Fonctions convexes

Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sans jamais oser le demander

1 Dimension 1

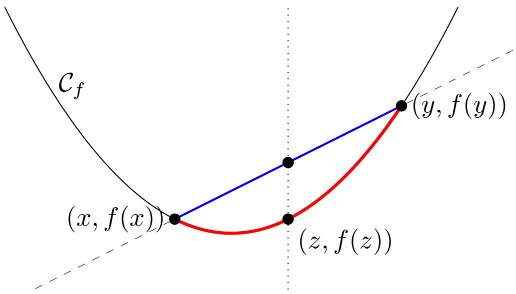
Définition 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad \forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1]. \tag{1}$$

Elle est strictement convexe si on peut mettre l'inégalité stricte pour $\lambda \in]0,1[$ et $x \neq y$.
Une fonction f est dite (strictement) concave si $-f$ est (strictement) convexe.

- Le nombre $\lambda x + (1-\lambda)y$, $\lambda \in [0,1]$ est une **combinaison convexe** de x et y, c'est-à-dire un barycentre à coefficients positifs (voir Exercice 1).
- **Interprétation géométrique :** Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé usuel de $\mathbb{R}^2$. On fixe deux points $x \leq y \in I$.
  Tout point $z \in [x,y]$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, avec $\lambda \in [0,1]$.
  - Le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse z a pour coordonées $(z, f(z))$.
  - Le point de la corde issue des points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ d'abscisse z a pour coordonnées $(z, \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))$.



Ainsi, une fonction est convexe si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **en-dessous** de n'importe laquelle de ses cordes, entre les deux extrémités de la corde en question.

Exercice 1

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si, pour tout $n \geq 2$, pour tout choix de points $x_1, ..., x_n \in I$ et de coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_i \geq 0, \forall i \in \{1, ..., n\},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

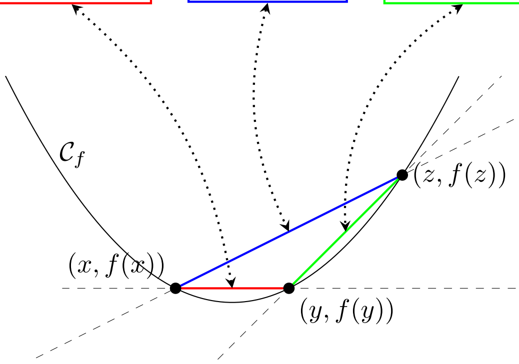
on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Proposition 2 (Inégalité des pentes)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $x < y < z$ trois points de I. Alors on a la double inégalité

$$\boxed{\frac{f(y)-f(x)}{y-x}} \leq \boxed{\frac{f(z)-f(x)}{z-x}} \leq \boxed{\frac{f(z)-f(y)}{z-y}}.$$



Preuve :

— Pour tout $x \in I$ et $y \in I$, $y \neq x$, on définit les taux d'accroissements

$$g_x(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

On remarque que $g_x(y) = g_y(x)$.

— Si on montre que les fonctions g_a sont toutes croissantes sur $]-\infty, a[\cap I$ et sur $]a, +\infty[\cap I$, nous aurons bien le résultat attendu en écrivant

$$g_x(y) \leq g_x(z) = g_z(x) \leq g_z(y).$$

— On fixe donc $a \in I$ et on veut montrer que g_a est croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, a[\cap I$ et $]a, +\infty[\cap I$.

Soient donc $x, y \in I$ tels que $a < x < y$. On veut montrer que $g_a(x) \leq g_a(y)$ soit encore

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}.$$

Comme $x-a$ et $y-a$ sont strictement positifs, cette inégalité est équivalente à

$$(f(x)-f(a))(y-a) \leq (f(y)-f(a))(x-a),$$

ou encore

$$f(x)(y-a) \leq (x-a)f(y) + f(a)(y-x),$$

et finalement

$$f(x) \leq \frac{x-a}{y-a}f(y) + \frac{y-x}{y-a}f(a).$$

Si on pose $\lambda = \frac{x-a}{y-a} \in]0,1[$, cette inégalité s'écrit

$$f(x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda)f(a),$$

et comme par ailleurs, on a

$$x = \lambda y + (1-\lambda)a,$$

on voit que l'inégalité attendue est bien exactement de la forme (1), ce qui conclut la preuve dans le cas $a < x < y$.

Le cas $x < y < a$ se traite de façon similaire (en prenant garde éventuellement aux changements de sens dans les inégalités quand on multiplie par des quantités négatives).

■

Théorème 3

On suppose que I est ouvert. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Si f est convexe, alors on a
   — f est continue sur I.
   — f admet des dérivées à gauche et à droite en tout point de I et on a
   $$f'(x^-) \leq f'(x^+) \leq f'(y^-), \ \ \forall x, y \in I, \text{tq } x < y.$$
2. Réciproquement, si f est dérivable dans I et que f' est croissante alors f est convexe.

Preuve :

1. Soit $x \in I$ et $r > 0$ tel que $[x-r, x+r] \subset I$. D'après l'inégalité des pentes, on a pour tout $\varepsilon > 0$,
   $$\frac{f(x)-f(x-r)}{r} \leq \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \leq \frac{f(x+r)-f(x)}{r},$$
   et donc, en particulier les quotients
   $$g_x(x+\varepsilon) = \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon},$$
   restent bornés quand ε tend vers 0, ce qui montre la continuité à droite de f. Par ailleurs, l'inégalité des pentes permet de montrer que $\varepsilon \mapsto g_x(x+\varepsilon)$ est une fonction croissante (et minorée) de ε. Ainsi la limite
   $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon},$$
   existe.
   Le même raisonnement montre la continuité à gauche de f ainsi que l'existence de la dérivée à gauche.
   Enfin, on utilise à nouveau l'inégalité des pentes pour obtenir
   $$\frac{f(x)-f(x-\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}, \ \ \forall \varepsilon > 0,$$
   et donc par passage à la limite
   $$f'(x^-) \leq f'(x^+).$$
2. On fixe $x < y$ dans I et $\lambda \in]0,1[$. On applique le théorème des accroissements finis entre x et $\lambda x + (1-\lambda)y$ d'une part et entre $\lambda x + (1-\lambda)y$ et y d'autre part, ce qui nous donne l'existence d'un ξ_1 et d'un ξ_2 vérifiant
   $$\xi_1 \in]x, \lambda x + (1-\lambda)y[, \text{ et } f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x) = f'(\xi_1)(1-\lambda)(y-x),$$
   $$\xi_2 \in]\lambda x + (1-\lambda)y, y[, \text{ et } f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) = f'(\xi_2)\lambda(y-x).$$
   Ainsi, nous avons
   $$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda(1-\lambda)(y-x)\big[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)\big].$$
   Comme par construction nous avons $\xi_1 < \xi_2$ et que f' est croissante, nous avons bien prouvé la convexité de f.
   Si f' est strictement croissante, le même calcul montre que f est strictement convexe.

■

Remarque 4

— Si I n'est pas ouvert, la continuité au bord n'est pas assurée (par exemple si on prend $I = [0,1]$ et la fonction f nulle sur $]0,1]$ et qui vaut 1 en 0, on a bien une fonction convexe non continue en 0.
— Une fonction convexe n'est pas nécessairement dérivable. On peut penser à la fonction $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$ par exemple.
— Si f est deux fois dérivable sur I, alors elle est convexe (resp. strictement convexe) si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I (resp. $f'' \geq 0$ sur I et $\{x \in I, f''(x) = 0\}$ est d'intérieur vide).

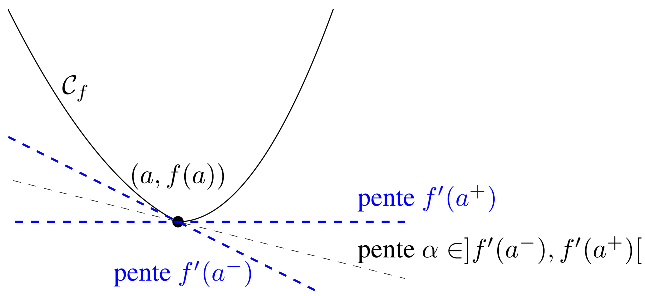
Exemple 5

— $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
— $x \mapsto \log(x)$ est concave sur $\mathbb{R}_*^+$.

Applications : inégalités arithmético-géométriques, inégalité de Young, etc ...

Proposition 6 (Deuxième caractérisation géométrique)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a \in I$. Alors, pour tout $\alpha \in [f'(a^-), f'(a^+)]$, la droite de pente α passant par le point $(a, f(a))$ est située sous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.



En particulier, si f est dérivable $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de n'importe laquelle de ses tangentes. Réciproquement, si f est dérivable et si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes, alors f est convexe.

Preuve :

La première partie de la proposition découle immédiatement de l'inégalité des pentes.

Il ne nous reste qu'à montrer le dernier point. Supposons que f est dérivable et que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes. On fixe $x < y$ dans I. En écrivant l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $(x, f(x))$ puis en $(y, f(y))$ nous obtenons les inégalités

$$f(y) \geq f(x) + (y - x)f'(x),$$
$$f(x) \geq f(y) + (x - y)f'(y).$$

Ceci s'écrit encore (attention on a $y - x > 0$ et $x - y < 0$)

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq f'(x),$$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y),$$

et implique donc que $f'(x) \leq f'(y)$. Ceci montre que f' est croissante et donne donc bien le résutat. ■

Exercice 2 (Fonctions convexes et fonctions affines)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On note $\text{Aff}(I)$ l'ensemble des fonctions **affines** définies sur I.

1. Montrer qu'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $x \in I$, on a

$$\varphi(x) = \sup_{\substack{h \in \text{Aff}(I) \\ h \leq \varphi}} h(x).$$

2. **Application : Inégalité de Jensen**. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et μ une mesure de probabilité sur I, alors pour toute fonction $f \in L^1(I, \mu)$ nous avons

$$\varphi\left(\int_I f d\mu\right) \leq \int_I \varphi \circ f \, d\mu,$$

cette dernière intégrale étant éventuellement égale à $+\infty$.

Il est bon de remarquer que, si μ est une mesure de probas discrète, l'inégalité de Jensen donne exactement le résultat de l'exercice 1.

Corrigé :

1. Pour n'importe quelle fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$, on définit
$$\tilde{\varphi}(x) = \sup_{\substack{h\in \mathrm{Aff}(I)\\ h\leq\varphi}} h(x), \ \ \forall x \in I.$$

— Si φ est convexe, on a vu qu'il existe des droites sous la courbe $\mathcal{C}_f$, c'est-à-dire que l'ensemble des fonctions affines h inférieures à φ est non vide et en particulier $\tilde{\varphi}$ est bien définie et vérifie $\tilde{\varphi} \leq \varphi$.
Pour tout point $x \in I$, on a même vu qu'on peut trouver une fonction affine h telle que $h(x) = \varphi(x)$ et $h \leq \varphi$ (en choisissant sa pente dans l'intervalle $[\varphi'(x^-), \varphi'(x^+)]$). Ceci prouve bien finalement que $\tilde{\varphi} = \varphi$.

— Supposons maintenant que $\tilde{\varphi} = \varphi$. En particulier, cela implique que l'ensemble H des fonctions affines h telles que $h \leq \varphi$ est non vide.
On fixe une telle fonction affine $h \in H$ et $x, y \in I$, $\lambda \in [0, 1]$. Comme h est affine, on a l'égalité
$$h(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y).$$
Comme $h \leq \varphi$ nous en déduisons
$$h(\lambda x + (1 - \lambda y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y).$$
Cette inégalité étant vraie pour tout $h \in H$, on peut prendre le supremum par rapport à h et obtenir
$$\tilde{\varphi}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y).$$
Comme $\tilde{\varphi} = \varphi$, on a bien l'inégalité de convexité pour φ.

2. On reprend les notations précédentes. Pour toute fonction affine h, que l'on écrit $h(t) = \alpha t+\beta$, nous avons
$$h\left(\int_I f\,d\mu\right) = \alpha \int_I f\,d\mu + \beta,$$
et donc, comme $\int_I d\mu = 1$, nous avons
$$h\left(\int_I f\,d\mu\right) = \int_I h \circ f\,d\mu \leq \int_I \varphi \circ f\,d\mu$$
la dernière intégrale étant éventuellement infinie.
On prend maintenant le supremum par rapport à $h \in H$ et on obtient le résultat, grâce à la question précédente.

■

2 Dimension supérieure (finie)

La définition de la convexité est inchangée si ce n'est que l'on doit se placer sur un ensemble qui est lui-même convexe pour qu'elle ait un sens (les intervalles sont les convexes de $\mathbb{R}$!)

Définition 7

Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^d$. Une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est dite convexe si
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \ \ \forall x, y \in C, \forall\lambda \in [0, 1].$$

Théorème 8 (Continuité)

Les fonctions convexes sont continues en tout point de l'intérieur de leur domaine de définition.

Comme en dimension 1, la continuité au bord du domaine de définition n'est pas assurée. On suit la preuve demandée dans le sujet Analyse et Probabilités 2011. Celle-ci se fait en deux temps à l'aide de deux lemmes.

Lemme 9

Soit C un convexe symétrique (*i.e* $x \in C \Leftrightarrow -x \in C$) qui contient 0. Soit F une fonction convexe sur C, majorée (attention F n'est pas supposée bornée) et telle que $F(0) = 0$. Alors on a

$$\sup_{x \in C} F(x) = \sup_{x \in C} |F(x)|.$$

En particulier, on en déduit que F est bornée.

Preuve :

Pour tout x de C on a $F(x) \leq |F(x)| \leq \sup_{y \in C} |F(y)|$ et on en déduit immédiatement

$$\sup_{x \in C} F(x) \leq \sup_{x \in C} |F(x)|.$$

Supposons l'inégalité stricte. Alors il existe x_0 tel que $|F(x_0)| > \sup_{x \in C} F(x)$. Comme $F(x_0) \leq \sup_{x \in C} F(x)$, on en déduit que $F(x_0) < |F(x_0)|$ et $F(x_0) < 0$. Mais puisque C est symétrique, on a $-x_0$ dans C et on a par convexité :

$$0 = F(0) = F\left(\frac{x_0 - x_0}{2}\right) \leq \frac{1}{2}F(x_0) + \frac{1}{2}F(-x_0).$$

On en déduit que $F(-x_0) \geq -F(x_0) = |F(x_0)| > \sup_{x \in C} F(x)$, ce qui est absurde. ■

Lemme 10

Soit g une fonction convexe définie sur la boule fermée pour la norme 1 de centre 0 et de rayon α. On note $(e_1, \cdots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.
Alors on a

$$\sup_{\|h\|_1 \leq \alpha} g(h) = \max_{i=1,\ldots,d} \Big(\max(g(\alpha e_i), g(-\alpha e_i)) \Big).$$

Preuve :

Posons $M = \max_{i=1,\ldots,d} \Big(\max(g(\alpha e_i), g(-\alpha e_i)) \Big)$. Comme g est définie en ces points, on est en train de regarder le maximum de $2d$ valeurs, donc M est fini. De plus les vecteurs $h = \pm\alpha e_i$ vérifient $\|h\|_1 = \alpha$ donc on a clairement

$$M \leq \sup_{\|h\|_1 \leq \alpha} g(h).$$

Pour montrer l'inégalité inverse, prenons $h = (h_1, \ldots, h_d)$ vérifiant $\|h\|_1 \leq \alpha$. Il existe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d \in \{\pm 1\}$ tels que $\varepsilon_i h_i = |h_i| \geq 0$ pour tout i. Posons $t_i = \varepsilon_i h_i / \alpha$. Alors on a $t_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^d t_i = 1$ donc on peut écrire par convexité

$$g(h) = g\left(\sum_{i=1}^d t_i \alpha \varepsilon_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^d t_i g(\alpha \varepsilon_i e_i) \leq \sum_{i=1}^d t_i M = M.$$

Ainsi le lemme est démontré. ■

Preuve (du Théorème 8):

Soit f une fonction convexe et x un point à l'intérieur de son domaine de définition. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que f est bien définie sur la boule fermée pour la norme 1 de centre x et de rayon α.

Posons alors $g(h) = f(x+h) - f(x)$ pour h dans C, la boule fermée pour la norme 1 centrée en 0 et de rayon α. Remarquons tout d'abord que g est convexe sur C. En effet pour $t \in [0, 1]$, et $h_1, h_2 \in C$,

$$\begin{aligned} g(th_1 + (1-t)h_2) &= f(x + th_1 + (1-t)h_2) - f(x) = f(t(x + h_1) + (1-t)(x + h_2)) - f(x) \\ &\leq tf(x + h_1) + (1-t)f(x + h_2) - f(x) \leq t(f(x + h_1) - f(x)) + (1-t)(f(x + h_2) - f(x)) \\ &\leq tg(h_1) + (1-t)g(h_2). \end{aligned}$$

De plus, il est clair que $g(0) = 0$.

Les fonctions partielles $g_i(t) = g(0, \cdots, 0, t, 0, \cdots, 0)$ sont convexes et définies chacune sur un intervalle contenant 0 dans son intérieur. Elles sont donc continues en 0 (en tant que fonction convexes d'une seule variable, voir le Théorème 3). Puisqu'elles sont en nombre fini, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\alpha > 0$ commun à toutes les fonctions partielles pour lequel on a

$$\forall i = 1, \dots, d, \;\; \forall t, \; |t| \leq \alpha \Rightarrow g_i(t) \leq |g_i(t)| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que $\max_{i=1,\dots,d} \max(g(te_i), g(-te_i)) \leq \varepsilon$ pour tout $|t| \leq \alpha$. En particulier, par le lemme 10, on en déduit que $\sup_{\|h\|_1 \leq t} g(h) \leq \varepsilon$.

En particulier, la fonction g est majorée sur $C = \overline{B}_1(0, t)$ qui est un convexe symétrique contenant 0 et donc par le lemme 9, on a

$$\sup_{\|h\|_1 \leq t} |g(h)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi on a montré,

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \alpha > 0, \; \forall h, \; \|h\|_1 \leq \alpha \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui exprime bien la continuité de la fonction f au point x. ■

Théorème 11 (Fonctions convexes différentiables)

Soit U un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^d$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U.

— La fonction f est convexe si et seulement si le graphe de f est situé au-dessus de tous ses hyperplans tangents.

— La fonction f est convexe si et seulement si sa différentielle est croissante (on dit aussi monotone) au sens suivant

$$\forall x, y \in U, \;\; (Df(x) - Df(y)).(x - y) \geq 0.$$

Si on utilise le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^d$ et la notion de gradient, cela s'écrit

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0.$$

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, nous avons

$$f \text{ est convexe} \iff D^2 f(x) \text{ est symétrique positive pour tout } x \in U.$$

Exemple 12

1. Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $b \in \mathbb{R}^d$. Alors la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle, \;\; \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

est convexe si et seulement si A est une matrice positive. Elle est strictement convexe si et seulement si A est définie positive.

2. Si $M \in M_{d,p}(\mathbb{R})$ est une matrice rectangle quelconque et $b \in \mathbb{R}^p$, la fonction définie par

$$f(x) = \|Mx - b\|_2^2, \;\; \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

est convexe.
Elle est strictement convexe si et seulement si Ker $M = \{0\}$.

La notion de convexité apparaît assez naturellement en optimisation essentiellement pour la raison suivante :

Théorème 13 (Convexité et extremums)

Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Nous avons les propriétés suivantes.

1. Si $x_0 \in \overset{\circ}{C}$ est un minimiseur local de f, alors c'est un minimiseur global.
   De plus, l'ensemble des minimiseurs (locaux et donc globaux) de f est un convexe (non vide) de C.
   Enfin, si f est strictement convexe, ce minimum est atteint en un unique point.
2. Si f est différentiable en un point $x_0 \in \overset{\circ}{C}$ et que ce point est un point critique de f (i.e. tel que $Df(x_0) = 0$), alors x_0 est un minimiseur (local et donc global) de f.

Attention : Ce théorème ne dit pas qu'une fonction convexe admet nécessairement un minimiseur ! Une condition supplémentaire est nécessaire pour en montrer l'existence. En général, on ajoute une condition dite *de coercivité* du type $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$.

Par exemple, les fonctions affines non constantes sont convexes mais ne sont pas minorées (et a fortiori n'admettent pas de minimiseur !) quand à la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$, elle est strictement convexe sur $\mathbb{R}$, minorée, mais n'admet pas de minimiseur.

Preuve :

1. Soit $x \in C$. La fonction réelle définie par
$$\varphi : t \in [0,1] \mapsto f((1-t)x_0 + tx),$$
est bien définie (ici on utilise la convexité de C) et convexe car f l'est (je vous laisse vous en convaincre). De plus, par hypothèse 0 est un minimum local de φ et donc par l'inégalité des pentes nous avons pour tout $0 < \delta < 1$
$$\frac{\varphi(\delta) - \varphi(0)}{\delta} \leq \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1 - 0},$$
ce qui s'écrit
$$\frac{f(x_0 + \delta(x - x_0)) - f(x_0)}{\delta} \leq f(x) - f(x_0). \tag{2}$$
Le membre de gauche est positif pour δ assez petit (car x_0 est un minimiseur local de f) et donc nous avons
$$f(x) \geq f(x_0),$$
pour tout $x \in C$. On a bien obtenu que x_0 est un minimiseur global.
Soit M l'ensemble des minimiseurs de f. Soient $x, y \in M$ et $\lambda \in [0,1]$. Par définition de la convexité nous avons
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \underbrace{f(x)}_{=\inf_C f} + (1-\lambda) \underbrace{f(y)}_{=\inf_C f} = \inf_C f,$$
et donc finalement $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \inf_C f$, ce qui prouve que $\lambda x + (1-\lambda)y \in M$ et donc la convexité de M.
Si f est strictement convexe et que M contient au moins deux éléments distincts x et y, alors le calcul précédent devient
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = \inf_C f,$$
ce qui est une contradiction manifeste.
2. On reprend les notations du point précédent et on observe qu'on peut passer à la limite quand $\delta \to 0$ dans (2), ce qui donne
$$Df(x_0).(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0),$$
et comme $Df(x_0) = 0$, on obtient bien que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in C$.

■

3 Un (petit) mot sur la dimension infinie

Encore une fois les définitions ne changent pas, mais la topologie se complique un peu. En particulier, il n'est plus vrai que toute fonction convexe est continue, c'est pourquoi tous les théorèmes d'optimisation convexe en dimension infinie font intervenir des hypothèses de continuité de f.

C'est un sujet plus délicat et, au niveau de l'agrégation, il convient d'être très prudent sur ce terrain. Mon conseil est de n'aborder ces questions que si c'est absolument indispensable et si vous vous sentez très à l'aise.