La méthode de la puissance pour les matrices symétriques positives

F. Boyer, Janvier 2016

Ce petit document fait écho au texte d'agreg option B sur les moteurs de recherche (2015-B2).

1. Il faut tout d'abord remarquer que pour **toute** matrice A (même rectangle !) la matrice $B = {}^tA.A$ (qui est carrée, notons d sa taille) est symétrique et positive.
   En effet, il suffit de calculer
   $$(Bx, y) = ({}^tA.Ax, y) = (Ax, Ay), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^d,$$
   ce qui montre bien la symétrie et par ailleurs le fait que
   $$(Bx, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$
   Au passage, on observe que B est définie positive si et seulement si A est injective.
   Tout ce qui précède s'applique également à la matrice $\tilde{B} = A.{}^tA$ qui, elle, est définie positive si et seulement si A est surjective.
2. Le texte s'intéresse de façon plus ou moins explicite à la méthode de la puissance pour la matrice $B = {}^tA.A$. Ceci dit, ce qui suit est valable pour toute matrice symétrique positive donc je vais désormais oublier la formule qui définit B.
   La méthode de la puissance revient à choisir une donnée initiale $x^0 \in \mathbb{R}^d$ et à calculer par récurrence
   $$x^{n+1} = \frac{Bx^n}{\|Bx^n\|},$$
   avec les précautions d'usage si Bx^n venait à s'annuler. Il est utile de voir que x^n, pour $n \geq 1$, s'écrit aussi
   $$x^n = \frac{B^n x^0}{\|B^n x^0\|}. \tag{1}$$
   Avec les hypothèses faites sur la matrice B je prétend que la méthode de la puissance converge toujours vers un vecteur propre de la matrice B (ou éventuellement vers 0).
   — Tout d'abord, comme B est **symétrique réelle**, elle est diagonalisable (en base orthonormée mais ça n'est pas forcément utile ici) et à valeurs propres réelles. On peut donc écrire
   $$\mathbb{R}^d = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(B - \lambda_i \mathrm{Id}), \tag{2}$$
   où les $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres distinctes de B.
   Par ailleurs, comme B est **positive**, toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles. Dorénavant on va les ordonner de la façon suivante $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_k \geq 0$.
   On décompose alors la donnée initiale x^0 grâce à (2) de la façon suivante
   $$x^0 = x_1^0 + \cdots + x_k^0,$$
   où x_i^0 est dans le sous-espace propre correspondant à la valeur propre λ_i.
   On peut donc calculer aisément
   $$B^n x^0 = \lambda_1^n x_1^0 + \cdots + \lambda_k^n x_k^0.$$
   Il s'agit de déterminer le terme principal (quand $n \to \infty$) dans cette écriture. Il s'agit de la contribution de la plus grande valeur propre qui intervient de façon non triviale (c'est-à-dire pour laquelle le x_i^0 correspondant n'est pas nul).
   Soit donc $1 \leq l \leq k$ le **plus petit** indice tel que $x_l^0 \neq 0$. Les écritures de x^0 et de $B^n x^0$ deviennent
   $$x^0 = x_l^0 + \cdots + x_k^0,$$
   $$B^n x^0 = \lambda_l^n x_l^0 + \cdots + \lambda_k x_k^0,$$
   avec cette fois l'assurance que le premier terme est non nul et qu'il est "le plus gros" quand n est grand.

— Si $\lambda_l = 0$, c'est que $k = l$ et donc que $B^n x^0 = 0$ pour tout $n \geq 1$ et la méthode converge bien vers 0 (il s'agit du cas, très défavorable, où on a choisi une donnée initiale dans le noyau de B !).

— Si $\lambda_l > 0$, alors on peut écrire

$$B^n x^0 = \lambda_l^n \left(x_l^0 + \left(\frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l}\right)^n x_{l+1}^0 + \cdots + \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_l}\right)^n x_k^0 \right).$$

On déduit tout d'abord que

$$\frac{1}{\lambda_l^n} B^n x^0 \xrightarrow[n\to\infty]{} x_l^0, \tag{3}$$

vu que les quotients λ_i/λ_l sont tous strictement inférieurs à 1 quand $j > l$.
On prend maintenant la norme de (3), sans oublier que $\lambda_l > 0$, pour obtenir

$$\frac{1}{\lambda_l^n} \|B^n x^0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x_l^0\|, \tag{4}$$

et donc par quotient

$$x^n = \frac{B^n x^0}{\|B^n x^0\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x_l^0}{\|x_l^0\|}.$$

Ce qui montre bien que la suite des itérées fournie par la méthode de la puissance converge vers un vecteur propre normalisé pour la valeur propre λ_l. On se convainc aisément par ailleurs que $(\|Bx^n\|)_n$ converge vers la valeur propre λ_l.

3. Quelles sont les différences avec le théorème de convergence usuel de la méthode de la puissance, valable pour toute matrice ou presque ?
   — On est assurés de la convergence de la suite vers une certaine limite **quelle que soit** la donnée initiale.
   — Cette limite est soit nulle, soit un vecteur propre de la matrice.
   — Pour assurer que la valeur propre limite soit la valeur propre la plus grande, il faut assurer que $x_1^0 \neq 0$, c'est-à-dire que la composante de la donnée initiale selon le sous-espace propre correspondant à la valeur propre principale soit non nulle. C'est exactement l'hypothèse usuelle de convergence pour la méthode la puissance dans le cas général.

4. Dans le cas du texte, comment peut-on assurer que l'on converge bien vers la valeur propre principale ?

   Comme A est une matrice à coefficients positifs ou nuls, il en est de même de $B = {}^tA.A$ et on peut donc appliquer la théorie de Perron-Frobenius (hors programme mais qu'il est bon de connaître au moins dans les grandes lignes) qui nous dit qu'une telle matrice possède un vecteur propre e_1 associé à λ_1 dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

   Ainsi, si on prend x^0 dont tous les coefficients sont strictement positifs (par exemple $x^0 = {}^t(1, ..., 1)$), on est assurés que $x_1^0 \neq 0$ et tout marche sur des roulettes. Je ne détaille pas plus pour vous laisser un peu y réfléchir ...