Corrigé du problème de la première épreuve du concours 3A de l'ENS Cachan 2008

Préliminaires

1. (a) Fixons T, Y et Z. Par composition de fonctions continues, la fonction $t \in [0,T] \mapsto F(t, Z(t))$ est une application continue et donc, en particulier, elle est intégrable sur $[0,T]$. L'application

$$t \in [0,T] \mapsto (\mathcal{T}_T(Y,Z))(t),$$

est ainsi une primitive de cette fonction continue, elle est donc elle-même continue (et même de classe $\mathcal{C}^1$).

(b) Vérifions les hypothèses du théorème 0 dans le cas proposé dans l'énoncé.

• Hypothèse i) Pour $Z \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}^N)$ fixé, l'application

$$Y \in \mathbb{R}^N \mapsto (\mathcal{T}_T(Y,Z)) \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}^N),$$

est clairement affine et vérifie, pour tous $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^N$

$$\forall t \in [0,T], \mathcal{T}_T(Y_1,Z)(t) - \mathcal{T}_T(Y_2,Z)(t) = Y_1 - Y_2,$$

d'où

$$\|\mathcal{T}_T(Y_1,Z) - \mathcal{T}_T(Y_2,Z)\|_\infty = |Y_1 - Y_2|,$$

ce qui montre bien la continuité de l'application proposée.

• Hypothèse ii) Fixons maintenant $Y \in \mathbb{R}^N$, Z et Z' dans $\mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}^N)$. Pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$(\mathcal{T}_T(Y,Z_1))(t) - (\mathcal{T}_T(Y,Z_2))(t) = \int_0^t \big(F(t', Z_1(t')) - F(t', Z_2(t'))\big)\, dt',$$

et donc en majorant (par inégalité triangulaire), on trouve

$$|(\mathcal{T}_T(Y,Z_1))(t) - (\mathcal{T}_T(Y,Z_2))(t)| \leq \int_0^t |F(t', Z_1(t')) - F(t', Z_2(t'))|\, dt'.$$

En prenant le sup en $t \in [0,T]$, on trouve

$$\|\mathcal{T}_T(Y,Z_1) - \mathcal{T}_T(Y,Z_2)\|_\infty \leq \int_0^T |F(t', Z_1(t')) - F(t', Z_2(t'))|\, dt'. \tag{1}$$

Il reste à majorer le terme sous l'intégrale. Pour ce faire, on utilise l'inégalité des accroissements finis qui donne

$$\begin{aligned} |F(t', Z_1(t')) - F(t', Z_2(t'))| &\leq \left(\sup_{X \in \mathbb{R}^N} |\nabla_X F(t', X)|\right) |Z_1(t') - Z_2(t')| \\ &\leq \left(\sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^+ \\ X \in \mathbb{R}^N}} |\nabla_X F(t, X)|\right) \|Z_1 - Z_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Par intégration par rapport à t' et en reportant dans (1), on trouve

$$\|\mathcal{T}_T(Y,Z_1) - \mathcal{T}_T(Y,Z_2)\|_\infty \leq \underbrace{T\left(\sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^+ \\ X \in \mathbb{R}^N}} |\nabla_X F(t, X)|\right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} C_T} \|Z_1 - Z_2\|_\infty.$$

Par définition de C_T, il est clair que $C_T \xrightarrow[T \to 0]{} 0$ et donc qu'on peut trouver un $T_0 > 0$ tel que, $C_T \leq 1/2$ dès lors que $T \in [0, T_0]$, ce qui montre bien l'hypothèse.[1]

1. L'énoncé semble insister sur le fait que C n'a pas le droit d'être nulle mais cela n'a aucune importance. Qui peut le plus, peut le moins ...

(c) D'après la question précédente, pour tout $T \in [0, T_0]$, on peut appliquer le théorème 0 à l'application $\mathcal{T}_T$. Ce théorème montre que, pour tout $Y \in \mathbb{R}^N$, il existe une unique fonction dans $\mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}^N)$, notée $t \mapsto Z_T(t, Y)$, qui soit un point fixe de $Z \mapsto \mathcal{T}_T(Y, Z)$, c'est-à-dire

$$Z_T(\cdot, Y) = \mathcal{T}_T(Y, Z_T(\cdot, Y)). \tag{2}$$

Comme on l'a vu plus haut, la fonction $\mathcal{T}_T(Y, Z_T)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui montre que Z_T est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, si on écrit la formule (2) en tout instant $t \in [0,T]$, on trouve

$$Z_T(t, Y) = Y + \int_0^t F(t', Z_T(t', Y))\, dt'.$$

En $t = 0$, on trouve $Z_T(0, Y) = Y$ et par dérivation par rapport à t, on trouve

$$\partial_t Z_T(t, Y) = F(t, Z_T(t, Y)),$$

ce qui est bien l'équation attendue.

Par ailleurs, toute autre solution éventuelle Z_T du système différentiel est bien une fonction continue du temps vérifiant, par intégration entre 0 et t, l'équation de point fixe (2). On a donc bien montré l'existence et unicité d'une solution à ce problème différentiel.

Le théorème 0 donne également la continuité de l'application

$$Y \in \mathbb{R}^N \mapsto Z_T(., Y) \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}^N).$$

Pour $t \in [0,T]$ fixé, l'application "valeur en t"

$$Z \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}^N) \mapsto Z(t) \in \mathbb{R}^N,$$

est linéaire continue (par définition de la norme infinie). Ainsi, par composition d'applications continues, on a bien montré la continuité de l'application

$$Y \in \mathbb{R}^N \mapsto Z_T(t, Y) \in \mathbb{R}^N.$$

(d) Le point-clé ici réside dans le fait que le temps T_0 obtenu plus haut ne dépend que de la fonction F (et en particulier que de la constante C). On peut donc "recoller" les morceaux, à Y fixé. Intuitivement les choses sont assez claires. La difficulté réside dans une rédaction à la fois précise et concise. Je vous propose la façon suivante.

On montre d'abord le lemme de prolongement suivant.

Lemme 1

Supposons connue une solution X du problème recherché définie sur $[0, T^*] \times \mathbb{R}^N$ pour un certain T^*, alors il existe une solution $\tilde{X}$ du problème définie sur $[0, T^* + T_0] \times \mathbb{R}^N$ qui coïncide avec X sur $[0, T^*] \times \mathbb{R}^N$.

Preuve (du Lemme):

On considère la fonction $(t, X) \mapsto \tilde{F}(t, X) = F(t + T^*, X)$ qui vérifie bien sûr elle-aussi l'hypothèse (H) et de plus nous avons

$$\sup_{\substack{t \geq 0 \\ X \in \mathbb{R}^N}} |\nabla_X \tilde{F}(t, X)| = \sup_{\substack{t \geq T^* \\ X \in \mathbb{R}^N}} |\nabla_X F(t, X)| \leq \sup_{\substack{t \geq 0 \\ X \in \mathbb{R}^N}} |\nabla_X F(t, X)|,$$

ce qui montre que le résultat de la question c) s'applique à $\tilde{F}$ **avec la même valeur de** T_0. On note $\tilde{Z}_{T_0}$ l'unique solution de

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{Z}_{T_0}(t, Y) = \tilde{F}(t, \tilde{Z}_{T_0}(t, Y)) = F(t + T^*, \tilde{Z}_{T_0}(t, Y)), \ \ \forall t \in [0, T_0], \\ \tilde{Z}_{T_0}(0, Y) = Y. \end{cases} \tag{3}$$

On construit maintenant le prolongement de X de la façon suivante, pour $(t, Y) \in [0, T^* + T_0] \times \mathbb{R}^N$

$$\tilde{X}(t, Y) = \begin{cases} X(t, Y), & \text{si } t \in [0, T^*], \\ \tilde{Z}_{T_0}(t - T^*, X(T^*, Y)), & \text{si } t \in]T^*, T^* + T_0], \end{cases}$$

Par construction, on voit bien que $t \mapsto \tilde{X}(t, Y)$ est continue en $t = T^*$, prolonge X, vérifie la condition initiale $\tilde{X}(0, Y) = Y$ et l'équation différentielle sur $[0, T^*]$. Il reste à vérifier qu'elle vérifie aussi l'équation différentielle sur $]T^*, T^* + T_0]$.
C'est un simple calcul, pour $t \in]T^*, T^* + T_0]$ qui donne

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{X}(t, Y) &= (\partial_t \tilde{Z}_{T_0})(t - T^*, X(T^*, Y)) \\ &= \tilde{F}(t - T^*, \tilde{Z}_{T_0}(t - T^*, X(T^*, Y)) && \text{par déf. de } \tilde{Z}_{T_0} \\ &= F(t, \tilde{Z}_{T_0}(t - T^*, X(T^*, Y)) && \text{par déf. de } \tilde{F} \\ &= F(t, \tilde{X}(t, Y)) && \text{par déf. de } \tilde{X}. \end{aligned}$$

■

Le lemme étant prouvé, la construction d'une solution X définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ tout entier se fait par induction. En effet, la question c) permet de construire une solution X définie sur $[0, T_0] \times \mathbb{R}^N$ ce qui initialise le processus. Une première application du lemme montre que X peut se prolonger en une solution sur $[0, 2T_0] \times \mathbb{R}^N$, une nouvelle application du lemme montre qu'on peut la prolonger sur $[0, 3T_0] \times \mathbb{R}^N$ et ainsi de suite.

(e) A Y fixé, soient $t \mapsto X_1(t, Y)$ et $t \mapsto X_2(t, Y)$ deux applications résolvant le problème donné. On veut montrer que $X_1 = X_2$, pour cela on raisonne par l'absude en supposant $X_1 \neq X_2$. L'ensemble

$$S = \{t \in [0, +\infty[, X_1(t, Y) \neq X_2(t, Y)\},$$

est donc un ouvert non vide de $[0, +\infty[$. On note t^* sa borne inférieure. Par contitnuité de X_1 et X_2, on a

$$X_1(t^*, Y) = X_2(t^*, Y),$$

car sinon on aurait $t^* \neq 0$ et de plus il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $t^* - \varepsilon > 0$ et $X_1(t^* - \varepsilon, Y) \neq X_2(t^* - \varepsilon, Y)$, ce qui contredirait la définition de t^*.
Les applications $t \mapsto X_1(t, Y)$ et $t \mapsto X_2(t, Y)$ sont donc solutions de l'équation différentielle proposée et coïncident en $t = t^*$. D'après la question c) on sait qu'une telle solution est unique sur un intervalle de temps de longueur T_0, ce qui prouve que X_1 et X_2 doivent coïncider sur $[t^*, t^* + T_0]$. Ceci contredit le fait que t^* est l'infimum de S et termine la preuve du résultat.

2. On pose $N = 2n$ et

$$F\left(t, \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} p \\ f(t, x) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^N$. La jacobienne de F en tout point $X = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$ s'écrit (par blocs)

$$\nabla_X F(t, X) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ \nabla_x f(t, x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si f vérifie l'hypothèse (H) pour $m = n$, on voit que F vérifie l'hypothèse (H) pour $m = N = 2n$.
Le résultat découle donc de la question 1).

3. On pose $f(t, x) = -\nabla V(x)$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ et il s'agit de vérifier que f satisfait l'hypothèse (H) pour pouvoir appliquer la question 2).
   - Comme V est de classe $\mathcal{C}^2$, il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
   - Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, on a

   $$\nabla_x f(t, x) = -D^2 V(x) = -\left((\partial_{x_i} \partial_{x_j} V)(x)\right)_{i,j},$$

   c'est-à-dire l'opposée de la matrice Hessienne de V. Par hypothèse sur les dérivées secondes de V, cette matrice est bien bornée par rapport à x.

4. Pour tout $r \geq 0$, on note $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = r\}$, la sphère de rayon r et φ l'application

$$\varphi : r \in [0, +\infty[\mapsto \inf_{S_r} V,$$

dont on souhaite montrer la continuité. On remarque que, comme V est continue et que les sphères sont compactes, il existe pour tout $r \geq 0$, au moins un $x_r \in S_r$ tel que

$$\varphi(r) = V(x_r).$$

On fixe $r_0 \geq 0$. Comme V est continue sur la boule compacte $\overline{B}(0, r_0 + 1)$, elle y est uniformément continue (théorème de Heine). Notons ω le module d'uniforme continuité de V sur cette boule (celui-ci dépend de r_0). On rappelle qu'il s'agit d'une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, telle que $\omega(0) = 0$ et telle que

$$|V(x) - V(y)| \leq \omega(|x - y|), \text{ pour tous } x, y \in \overline{B}(0, r_0 + 1).$$

Soit maintenant $r \in [0, r_0 + 1]$. On utilise le fait que, par homothétie on a

$$\frac{r_0}{r} x_r \in S_{r_0}$$

et donc

$$\varphi(r_0) = V(x_{r_0}) = \inf_{S_{r_0}} V \leq V\left(\frac{r_0}{r} x_r\right) = V\left(\frac{r_0}{r} x_r\right) - V(x_r) + \underbrace{V(x_r)}_{=\varphi(r)},$$

ou encore

$$\varphi(r_0) - \varphi(r) \leq V\left(\frac{r_0}{r} x_r\right) - V(x_r) \leq \omega\left(\left|\frac{r_0}{r} x_r - x_r\right|\right) = \omega(|r - r_0|).$$

De la même façon, en échangeant les rôles de r et r_0, on trouve

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) \leq \omega(|r - r_0|).$$

In fine, on a montré

$$|\varphi(r) - \varphi(r_0)| \leq \omega(|r - r_0|),$$

ce qui prouve bien que $\varphi(r)$ tend vers $\varphi(r_0)$ quand r tend vers r_0.

Partie I -

1. (a) Par définition, on a $p(0, y, q) = q$ et donc on peut bien écrire, en suivant l'indication de l'énoncé que

$$p(t, y, q) = q + \int_0^t \partial_t p(t', y, q)\, dt'.$$

Montrer l'existence de la limite quand $t \to +\infty$ de $p(t, y, q)$ revient donc à montrer la convergence de l'intégrale de $\partial_t p$. Essayons d'utiliser l'hypothèse (H1) pour montrer que cette intégrale est absolument convergente.

En effet, pour tout $t' \geq 0$, l'équation différentielle nous donne

$$|\partial_t p(t', y, q)| = |\partial_t^2 x(t', y, q)| = |f(t', x(t', p, q))| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(t', x)|.$$

Le membre de droite de cette inégalité ne dépend plus que de t', et constitue une fonction positive intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après (H1). On a donc bien montré la convergence absolue de l'intégrale de $\partial_t p$ et donc l'existence de la limite recherchée.

Maintenant que l'on connaît l'existence de cette limite, on peut écrire par soustraction

$$p^+(y, q) - p(t, y, q) = \int_t^{+\infty} \partial_t p(t', y, q)\, dt',$$

puis majorer en valeur absolue

$$|p^+(y,q) - p(t,y,q)| \leq \int_t^{+\infty} |\partial_t p(t',y,q)|\,dt' \leq \int_t^{+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(t',x)|\,dt'.$$

Comme le membre de droite de cette dernière estimation est une quantité indépendant de y et q, et qui tend vers 0 quand $t \to +\infty$, on a bien montré la convergence uniforme attendue.

(b) On a vu dans la question 2) de la partie préliminaire que, à t fixé, l'application $(y,q) \mapsto p(t,y,q)$ est continue. Comme $(y,q) \mapsto p^+(y,q)$ est une limite uniforme de cette famille de fonctions continue, elle est également continue.

(c) On reprend la formule intégrale

$$p^+(y,q) = q + \int_0^{+\infty} \partial_t p(t',y,q)\,dt',$$

dans laquelle on a déjà vu que le second terme peut se majorer uniformément en (y,q) par l'intégrale apparaissant dans l'hypothèse (H1), c'est-à-dire

$$|p^+(y,q) - q| \leq \int_0^{+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(t,x)|\,dt.$$

(d) Là encore on se contente de suivre l'énoncé et d'écrire qu'une fonction $\mathcal{C}^1$ est la primite de sa dérivée, ce qui donne

$$x(t,y,q) = y + \int_0^t \partial_t x(t',y,q)\,dt' = y + \int_0^t p(t',y,q)\,dt'.$$

Il vient

$$\frac{x(t,y,q)}{t} = \frac{y}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t p(t',y,q)\,dt'.$$

Le premier terme tend clairement vers 0 quand $t \to +\infty$ alors que le second tend vers $p^+(y,q)$ par le résultat de convergence des moyennes de Cesaro [2] que l'on rappelle ci-dessous :

Lemme 2 (Moyennes de Cesaro)
Si $t \mapsto g(t)$ est une fonction bornée qui possède une limite l en $+\infty$ alors on a

$$\frac{1}{t}\int_0^t g(s)\,ds \xrightarrow[t\to+\infty]{} l.$$

2. (a) On a vu que

$$x(t,y,q) = y + \int_0^t p(t',y,q)\,dt',$$

et

$$p(t,y,q) = p^+(y,q) - \int_t^{+\infty} f(s,x(s,y,q))\,ds.$$

Ainsi, on trouve

$$x(t,y,q) = y + tp^+(y,q) - \int_0^t \int_{t'}^{+\infty} f(s,x(s,y,q))\,ds\,dt',$$

ce qui donne bien la formule proposée par l'énoncé (on reprend maintenant les noms de variables muettes de l'énoncé)

$$x(t,y,q) - tp^+(y,q) = y - \int_0^t \left(\int_u^{+\infty} f(v,x(v,y,q))\,dv\right)\,du.$$

2. à connaître absolument ainsi que sa démonstration ... en coupant l'intégrale en deux morceaux

On peut intégrer par parties en u ce qui donne

$$x(t,y,q) - tp^+(y,q) = y - t\int_t^{+\infty} f(u, x(u,y,q))\, du - \int_0^t uf(u, x(u,y,q))\, du.$$

Comme précédemment, l'hypothèse (H2) permet de montrer que l'intégrale dans le troisième terme est absolument convergente (et ceci de façon uniforme en (y,q)) et que le second vérifie

$$\left| t\int_t^{+\infty} f(u, x(u,y,q))\, du \right| \leq \int_t^{+\infty} u|f(u, x(u,y,q))|\, du \leq \int_t^{+\infty} u \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(u,x)|\, du,$$

ce qui est le reste d'une intégrale convergente (uniformément en (y,q)). Tout ceci montre que ce terme tend vers 0 uniformément en (y,q).

(b) L'application $(y,q) \mapsto x^+(y,q)$ est limite uniforme d'une famille de fonctions continues, elle est donc bien continue.

(c) C'est le même argument que précédemment. La différence entre $x^+(y,q)$ et y se majore en valeur absolue par l'intégrale qui apparaît dans l'hypothèse (H2).

(d) D'après les questions précédentes, il suffit de montrer que

$$t(p(t,y,q) - p^+(y,q)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

uniformément en (y,q). On revient à la formule de p^+ qui donne

$$|t(p(t,y,q) - p^+(y,q))| \leq t\int_t^{+\infty} \sup_{\mathbb{R}^n} |f(s,.)|\, ds \leq \int_t^{+\infty} s \sup_{\mathbb{R}^n} |f(s,.)|\, ds,$$

et d'après (H2) le second membre ci-dessus est le reste d'une intégrale convergente, ce qui prouve le résultat attendu.

Partie II -

1. On fixe (y,q) et on calcule la dérivée par rapport au temps de la quantité proposée en utilisant l'équation différentielle vérifiée par x et p, c'est-à-dire

$$x'(t) = p(t), \;\; p'(t) = -(\nabla V)(x(t)).$$

On obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} H(x(t), p(t)) &= \nabla_x H(x(t), p(t)) \cdot x'(t) + \nabla_p H(x(t), p(t)) \cdot p'(t) \\ &= \nabla V(x(t)) \cdot p(t) + p(t) \cdot (-\nabla V(x(t))) = 0.\end{aligned}$$

Ceci montre bien que $t \mapsto H(x(t), V(t))$ est constante.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on utilise la question précédente et le caractère borné de V pour obtenir

$$\frac{1}{2}|p(t)|^2 = H(x(t), p(t)) - V(x(t)) = H(y,q) - V(x(t)) \leq H(y,q) - \inf V,$$

ce qui prouve que $(|p(t)|^2)_t$ est bornée dans $\mathbb{R}$ et donc que $(p(t))_t$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$.

3. On utilise à nouveau la conservation de l'énergie H pour obtenir, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$V(x(t)) = H(x(t), p(t)) - \frac{1}{2}|p(t)|^2 \leq H(x(t), y(t)) = H(y,q) < 0,$$

ce qui prouve que

$$|V(x(t))| \geq |H(y,q)|, \;\; \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Comme V tend vers 0 à l'infini, il existe $r > 0$ tel que

$$|z| \geq r \Longrightarrow |V(z)| \leq \frac{1}{2}|H(y,q)|.$$

En combinant les deux propriétés ci-dessus, on voit donc que

$$|x(t)| < r, \ \ \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

ce qui montre bien que $(x(t))_t$ est bornée.

4. (a) Notons φ l'application $\mathcal{C}^\infty$ dont la définition est rappelée dans l'énoncé

$$\varphi(r) = \begin{cases} e^{-1/r}, & \text{pour } r > 0 \\ 0, & \text{pour } r \leq 0 \end{cases}$$

On pose maintenant

$$\chi(r) = \varphi(r - 1/2)\varphi(1-r), \ \ \forall r \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que χ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $\chi(r)$ est non nul si et seulement si les deux facteurs de la définition sont non nuls, c'est-à-dire si et seulement si $r - 1/2 > 0$ et $1 - r > 0$.

Cette fonction χ est clairement à support compact, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et son intégrale est strictement positive. La fonction θ définie par

$$\theta(r) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \chi(t)\, dt} \int_{-\infty}^{r} \chi(t)\, dt,$$

vérifie bien toutes les propriétés souhaitées.

(b) Calculons les gradients par rapport à x et p de H et α_R

$$\nabla_x H(x,p) = \nabla V(x),$$

$$\nabla_p H(x,p) = p,$$

$$\nabla_x \alpha_R(x,p) = \theta(|x|^2/R^2)p + \frac{2(x\cdot p)}{R^2}\theta'(|x|^2/R^2)x,$$

$$\nabla_p \alpha_R(x,p) = \theta(|x|^2/R^2)x.$$

Le calcul du crochet de Poisson donne

$$\{H, \alpha_R\}(x,p) = p \cdot \left(\theta(|x|^2/R^2)p + \frac{2(x\cdot p)}{R^2}\theta'(|x|^2/R^2)x\right) - \nabla V(x) \cdot (\theta(|x|^2/R^2)x).$$

En notant que, par définition de H on a $|p|^2 = 2(H(x,p) - V(x))$, on obtient le résultat présenté dans l'énoncé.

(c) Fixons $\kappa > 0$ et utilisons les hypothèses stipulant que $x \mapsto V(x)$ et $x \mapsto x\nabla V(x)$ tendent vers 0 à l'infini, de sorte qu'il existe $R > 0$ tel que

$$|z| \geq R/\sqrt{2} \Longrightarrow |z \cdot \nabla V(z)| + 2|V(z)| \leq \kappa. \tag{4}$$

i) Soit (x,p) tel que $H(x,p) \geq \kappa$, on observe que le second terme dans le crochet de Poisson est toujours positif ou nul (car $\theta' \geq 0$) et que le facteur $\theta(|x|^2/R^2)$ est également toujours positif et n'est non nul que si $|x|^2/R^2 \geq 1/2$, c'est-à-dire si

$$|x| \geq R/\sqrt{2}. \tag{5}$$

Pour montrer la positivité du crochet de Poisson, il suffit donc d'étudier le signe du premier facteur du premier terme, pour les x vérifiant (5). Pour de tels x, on peut utiliser (4) et écrire

$$2H(x,p) - x\cdot\nabla V(x) - 2V(x) \geq 2H(x,p) - |x\cdot\nabla V(x)| - 2|V(x)| \geq 2H(x,p) - \kappa \geq \kappa \geq 0.$$

ii) On prend maintenant x tel que $|x| \geq R$. Notons que x vérifie donc aussi (5). Par construction de θ, pour de tels x, on a

$$\theta(|x|^2/R^2) = 1, \text{ et } \theta'(|x|^2/R^2) = 0.$$

Ainsi le crochet de Poisson se simplifie et on obtient, grâce à (4), l'inégalité

$$\{H, \alpha_R\}(x,p) = 2H(x,p) - x \cdot \nabla V(x) - 2V(x) \geq 2H(x,p) - \kappa.$$

5. Commentons un peu les équivalences suggérées dans l'énoncé. Il faut d'abord noter que Θ est croissante, strictement inférieure à r pour $r < 1$ et égale à r pour $r \geq 1$.
   - $\beta_R(x) \geq R^2/2$ est équivalent à $\Theta(|x|^2/R^2) \geq 1$, ce qui d'après les remarques précédentes est bien équivalent à $|x|^2/R^2 \geq 1$.
   - $\beta_R(x) = |x|^2/2$ est équivalent à $\Theta(|x|^2/R^2) = |x|^2/R^2$ ce qui est bien équivalent à $|x|/R \geq 1$ d'après les remarques initiales sur Θ.

(a) Suivons l'énoncé pas-à-pas et commençons par dériver b, il vient

$$\begin{aligned} b'(t) &= \nabla\beta_R(x(t)) \cdot x'(t) = \Theta'(|x(t)|^2/R^2)x(t) \cdot x'(t) \\ &= \theta(|x(t)|^2/R^2)x(t) \cdot p(t) = \alpha_R(x(t), p(t)). \end{aligned}$$

Dérivons maintenant a, pour tout t

$$\begin{aligned} a'(t) &= \nabla_x\alpha_R(x(t), p(t)) \cdot x'(t) + \nabla_p\alpha_R(x(t), p(t)) \cdot p'(t) \\ &= \nabla_x\alpha_R(x(t), p(t)) \cdot p(t) - \nabla_p\alpha_R(x(t), p(t)) \cdot \nabla V(x(t)) \\ &= \nabla_x\alpha_R(x(t), p(t)) \cdot \nabla_p H(x(t), p(t)) - \nabla_p\alpha_R(x(t), p(t)) \cdot \nabla_x H(x(t), p(t)) \\ &= \{H, \alpha_R\}(x(t), p(t)). \end{aligned}$$

Par hypothèse $H(y,q) \geq \kappa$ et l'énergie est conservée au cours du temps, on a donc

$$H(x(t), p(t)) \geq \kappa, \quad \forall t \geq 0.$$

D'après 4.b.i) on en déduit que $\{H, \alpha_R\}(x(t), p(t)) \geq 0$ pour tout t. Ainsi, on a montré que $a'(t) \geq 0$ pour tout t, et donc que a est croissante. Ainsi, il vient

$$b'(t) = a(t) \geq a(0),$$

et par intégration en temps

$$b(t) \geq a(0)t + b(0), \quad \forall t \geq 0.$$

(b) Pour $(y,q) \in \mathcal{F}$, on a $|y| \geq R$ et donc $b(0) = \beta_R(y) \geq R^2/2$. De plus,

$$a(0) = \alpha_R(y,q) = (y \cdot q)\theta(|y|^2/R^2) \geq \sigma|y||q|\theta(|y|^2/R^2) \geq \sigma\varepsilon R\frac{|y|}{R}\theta(|y|^2/R^2) \geq \sigma\varepsilon R.$$

On déduit en particulier que $b(t) \geq R^2/2$ pour tout $t \geq 0$. D'après les équivalences rappelées dans l'énoncé, on en déduit $b(t) = \frac{1}{2}|x(t)|^2$.

(c) La première propriété est claire en utilisant la question précédente. On en déduit qu'avec $t_1 = 0$ [3], on a bien $|x(t)| \geq R$ pour $t \geq t_1$.
D'après 4.b.ii) on a donc, pour tout $t \geq t_1$,

$$a'(t) = \{H, \alpha_R\}(x(t), p(t)) \geq 2H(x(t), p(t)) - \kappa = 2H(y,q) - \kappa \geq \kappa.$$

(d) Comme l'énoncé le rappelle, on a $b'' = a'$ et donc

$$b''(t) \geq \kappa, \quad \forall t \geq 0,$$

3. Ceci est étrange, l'auteur du sujet n'avait pas du faire attention au fait que ce choix trivial convenait

Par double intégration, on trouve

$$b(t) \geq \kappa t^2 + a(0)t + b(0),$$

de sorte que, pour t_0 assez grand, on a

$$b(t) \geq \kappa/2t^2 \geq \kappa/2(t-t_0)^2, \ \ \forall t \geq t_0,$$

et donc

$$|x(t)|^2 \geq \kappa(t-t_0)^2, \ \ \forall t \geq t_0$$

ce qui donne bien

$$|x(t)| \geq \sqrt{\kappa}(t-t_0), \ \ \forall t \geq t_0.$$

Pour $t < t_0$, l'inégalité est triviale et le résultat est donc acquis. Les constantes c_0 et t_0 sont bien uniformes par rapport à $(y,q) \in \mathcal{F}$.

6. Suivons l'indication de l'énoncé. Pour $s \leq r$, on a

$$\sup_{|x|\geq s} |\nabla V(x)| \geq \sup_{|x|=r} |\nabla V(x)|,$$

Ainsi, il vient

$$\int_{r/2}^{r} \sup_{|x|\geq s} |\nabla V(x)|\, ds \geq \frac{r}{2} \sup_{|x|=r} |\nabla V(x)|.$$

Sous l'hypothèse (H4) on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \sup_{|x|=r} |x \cdot \nabla V(x)| &\leq r \sup_{|x|=r} |\nabla V(x)| \leq 2 \int_{r/2}^{r} \sup_{|x|\geq s} |\nabla V(x)|\, ds \\ &\leq 2 \int_{r/2}^{+\infty} \sup_{|x|\geq s} |\nabla V(x)|\, ds \xrightarrow[r\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

7. Comme (H4) implique (H3) on peut bien utiliser les résultats de la question 5).

   (a) Soit $t \geq 2t_0 + 1$, on a donc d'après la question 5.d), on a

   $$|x(t)| \geq c_0(t-t_0) = (c_0/2)(t + t - 2t_0) = (c_0/2)(t+1).$$

   Ainsi il vient

   $$\frac{2|x(t)|}{c_0(t+1)} \geq 1,$$

   et donc, pour de tels t, on a

   $$\theta\left(\frac{2|x(t)|}{c_0(t+1)}\right) = 1.$$

   Le résultat s'en suit immédiatement.

   (b) Comme $|\theta| \leq 1$, et $\theta = 0$ sur $]-\infty, 1/2]$, on a

   $$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f_{c_0}(t,x)| \leq \sup_{[x|\geq c_0(t+1)/4} |\nabla V(x)|.$$

   Il est donc clair que (H4) implique bien que f_{c_0} vérifie (H1).

   (c) Pour tout $t \geq t_0$ (ce t_0 étant uniforme en (y,q)), la trajectoire du système considéré coïncide avec une trajectoire du système (F) pour la fonction f_{c_0}. D'après les résultats de la première partie, ces trajectoires ont bien le comportement annoncé en temps long, et ce uniformément par rapport à la donnée initiale.

8. Remarquons que sur les trajectoires d'énergie nulle, on a

$$V(x(t)) = -\frac{1}{2}|p(t)|^2 \leq 0, \ \ \forall t \geq 0. \tag{6}$$

Commençons à faire quelques remarques à caractère général qui serviront dans les questions ci après. Pour tout instant t^* tel que $x(t^*) \neq 0$ et

$$\inf_{S_{|x(t^*)|}} V = G(|x(t^*)|) \geq 0, \tag{7}$$

nous avons nécessairement

$$V(x(t^*)) = 0, \ \text{ d'après (6) et (7),}$$

et donc

$$G(|x(t^*)|) = 0,$$

et

$$\partial_t x(t^*) = p(t^*) = 0, \ \text{ d'après (6).}$$

On en déduit tout d'abord que V atteint son minimum sur la sphère $S_{|x(t^*)|}$ précisément au point $x(t^*)$. D'après le théorème des extremas[4] liés, on sait que le gradient de V en ce point doit être proportionnel à la différentielle de l'application "norme" au point $x(t^*)$. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla V(x(t^*)) = \lambda x(t^*).$$

– Si le nombre λ est nul, alors le gradient de V est nul en $x(t^*)$ et comme $p(t^*) = 0$, on en déduit que la solution x est nécessairement constante égale à $x(t^*)$ (unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz).
– Sinon, λ est non nul et le gradient de V est non nul.

Calculons

$$\partial_t |x(t)|^2 = 2(x(t), x'(t)) = 2(x(t), p(t)),$$

qui est donc nulle en t^* et de plus nous avons

$$\partial_t^2 |x(t)|^2 = 2|p(t)|^2 + 2(x(t), x''(t)) = 2|p(t)|^2 - 2(x(t), \nabla V(x(t))),$$

ce qui donne, en $t = t^*$,

$$\left(\partial_t^2 |x(t)|^2\right)_{|t=t^*} = -2(x(t^*), \nabla V(x(t^*))).$$

D'après tout ce qui précède, ce nombre ne saurait être nul.

En conséquence de tout cela, on a montré que la quantité $|x(t)|^2 - |x(t^*)|^2$ (qui est nulle en $t = t^*$) ne pas peut changer de signe au voisinage de $t = t^*$ et ne peut s'annuler qu'en t^* sur un tel voisinage.

Bilan de l'affaire : la fonction $t \mapsto |x(t)|$ ne peut jamais "traverser" les valeurs r pour lesquelles $G(r) \geq 0$.

(a) D'après la définition de la suite r_k, il existe un k assez grand tel que $|y| < r_k$ et comme $G(r_k) \geq 0$, l'analyse préliminaire ci-dessus montre que la quantité $|x(t)|$ doit demeurer inférieure à r_k, ce qui montre bien que la trajectoire $(x(t))_t$ est bornée.

(b) **On va montrer une propriété un tout petit peu plus faible que celle donnée dans l'énoncé qui suffira à montrer le résultat final.** Plus précisément on va montrer que

$$\text{S'il existe } \underline{t} \geq 0 \text{ t.q. } |x(\underline{t})| > r_0 \text{ alors } |x(t)| \geq r_0, \ \ \forall t \geq 0. \tag{8}$$

La différence avec l'énoncé réside dans l'inégalité large d'une part et dans le fait qu'on ne considère que le cas $|x| \geq r_0$ (l'autre cas se traite de la même façon, sauf si $r_0 = 0$ et $V(0) < 0$, mais cela ne sert pas dans la suite) ...

Remarquons que si $r_0 = 0$, la propriété (8) est triviale. Supposons donc $r_0 > 0$. Comme la fonction G est continue (Cf. la partie préliminaire) on en déduit que $G(r_0) \leq 0$. De plus, si on avait $G(r_0) < 0$, alors G serait strictement négative au voisinage de r_0 (toujours par continuité) et cela contredirait la définition de r_0.

On déduit de tout cela que $G(r_0) = 0$. On peut donc appliquer la propriété observée au début de cette question 8) qui dit que $|x(t)|$ ne peut traverser la valeur r_0. Ceci prouve bien (8).

4. c'est un mot d'origine latine qui ne prend donc pas d'accent

(c) Comme $|G|$ est continue et non nulle sur $]r_0, +\infty[$, la fonction K est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur son intervalle de définition. Si on admet que $\lim_{r \to r_0^+} K(r)$ peut être égale à $-\infty$ (on verra que cela ne peut arriver en réalité), il reste à vérifier que la limite de K en $+\infty$ est bien égale à $+\infty$.

Ceci provient du fait que, comme V tend vers 0 à l'infini, on a $\lim_{r\to+\infty} |G(r)| = 0$ et donc $\lim_{r\to+\infty} 1/(2|G(r)|)^{\frac{1}{2}} = +\infty$ ce qui interdit très certainement la convergence de l'intégrale définissant K.

(d) Si $|y| > r_0$, la trajectoire vérifie alors $|x(t)| \geq r_0$ pour tout t et les points où $|x(t)| = r_0$ sont isolés (on a vu que le seul cas où ces points ne sont pas isolés est le cas d'une trajectoire constante, ce qui n'est pas possible ici vu que $|y| > r_0$).

Plaçons nous dans un intervalle de temps $]t_1, t_2[$ sur lequel $|x(t)| > r_0$. En particulier, $|x(t)|$ ne s'annulle pas et donc on peut dériver et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis (6),

$$\begin{aligned}\partial_t |x(t)| &= \frac{1}{|x(t)|}(\partial_t x(t), x(t)) \leq |\partial_t x(t)| = |p(t)| = \sqrt{2V(x(t))}\\ &\leq \sqrt{2|G(|x(t)|)|} = \frac{1}{K'(|x(t)|)}.\end{aligned}$$

Sur un tel intervalle de temps, on a donc

$$\partial_t K(|x(t)|) \leq 1,$$

et donc

$$K(|x(t)|) \leq K(|x(s)|) + (t-s), \ \ \forall s < t \in]t_1, t_2[.$$

- Supposons que $K(r_0) = -\infty$. Dans ce cas, on peut faire tendre s vers t_1 et obtenir que $K(|x(t)|) = -\infty$ pour tout $t \in [t_1, t_2[$, ce qui montre que $|x(t)| = r_0$ pour tout $t \in]t_1, t_2[$. Ceci contredit le caractère isolé des instants où $|x(t)| = r_0$. Ce cas n'est donc pas possible.
- On a donc $K(r_0) \in \mathbb{R}$ et en faisant tendre s vers t_1, on trouve

$$K(|x(t)|) \leq K(|x(t_1)|) + (t - t_1).$$

En recollant toutes les inégalités ainsi obtenus sur tous les intervalles où $|x|$ ne vaut pas r_0, on trouve bien que

$$K(|x(t)|) \leq K(y) + t,$$

ou encore, comme K^{-1} est croissante,

$$|x(t)| \leq K^{-1}(K(y) + t).$$

Remarquer l'erreur de signe dans l'énoncé

(e) On a vu que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{1}{|2G(s)|^{\frac{1}{2}}} = +\infty,$$

ce qui, par l'argument usuel de Cesaro montre que

$$\frac{1}{r}\int_R^r \frac{1}{|2G(s)|^{\frac{1}{2}}}\, ds = +\infty,$$

c'est-à-dire que $K(r)/r \to +\infty$ quand $r \to +\infty$. Par composition avec K^{-1} qui est croissante et tend vers l'infini à l'infini, on trouve

$$\frac{s}{K^{-1}(s)} \xrightarrow[s\to+\infty]{} +\infty,$$

où encore

$$\frac{K^{-1}(s)}{s} \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0.$$

In fine, on obtient

$$\frac{|x(t)|}{t} \leq \frac{K^{-1}(K(|y|) + t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$