# Corrigé (partiel) du problème de la première épreuve du concours 3A de l'ENS Cachan 2011

## Préliminaires

1. Par définition, nous avons
$$e^{tA} = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
Il s'agit donc de justifier la dérivation terme à terme de la série de fonctions de terme général $u_k(t) = \frac{t^k}{k!} A^k$.
Les hypothèses du théorème du cours de Licence sont les suivantes :
   - La série $\sum_{k\geq 0} u_k(t)$ est convergente pour au moins une valeur de $t$ (en l'occurence pour toutes les valeurs de $t$).
   - Chaque fonction $u_k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ; c'est bien le cas ici car il s'agit d'un polynôme en $t$. On obtient même
$$u_0'(t) = 0, \;\; \forall t \in \mathbb{R},$$
$$u_k'(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k, \;\; \forall k \geq 1, \; \forall t \in \mathbb{R}.$$
   - La série de fonctions de terme général $u_k'$ converge localement uniformément sur $\mathbb{R}$. Pour cela, il nous suffit (ça n'est pas une condition nécessaire !) de vérifier la convergence normale de la série sur tout intervalle $[-R, R]$. Pour cela, on écrit (pour une norme d'algèbre sur l'ensemble des matrices)
$$\sup_{[-R,R]} \|u_k'\| = R^{k-1}(k-1)!\|A\|^k,$$
ce qui constitue bien une série numérique convergente.

   On peut donc dériver terme à terme et obtenir
$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \sum_{k\geq 1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = A \sum_{k\geq 1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} = Ae^{tA}.$$

2. D'après la question précédente, nous avons
$$\int_0^t Be^{sB}\, ds = \int_0^t \frac{d}{ds} e^{sB}\, ds = e^{tB} - e^{0B} = -I + e^{tB}.$$

3. L'application $f$ étant polynomiale (de degré 2) en les coordonnées de $x$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donc a fortiori $\mathcal{C}^1$. Pour en calculer le gradient, la solution la plus simple consiste à écrire
$$\begin{aligned} f(x+h) &= \langle A(x+h), x+h\rangle \\ &= \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, h\rangle + \langle Ah, x\rangle + \langle Ah, h\rangle \\ &= f(x) + \langle (A + {}^tA)x, h\rangle + O(\|h\|^2), \end{aligned}$$
ce qui montre que le gradient de $f$ en $x$ est donné par $(A + {}^tA)x$.

## Partie I - Stabilité des systèmes autonomes affines

1. Le champ de vecteurs affine $x \mapsto Ax + b$ est bien entendu de classe $\mathcal{C}^1$ et on peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz rappelé en introduction. Le problème (3) admet donc bien une unique solution maximale. Il reste à vérifier que la formule donnée dans l'énoncé (et qui est bien définie sur $\mathbb{R}$) donne bien une telle solution.

Le premier terme est solution de l'équation homogène comme on l'a vu dans la partie préliminaire. De plus la formule proposée vérifie bien $x(0) = x_0$. Il reste à voir que le second terme de la formule, que l'on note

$$y(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} b \, ds,$$

est solution de l'équation non-homogène.

On calcule simplement en utilisant la question 1 des préliminaires

$$y'(t) = e^{(t-t)A} b + \int_0^t A e^{(t-s)A} b \, ds = b + Ay(t).$$

2. Un point d'équilibre $\bar{x}$ du système est un vecteur vérifiant $A\bar{x} + b = 0$. L'existence d'un tel point est donc équivalente à la condition $b \in \mathrm{Im}(A)$.

   Supposons donc qu'un tel point $\bar{x}$ existe et on pose $y(t) = x(t) - \bar{x}$ de sorte que

   $$x \text{ est solution de } x' = Ax + b \text{ si et seulement si } y \text{ est solution } y' = Ay,$$

   et $x$ est proche de $\bar{x}$ si et seulement si $y$ est proche de $0$ ce qui prouve l'équivalence demandée.

3. On écrit $A = P^{-1}DP$ avec $D$ diagonale (on note $\lambda_i$ les valeurs propres de $A$, de sorte que toute solution de l'équation s'écrit

   $$x(t) = P^{-1} e^{tD} P x_0.$$

   La matrice $e^{tD}$ est diagonale avec des $e^{t\lambda_i}$ sur la diagonale.

   – La stabilité de l'origine est donc équivalente à la bornitude des $e^{t\lambda_i}$ pour $t > 0$. Un calcul élémentaire donne

   $$|e^{t\lambda_i}| = e^{t\mathrm{Re}\lambda_i},$$

   et donc la condition recherchée s'écrit

   $$0 \text{ est stable} \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0, \forall i.$$

   – Pour la stabilité asymptotique, on demande de plus que $e^{t\lambda_i}$ tende vers $0$ quand $t \to +\infty$ ce que interdit les valeurs propres imaginaires pures. On obtient donc

   $$0 \text{ est asymptotiquement stable} \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i.$$

4. (a) On constate que $A_\lambda$ s'écrit sous la forme

   $$A_\lambda = \lambda I + N,$$

   où $N$ est nilpotente. Ceci nous donne par la formule du binôme

   $$A_\lambda^k = \lambda^k I + k\lambda^{k-1} N + \frac{k(k-1)}{2} \lambda^{k-2} N^2, \;\; \forall k \geq 2,$$

   et permet donc le calcul de l'exponentielle

   $$e^{tA_\lambda} = \sum_{k \geq 0} \frac{(t\lambda)^k}{k!} I + t \frac{(t\lambda)^{k-1}}{(k-1)!} N + \frac{t^2}{2} \frac{(t\lambda)^{k-2}}{(k-2)!} N^2.$$

   Il reste donc

   $$e^{tA_\lambda} = e^{t\lambda} I + t e^{t\lambda} N + \frac{t^2}{2} e^{t\lambda} N^2,$$

   c'est-à-dire

   $$e^{tA_\lambda} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Si $\lambda > 0$, la solution nulle n'est pas stable (et à plus forte raison asymptotiquement stable) car par exemple nous avons

$$\left\| e^{tA_\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{t\lambda}\varepsilon \end{pmatrix} \right\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty,$$

pour toute valeur, aussi petite soit-elle, de $\varepsilon > 0$.

En revanche, si $\lambda < 0$ on a

$$\|e^{tA_\lambda}\| \leq C(1+t^2)e^{t\lambda} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

et donc le système est asymptotiquement stable.

(c) Dans le cas $\lambda = 0$, nous avons

$$e^{tA_\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0.$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, la quantité $e^{tA_\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ est constante et ne tend donc pas vers $0$.

L'équilibre $0$ n'est pas non plus stable car nous voyons que

$$e^{tA_\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon t \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty.$$

5. Les calculs précédents fonctionnent encore dans le cas d'une valeur propre complexe en constatant que c'est le signe de la partie réelle qui joue un rôle :
   - Si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, le système est asymptotiquement stable.
   - Si $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, le système n'est pas stable.
   - Si $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, le système est instable (sauf si $N = 0$ mais dans ce cas, la matrice $M_\lambda$ serait diagonalisable ce qui n'est pas le cas ici).

6. (a) Toutes les valeurs propres d'une matrice anti-symétrique sont de partie réelle nulle. En effet si $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ est une telle valeur propre associée à un vecteur propre $x + iy \in \mathbb{C}^n$. On a donc

$$A(x+iy) = (a+ib)(x+iy),$$

c'est-à-dire

$$Ax = ax - by, \quad Ay = ay + bx$$

et par antisymétrie on a

$$\langle Ax, x\rangle = 0, \quad \langle Ay, y\rangle = 0.$$

Ceci donne

$$a\|x\|^2 = b\langle x, y\rangle,$$
$$a\|y\|^2 = -b\langle x, y\rangle,$$

et donc

$$a(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 0,$$

et comme $(x, y) \neq (0, 0)$ on en déduit $a = 0$.

Par ailleurs, en tant que matrice réelle de taille impaire, $A$ admet une valeur propre réelle qui est donc nécessairement $0$. Les deux possibilités restantes sont maintenant : ou bien $0$ est la seule valeur propre de $A$, ou bien les valeurs propres de $A$ sont dela forme $0, i\alpha, -i\alpha$ avec $\alpha \neq 0$.

Comme enfin, $A$ est normale, elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et on est donc ramenés, s'agissant des propriétés de stabilité du système au cas de la question 3.

Le résultat est que le système est toujours stable et jamais asymptotiquement stable (car $0$ est valeur propre !).

(b) Montrons que la norme de $x(t)$ est constante au cours du temps en calculant

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = 2\langle x'(t), x(t)\rangle = 2\langle Ax(t), x(t)\rangle = 0,$$

par antisymétrie de $A$. Donc la solution du système est contenue dans la sphère de centre $0$ et de rayon $\|x_0\|$.
Soit maintenant $e$ de norme 1 dans le noyau de $A$, de sorte que $A^t e = -Ae = 0$, et calculons

$$\frac{d}{dt}\langle x(t), e\rangle = \langle x'(t), e\rangle = \langle Ax(t), e\rangle = \langle x(x), A^t e\rangle = 0.$$

Ainsi la trajectoire $t \mapsto x(t)$ reste dans le plan affine $P$ défini par

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3,\ \ \langle x, e\rangle = \langle x_0, e\rangle\}.$$

On conclut donc que $t \mapsto x(t)$ est contenu dans l'intersection d'une sphère et d'un plan, c'est-à-dire un cercle.

# Partie II - Commande des systèmes différentiels autonomes linéaires

1. A $x_0$ et $\tau$ fixés, on constate que l'application

$$\Phi : u \in \mathcal{C}^0([0,\tau], \mathbb{R}^m) \mapsto e^{\tau A}x_0 + \int_0^\tau e^{(\tau-s)A}Bu(s)\,ds \in \mathbb{R}^n,$$

est affine. L'ensemble des états accessibles étant l'image de cette application, c'est bien un espace affine.

2. (a) On note $P \in \mathbb{R}_n[X]$ le polynôme caractérisque de $A$. Pour tout $i \geq 0$, on effectue la division euclidienne de $X^i$ par $P$, ce qui donne

$$X^i = PQ_i + R_i,$$

avec $\deg(R_i) \leq n-1$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P(A) = 0$ et donc

$$A^i = R_i(A),$$

qui est bien une combinaison linéaire de $I$, $A$, ..., $A^{n-1}$.

(b) Pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, $s \in \mathbb{R}$ et tout $N \geq 0$, nous avons d'après la question précédente

$$\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{s^k A^k}{k!}\right) Bu \in R(A,B).$$

Comme l'espace $R(A,B)$ est fermé (car de dimension finie), nous pouvons passer à la limite quand $N$ tend vers l'infini dans la formule précédente. Tout ceci montre que

$$e^{sA}Bu \in R(A,B).$$

Par intégration (on utilise encore que $R(A,B)$ est fermé ici), on obtient que

$$\int_0^\tau e^{(\tau-s)A}Bu(s)\,ds \in R(A,B).$$

Ceci étant vrai pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^0([0,\tau], \mathbb{R}^m)$, on a bien l'inclusion souhaitée.

(c) Par définition de l'orthogonal, pour tout $u \in \mathcal{C}^0([0,\tau], \mathbb{R}^m)$ nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle w, \int_0^\tau e^{(\tau-s)A}Bu(s)\,ds \right\rangle \\ &= \int_0^\tau \langle w, e^{(\tau-s)A}Bu(s)\rangle\,ds \\ &= \int_0^\tau \left\langle \left(e^{(\tau-s)A}B\right)^T w, u(s) \right\rangle\,ds. \end{aligned}$$

Cette égalité est vraie pour toute fonction continue $u$ et donc pour toute fonction de $L^2(]0,\tau[,\mathbb{R}^m)$, par densité.
Il s'ensuit que

$$\left(e^{(\tau-s)A}B\right)^T w = 0, \ \ \forall s \in [0,\tau].$$

(d) On dérive $k$ fois l'identité précédente par rapport à $s$ pour obtenir (avec les calculs de la partie préliminaire)

$$\left((-A)^k e^{(\tau-s)A}B\right)^T w = 0, \ \ \forall s \in [0,\tau],$$

puis on évalue ces égalités en $s=\tau$ ce qui donne

$$(A^k B)^T w = 0, \ \ \forall k \geq 0.$$

Cela montre que $w$ appartient à l'orthogonal de $R(A,B)$.
In fine, on a montré que

$$A(\tau,0)^\perp \subset R(A,B)^\perp,$$

et donc en passant à l'orthogonal

$$R(A,B) \subset A(\tau,0).$$

3. Le système est commandable si et seulement si l'espace affine $A(\tau,x_0)$ est égal à l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. Pour cela, il faut et il suffit que son espace vectoriel directeur $A(\tau,0)$ soit lui-même égal $\mathbb{R}^n$. En conséquence, une condition nécessaire et suffisante de commandabilité du système est le fait que la dimension de $R(A,B)$ soit exactement égal à $n$.
Par définition, on voit que $\mathrm{Im}C = R(A,B)$ ce qui fournit bien la condition de rang attendue.
4. On met le système proposé sous la forme d'un système d'ordre 1 c'est-à-dire

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \theta/l & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -g/l \end{pmatrix} u(t),$$

avec $x(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}$.
Calculons la matrice $C$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -g/l \\ -g/l & 0 \end{pmatrix},$$

dont on vérifie aisément que le rang vaut 2. Le système est donc bien commandable.
5. (a) Il s'agit de calculer

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Gx, x\rangle \\ &= \left\langle \left(\int_0^\tau e^{(\tau-s)A}BB^T e^{(\tau-s)A^T}\,ds\right)x, x\right\rangle \\ &= \int_0^\tau \langle e^{(\tau-s)A}BB^T e^{(\tau-s)A^T}x, x\rangle\,ds \\ &= \int_0^\tau \left\|B^T e^{(\tau-s)A^T}x\right\|^2\,ds. \end{aligned}$$

Si $\langle Gx,x\rangle = 0$, on a donc $B^T e^{(\tau-s)A^T}x = 0$ pour tout $s$. Ceci montre que $x$ est orthogonal à $R(A,B)$ et comme on a supposé que le système est commandable, on a $R(A,B)=\mathbb{R}^n$ ce qui prouve bien que $x=0$.

(b) Si $x$ est dans le noyau de $G$, on a bien sûr $\langle Gx,x\rangle = 0$ et donc $x=0$ d'après la question précédente. La matrice $G$ est donc bien inversible.

(c) Calculons l'intégrale suivante

$$\int_0^\tau e^{(\tau-s)A}B\bar{u}(s)\,ds = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A}BB^T e^{(\tau-s)A^T}G^{-1}v\,ds = GG^{-1}v = v,$$

ce qui montre bien que $x(\tau)=v$ dès lors qu'on prt de la donnée initiale nulle.

(d) Pour tout $s$ nous avons

$$\|\hat{u}(s)\|_m^2 = \|\bar{u}(s) + h(s)\|_m^2 = \|\bar{u}(s)\|_m^2 + \|h(s)\|_m^2 + 2\langle \bar{u}(s), h(s)\rangle.$$

Par passage à l'intégrale, nous obtenons

$$E(\hat{u}) = E(\bar{u}) + E(h) + \int_0^\tau \langle \bar{u}(s), h(s)\rangle \, ds.$$

Soit $I$ la dernière intégrale. Evaluons-là en utilisant la définition de $\bar{u}$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\tau \left\langle \left(e^{(\tau-s)A}B\right)^T G^{-1}v, h(s)\right\rangle \, ds \\ &= \int_0^\tau \left\langle G^{-1}v, e^{(\tau-s)A}Bh(s)\right\rangle \, ds \\ &= \left\langle G^{-1}v, \int_0^\tau e^{(\tau-s)A}Bh(s)\, ds\right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $h$ amène l'état $0$ à l'état $0$, ce qui montre que l'intégrale apparaissant dans le dernier terme est nulle.

In fine, nous avons montré

$$E(\hat{u}) = E(\bar{u}) + E(h).$$

Comme $E(h) \geq 0$ pour tout $h$, la différence $E(\hat{u}) - E(\bar{u})$ est positive pour tous les $h$ amenant $0$ à $0$.

Ainsi, parmi toutes les commandes qui amènent le système de $0$ à $v$, la commande $\bar{u}$ est bien celle qui minimise $E$.