de la condition d'hyperbolicité

On s'intéresse dans cet exercice à la résolution d'un **système** de transport monodimensionnel à coefficients constants de la forme

$$\begin{cases} \partial_t U + A\partial_x U = 0, & \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ U(0,x) = U_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où $U(t,x) = \begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix}$ est une inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et A une matrice carrée de taille 2. La donnée initiale est supposée régulière et à support compact.

1. On suppose que A est diagonalisable à valeurs propres réelles ; $A = P^{-1}DP$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que le problème (1) admet une unique solution U que l'on calculera explicitement en fonction de U_0, de P et des λ_i.
   (b) Vérifier qu'il existe une constante $C > 0$ qui dépend de A, telle que
   $$\sup_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \|U(t,x)\| \leq C\|U_0\|_\infty.$$
   (c) On suppose que A est symétrique réelle. Démontrer que la solution U de (1) vérifie
   $$\forall t \geq 0, \ \ \|U(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$
2. On souhaite comprendre ce qui passe dans le cas d'une matrice qui n'est pas diagonalisable.
   (a) Dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que (1) a une unique solution que l'on calculera explicitement en fonction de U_0.
   Est-ce que la solution U est bornée sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$? Démontrer tout de même que :
   $$\forall T > 0, \ \exists C_T > 0, \ \ \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}} \|U(t,x)\| \leq C_T\|U_0\|_{C^1}. \tag{2}$$
   (b) On considère maintenant le cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que, pour tout $n \geq 1$, la fonction U_n définie par
   $$U_n(t,x) = e^{tn} \begin{pmatrix} \sin(nx) \\ -\cos(nx) \end{pmatrix},$$
   est solution du système (1) pour une donnée initiale U_0 bien choisie.
   En déduire qu'une inégalité du type (2) ne peut pas être vraie dans ce cas.

Vocabulaire
En conclusion de cette analyse, on dira qu'un système de la forme (1) est **hyperbolique** si et seulement si

$$\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R}. \tag{HYP}$$

2 Schémas numériques

On considère un système de la forme (1) sous la condition d'hyperbolicité (HYP).

2.1 Etude générale

1. Programmer dans SCILAB les deux schémas suivants :

$$\frac{1}{\Delta t}(U_i^{n+1} - U_i^n) + A\frac{1}{\Delta x}(U_i^n - U_{i-1}^n) = 0, \ \ \forall n \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}, \qquad \text{(SDAG)}$$

$$\frac{1}{\Delta t}(U_i^{n+1} - U_i^n) + A\frac{1}{\Delta x}(U_{i+1}^n - U_i^n) = 0, \ \ \forall n \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}. \qquad \text{(SDAD)}$$

Vérifier en choisissant par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

que ces deux schémas sont instables pour toutes valeurs de Δt et Δx. Quelle est la raison de ce phénomène ? Dans la suite, on va proposer de nouveaux schémas qui présentent de meilleures propriétés de stabilité.

2. Démontrer qu'on peut écrire toute matrice A vérifiant (HYP) sous la forme

$$A = A^+ + A^-, \text{ avec } A^+A^- = A^-A^+ = 0, \ \mathrm{Sp}(A^+) \subset \mathbb{R}^+ \text{ et } \mathrm{Sp}(A^-) \subset \mathbb{R}^-. \qquad (4)$$

Comment calcule-t'on A^+ et A^- en pratique ?

3. On considère maintenant le schéma suivant

$$\frac{1}{\Delta t}(U_i^{n+1} - U_i^n) + A^+\frac{1}{\Delta x}(U_i^n - U_{i-1}^n) + A^-\frac{1}{\Delta x}(U_{i+1}^n - U_i^n) = 0, \ \ \forall n \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}. \qquad \text{(SD)}$$

   (a) Démontrer que ce schéma est L^∞-stable sous la condition CFL

$$\max(\rho(A^+), \rho(A^-))\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \qquad (5)$$

   (b) Programmer le schéma (SD) dans SCILAB et illustrer ces propriétés de stabilité sur l'exemple (3) donné plus haut.

   (c) Démontrer que ce schéma est consistant à l'ordre 1 en temps et en espace. Illustrer cette propriété à l'aide de votre programme.

   (d) Choisir des données initiales u_0 et v_0 (non triviales !) et comparer sur les mêmes figures la solution exacte au temps final et la solution approchée au temps final. On prendra garde au fait que, comme la solution est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, chaque figure doit comporter deux graphes : celui de u et celui de v.

   (e) Démontrer que si A est symétrique, on peut alors supposer que A^+ et A^- sont symétriques. Dans ce cas, en prenant le produit scalaire (dans $\mathbb{R}^2$) de l'équation (SD) avec U_i^n puis en sommant sur i, démontrer que le schéma est L^2-stable sous la condition CFL

$$\rho(A)\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

4. La décomposition $A = A^+ + A^-$ proposée ci-dessus n'est pas toujours agréable à calculer (en particulier si la matrice A dépend de x, ce qui n'est pas le cas ici ...). On propose donc de choisir $A^+ = (A + \lambda\mathrm{Id})/2$ et $A^- = (A - \lambda\mathrm{Id})/2$.

   (a) Est-ce que $A^\pm$ vérifient (4).

   (b) Démontrer que si $\lambda \geq \rho(A)$, alors on a $\mathrm{Sp}(A^\pm) \subset \mathbb{R}^\pm$.

   (c) Pour de telles valeurs de λ, comment s'écrit la condition (5). Quelle valeur de λ a-t'on intérêt à choisir ?

   (d) On prend $\lambda = \Delta x/\Delta t$. Réécrire astucieusement le schéma (SD). Quel schéma retrouve-t'on ici ? D'après ce qui précède, sous quelle condition liant $\Delta t, \Delta x, \lambda$ et la matrice A, ce schéma est-il L^∞-stable ?

   (e) Illustrer à nouveau numériquement les propriétés de ce schéma (i.e. (SD) avec la nouvelle décomposition de A) sur l'exemple (3).

2.2 Application à un modèle de trafic routier

On reprend la modélisation du trafic routier vue en cours. On suppose cette fois que l'ensemble des véhicules peut être séparé en deux catégories : les véhicules “lents” et les véhicules “rapides”. On suppose que l'autoroute possède plusieurs voies de circulation et donc que des véhicules lents et rapides peuvent coexister en tout point x et à tout instant t. On note ρ_r et ρ_l les densités respectives des véhicules rapides et des véhicules lents.

On suppose que pour tout (t, x), les véhicules lents ont une vitesse $v_l(t, x)$ alors que les véhicules rapides ont une vitesse $v_r(t, x)$.

On admet dans ces conditions, que le principe de conservation des véhicules (en réalité le principe de conservation de chacune des catégories de véhicules [1]) s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho_l + \partial_x(\rho_l v_l) = 0, \\ \partial_t \rho_r + \partial_x(\rho_r v_r) = 0. \end{cases}$$

Pour compléter le modèle il faut maintenant relier v_l et v_r à ρ_l et ρ_r. En l'absence d'interaction entre les deux groupes de véhicules, on peut admettre que $v_l(t, x) = V_l$ et que $v_r(t, x) = V_r$ pour tout (t, x) où $V_r > V_l$ sont deux constantes strictement positives. Néanmoins, en pratique, les deux groupes de véhicules interagissent :

- Si la densité de véhicules lents est importante, alors les véhicules rapides sont obligés de ralentir.
- Si la densité de véhicules rapides est importante, alors les véhicules lents sont obligés d'accélérer un peu pour faciliter le passage des véhicules rapides.

On va modéliser ce comportement en adoptant les lois empiriques suivantes :

$$v_l = V_l + \beta \frac{\rho_r}{\rho_l},$$

$$v_r = V_r - \beta \frac{\rho_l}{\rho_r}.$$

1. Bien que ce modèle soit très critiquable, expliquer en quelques phrases pourquoi on peut espérer qu'il reflète le comportement attendu.
2. Montrer que le modèle obtenu *in fine*, peut se mettre sous la forme générale étudiée dans la section 2.1, avec $U = \begin{pmatrix} \rho_r \\ \rho_l \end{pmatrix}$. On précisera la matrice A du système.
3. Prenons les paramètres physiques suivants :

   $$V_r = 2, \;\; V_l = 1, \;\; \beta = 0.3, \;\; T = 1,$$

   et les paramètres numériques :

   $$N = 800, \;\; M = 1600.$$

   Proposer une animation SCILAB qui montre l'évolution du trafic sur cette autoroute (de longueur 1 et avec conditions aux limites périodiques) à partir des données initiales suivantes :

   $$\rho_{r,0}(x) = 0.2 + 0.2 \times \frac{1}{2} \left(\tanh\left(\frac{x - 1/8}{0.05}\right) - \tanh\left(\frac{x - 3/8}{0.05}\right)\right),$$

   $$\rho_{l,0}(x) = 0.5 + 0.3 \times \frac{1}{2} \left(\tanh\left(\frac{x - 5/8}{0.05}\right) - \tanh\left(\frac{x - 7/8}{0.05}\right)\right).$$

   Commenter les résultats obtenus. Est-ce que le comportement observé semble refléter les propriétés attendues du modèle ?

1. on suppose implicitement qu'une Ferrari ne va pas subitement se transformer en 2CV et réciproquement