Corrigé du problème d'analyse Agreg Interne 2011

Partie I - Préliminaires

1. (a) f et y étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, leur composée $f \circ y$ est également continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, y est bornée et prend donc ses valeurs dans un intervalle compact $K = [-R, R]$, $R > 0$. Comme f est continue sur le compact K, elle y est bornée et comme on a $f \circ y = f_{|K} \circ y$, on obtient que $f \circ y$ est bornée également.

   (b) Comme $BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la première question nous montre que
$$\varphi \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{N}_f(\varphi) = f \circ \varphi \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$
   De plus, si $\varphi \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on a par définition $\varphi' \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc $\mathcal{L}_f(\varphi) \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. (a) Il faut tout d'abord s'assurer de l'existence de l'intégrable. Comme g est bornée nous avons
$$|e^{bs} g(s)| \leq \|g\|_\infty e^{bs}, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{1}$$
   or la fonction $s \mapsto e^{bs}$ est intégrale au voisinage de $-\infty$ car $b > 0$, ce qui montre que l'intégrale qui intervient dans la définition de T_g est bien définie. De plus, T_g apparaît donc comme le produit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ($x \mapsto e^{-bx}$) avec une primitive d'une fonction continue qui est donc de classe $\mathcal{C}^1$. On en déduit que T_g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
   Calculons la dérivée de T_g :
$$T_g'(x) = -be^{-bx} \left(\int_{-\infty}^{x} e^{bs} g(s)\, ds \right) + e^{-bx} \left(e^{bx} g(x) \right) = -bT_g(x) + g(x).$$
   On obtient bien que T_g est solution de l'équation linéaire $y' + by = g$.
   En reprenant la majoration (1) que l'on intègre entre $-\infty$ et x, pour un x quelconque dans $\mathbb{R}$, on trouve
$$|T_g(x)| \leq e^{-bx} \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{x} e^{bs}\, ds = e^{-bx} \|g\|_\infty \frac{e^{bx}}{b} = \frac{\|g\|_\infty}{b}.$$
   Ceci montre que T_g est bornée. L'équation différentielle satisfaite par T_g montre immédiatement que T_g' est également bornée et donc, *in fine*, que $T_g \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   (b) On a déjà obtenu ci-dessus la majoration $\|T_g\|_\infty \leq \frac{\|g\|_\infty}{b}$ et en utilisant l'équation différentielle que vérifie T_g on arrive à
$$\|T_g'\|_\infty \leq b\|T_g\|_\infty + \|g\|_\infty \leq 2\|g\|_\infty,$$
   et donc
$$\|T_g\|_{BC^1} = \|T_g\|_\infty + \|T_g'\|_\infty \leq \left(2 + \frac{1}{b}\right) \|g\|_\infty.$$

3. (a) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction Δ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, l'ensemble Π^+ est un demi-plan ouvert de $\mathbb{R}^2$. C'est en particulier un convexe et donc un connexe de $\mathbb{R}^2$. L'image de Π^+ par Δ est donc un connexe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle de $\mathbb{R}$.
   Par ailleurs, comme f est injective, l'application Δ ne peut s'annuler sur Π^+, ainsi son image est un intervalle ne contenant pas 0, ce qui montre que $\Pi^+(\Delta) \subset \mathbb{R}_*^+$ ou bien $\Pi^+(\Delta) \subset \mathbb{R}_*^-$. Dans le premier cas cela montre que f est strictement décroissante et dans le second cas, cela montre que f est strictement croissante.

   (b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bijective. D'après la question précédente, f est strictement monotone. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante. Pour tout intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$, on a donc
$$f(]\alpha, \beta[) =]f(\alpha), f(\beta)[.$$
   Comme f est bijective, ceci peut s'écrire
$$(f^{-1})^{-1}(]\alpha, \beta[) =]f(\alpha), f(\beta)[,$$
   ainsi l'image réciproque par f^{-1} de tout intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, ce qui montre que f^{-1} est continue.

(c) L'implication $ii) \Rightarrow i)$ est évidente. L'implication $i) \Rightarrow ii)$ est donnée par la question précédente.

4. Si $y \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de l'équation proposée, elle est dérivable et sa dérivée est donnée par $y' = h - f \circ y$. D'après l'hypothèse sur h et la question I.1.a) on a donc $y' \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ce qui montre bien que $y \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Partie II - Le cas linéaire

1. (a) Dans le cas $a = 0$, l'équation proposée est $y' = h$, de sorte que ses solutions sont exactement les primitives de h. Deux solutions de cette équation ne peuvent donc différer que d'une constante. Ainsi, il apparaît clairement que h admet une primitive bornée si et seulement si toutes ses primitives le sont.

   (b) Dans le cas $h = 0$ (ou encore $h(x) = \sin(x)$ ...) on est dans le premier cas (toutes les solutions de l'équation sont bornées), alors que dans le cas $h(x) = 1$ aucune solution de l'équation n'est bornée.

2. (a) D'après la question I.2 (appliquée avec $b = a > 0$) la fonction $y_0 = T_h$ est une solution de l'équation $(\mathcal{E}_L)$ qui appartient à $BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De plus, on a l'estimation

$$\|y_0\|_{BC^1} \leq \left(2 + \frac{1}{a}\right) \|h\|_\infty.$$

   (b) Soit y une solution quelconque de $(\mathcal{E}_L)$, on a

$$(y - y_0)' + a(y - y_0) = (y' + ay - h) - (y_0' + ay_0 - h) = 0,$$

   et donc $y - y_0$ est solution de l'équation homogène que l'on résout immédiatement :

$$y - y_0 = Ce^{-ax}.$$

   Comme y_0 est bornée, on voit que y est bornée si et seulement si $x \mapsto Ce^{-ax}$ est bornée ce qui n'arrive que pour $C = 0$, c'est-à-dire si $y = y_0$.

   La fonction y_0 est donc l'unique solution bornée de l'équation proposée.

   (c) On pose $z(x) = y(-x)$ et on effectue le calcul suivant

$$z'(x) = -y'(-x) = -(-ay(-x) + h(-x)) = ay(-x) - h(-x) = az(x) - h(-x),$$

   ainsi z est solution de $z' - az = \tilde{h}$ où $\tilde{h}(x) = -h(-x)$. Comme $\tilde{h}$ est dans $BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $-a > 0$, on peut appliquer le résultat de la question précédente : cette nouvelle équation admet une unique solution bornée notée z_0 et ainsi la fonction $y_0(x) = z_0(-x)$ est l'unique solution bornée de l'équation initiale.

3. La fonction $f : x \mapsto ax$ est un homéomorphisme si et seulement si $a \neq 0$. Il s'agit donc de démontrer que $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme si et seulement si $a \neq 0$.
   - Si $a = 0$, la question II.1.b montre qu'il existe $h \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que l'équation $y' = h$ n'admet aucune solution bornée. Ainsi une telle fonction h n'est pas dans l'image de l'opérateur $\mathcal{L}_f$. Celui-ci n'est donc pas surjectif et *a fortiori* n'est pas un homéomorphisme.
   - Si $a \neq 0$: la question I.1.b montre que $\mathcal{L}_f$ envoie $BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la question II.2 montre que pour toute fonction $h \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ il existe une unique solution bornée y de l'équation $y' + ay = h$, c'est-à-dire de $y' + f \circ y = h$. D'après la question I.4, cette solution est dans $BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ainsi, cette fonction y est l'unique élément dans $BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifie $\mathcal{L}_f y = h$. On a donc montré que $\mathcal{L}_f$ est bijectif.

     Par ailleurs, on a pour tout $y \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\|\mathcal{L}_f y\|_\infty = \|y' + ay\|_\infty \leq \|y'\|_\infty + |a|\|y\|_\infty \leq (1 + |a|)\|y\|_{BC^1},$$

     ce qui montre la continuité de l'opérateur **linéaire** $\mathcal{L}_f$.

Enfin, dans le cas $a > 0$, l'estimation de la question II.2.a montre que pour tout $h \in BC^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on a

$$\|\mathcal{L}_f^{-1} h\|_{BC^1} \leq \left(2 + \frac{1}{|a|}\right) \|h\|_\infty,$$

ce qui montre la continuité de $\mathcal{L}_f^{-1}$. Le cas $a < 0$, donne la même estimation (en utilisant le changement de fonction $y \mapsto z$ introduit plus haut).
Le théorème est donc démontré dans le cas linéaire.

Partie III - A propos des opérateurs $\mathcal{N}_f$ et $\mathcal{L}_f$

1. (a) Dans l'espace vectoriel normé $(BC^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ la norme $\|.\|_\infty$ est continue (elle est même 1-lipschitzienne [1]). Ainsi, si $(g_n)_n$ converge vers g au sens de la norme infinie, on a

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_\infty = \|g\|_\infty.$$

En particulier, la suite numérique $(\|g_n\|_\infty)_n$ est bornée ce qui montre que $\rho = \sup_n \|g_n\|_\infty$ est fini. On a donc $\|g_n\|_\infty \leq \rho$ pour tout n et en passant à la limite on trouve $\|g\|_\infty \leq \rho$.

(b) On introduit le compact $K = [-\rho, \rho]$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Heine on sait que f est uniformément continue sur K. Ceci signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0, \ \ \forall y_1, y_2 \in K, |y_1 - y_2| \leq \delta \Rightarrow |f(y_1) - f(y_2)| \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Les propriétés établies à la question précédente montrent que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 0$, on a $g(x) \in K$ et $g_n(x) \in K$.
Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ et prenons le $\delta > 0$ qui nous est donné par (2). Comme $(g_n)_n$ converge vers g pour la norme infinie, il existe un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \ \ \|g_n - g\|_\infty \leq \delta.$$

Soit maintenant $n \geq n_0$, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g(x) \in K$ et $g_n(x) \in K$, on peut appliquer (2) avec $y_1 = g(x)$ et $y_2 = g_n(x)$, ce qui donne

$$|f \circ g_n(x) - f \circ g(x)| = |f(g_n(x)) - f(g(x))| \leq \varepsilon.$$

En prenant le supremum par rapport à $x \in \mathbb{R}$, on a obtenu

$$\forall n \geq n_0, \ \| \underbrace{f \circ g_n}_{=\mathcal{N}_f(g_n)} - \underbrace{f \circ g}_{=\mathcal{N}_f(g)} \|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui montre la convergence de $\mathcal{N}_f(g_n)$ vers $\mathcal{N}_f(g)$ pour la norme infinie.
Ceci étant vrai pour toute suite $(g_n)_n$ qui converge vers g, on a bien établi la continuité de $\mathcal{N}_f$. [2]

2. (a) Si f est un homéomorphisme, elle est en particulier bijective et donc pour toutes fonctions $g, h \in BC^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$h(x) = \mathcal{N}_f(g)(x) \Rightarrow h(x) = f(g(x)) \Rightarrow g(x) = f^{-1}(h(x)) \Rightarrow g(x) = \mathcal{N}_{f^{-1}}(h)(x).$$

On a donc bien $\mathcal{N}_f^{-1} = \mathcal{N}_{f^{-1}}$ et comme f^{-1} est continue, la question III.1 montre que $\mathcal{N}_f$ et $\mathcal{N}_{f^{-1}}$ sont continus.
On a donc bien établi que $\mathcal{N}_f$ est un homéomorphisme.

1. comme dans tout espace vectoriel normé d'ailleurs ....
2. rappelons que la propriété de continuité séquentielle d'une application est équivalente à la continuité dès lors qu'on travaille dans un espace **métrique**.

(b) Le réel y étant fixé, la fonction constante h_y est bien continue et bornée et comme $\mathcal{N}_f$ est supposé être un homéomorphisme, il existe une unique fonction $\xi \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\mathcal{N}_f(\xi) = h_y$.
Suivons ensuite l'indication de l'énoncé et posons $\eta(x) = \xi(x+a)$ pour un réel a fixé. Il est clair que η est continue et bornée car ξ l'est. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{N}_f(\eta)(x) = f \circ \eta(x) = f(\xi(x+a)) = \mathcal{N}_f(\xi)(x+a) = h_y(x+a) = y,$$

ce qui montre que $\mathcal{N}_f(\eta) = h_y$. Ainsi η et ξ sont deux antécédents par $\mathcal{N}_f$ de la même fonction h_y. Comme il existe un unique tel antécédent, on a $\eta = \xi$ ce qui montre que pour tout x on a $\xi(x) = \xi(x+a)$.
Cette propriété étant vraie pour toute valeur de a, on en déduit bien que ξ est une fonction constante. On note $\varphi(y) \in \mathbb{R}$ cette valeur. On a donc établi que pour pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{N}_f(h_{\varphi(y)}) = h_y.$$

Si, à y fixé, on évalue cette expression en un point $x \in \mathbb{R}$ quelconque, on a

$$y = h_y(x) = \mathcal{N}_f(h_{\varphi(y)})(x) = f \circ h_{\varphi(y)}(x) = f(\varphi(y)).$$

Ainsi, la fonction f est bijective et son inverse est la fonction φ construite ci-dessus. Comme f est continue, la question I.3 montre que f est bien un homéomorphisme.

3. L'application $y \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto y' \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est linéaire et continue car

$$\|y'\|_\infty \leq \|y\|_{BC^1}, \quad \forall y \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Comme $\mathcal{L}_f y = y' + \mathcal{N}_f y$ et que $\mathcal{N}_f$ est continue d'après la question III.1, on obtient bien que $\mathcal{L}_f$ est continu.

4. (a) On applique la même méthode que dans la question III.2. On choisit un $a \in \mathbb{R}$ puis on pose $\eta(x) = \xi(x+a)$. On calcule $\mathcal{L}_f(\eta)$

$$\mathcal{L}_f(\eta)(x) = \eta'(x) + f \circ \eta(x) = \xi'(x+a) + f \circ \xi(x+a) = \mathcal{L}_f(\xi)(x+a) = h_y(x+a) = h_y(x).$$

Par unicité de l'antécédent de h_y par $\mathcal{L}_f$, on en déduit que $\xi = \eta$. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a bien montré que ξ est constante.

(b) La fonction ξ constuite précédemment est constante, donc sa dérivée est nulle et on a donc

$$h_y = \mathcal{L}_f(\xi) = \xi' + f \circ \xi = f \circ \xi,$$

en évaluant cette égalité en un point quelconque, on obtient $f(\xi(x)) = y$. Ceci prouve que n'importe quel réel y est dans l'image de f, c'est-à-dire que f est surjective.

(c) Soient y_1 et y_2 deux réels tels que $f(y_1) = f(y_2)$. Ecrivons pour $i = 1, 2$

$$\mathcal{L}_f(h_{y_i}) = h'_{y_i} + f \circ h_{y_i} = 0 + h_{f(y_i)},$$

par hypothèse, $f(y_1) = f(y_2)$ et donc nous avons $\mathcal{L}_f(h_{y_1}) = \mathcal{L}_f(h_{y_2})$. Comme $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme, on en déduit que $h_{y_1} = h_{y_2}$ et donc $y_1 = y_2$, ce qui montre que f est injective.

(d) D'après les questions précédentes, f est bijective et continue par hypothèse, c'est donc un homéomorphisme d'après la question I.3.

Partie IV - Un problème de point fixe

1. Dans le cas où f est dérivable, la condition équivalente à (H) est bien entendu

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad m \leq f'(x) \leq M. \tag{3}$$

Démontrons cela.

– Supposons que la propriété (H) est vérifiée. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ on a donc

$$m \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq M,$$

on passe à la limite quand $h \to 0$ et on obtient (3).

– Inversement, supposons que (3) est vraie. On prend $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, le théorème des accroissements finis nous assure l'existence d'un $c \in]x, y[$ tel que $f(x) - f(y) = (x-y)f'(c)$ et donc

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) \in [m, M].$$

2. La propriété (H) implique en particulier que le quotient $(f(x)-f(y))/(x-y)$ est strictement positif pour $x \neq y$ et donc on sait que f est strictement monotone et en particulier injective.

   Il reste à montrer que f est surjective. On sait déjà, comme f est continue, que l'image de f est un intervalle de $\mathbb{R}$ (théorème des valeurs intermédiaires). Pour montrer la surjectivité de f il suffit donc de montrer que f n'est ni majorée ni minorée. Raisonnons par l'absurde :

   – Si f est majorée par un certain nombre $K > 0$, on peut appliquer la propriété (H) avec $x = 0$ et $y > 0$, on obtient

   $$m \leq \frac{f(y)-f(0)}{y} \leq \frac{K - f(0)}{y},$$

   et si on fait tendre y vers l'infini, on trouve $m \leq 0$ ce qui contredit l'hypothèse $m > 0$.

   – De même si f est minorée par un certain nombre $-K < 0$, on applique la propriété (H) avec $y = 0$ et $x < 0$ et on trouve

   $$m \leq \frac{f(0)-f(x)}{-x} \leq \frac{f(0)+K}{-x}.$$

   En faisant tendre x vers $-\infty$, on trouve encore $m \leq 0$ et donc une contradiction.

3. Soient $x \neq y$. On effectue le calcul suivant

   $$\frac{F_k(y)-F_k(x)}{y-x} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} - k,$$

   et donc

   $$\frac{m-M}{2} = m - k \leq \frac{F_k(y)-F_k(x)}{y-x} \leq M - k = \frac{M-m}{2},$$

   ce qui démontre que

   $$|F_k(x) - F_k(y)| \leq \frac{M-m}{2}|x-y|,$$

   et donc que F_k est lipschitzienne de rapport $L = (M-m)/2$.

4. On a vu à la question III.1, que la composée d'une fonction continue avec une fonction continue bornée était elle-même continue bornée et donc $F_k \circ \varphi$ est dans $BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et de même pour la somme $F_k \circ \varphi + h$.

   Les propriétés de $G(h, \varphi)$ proviennent de la question I.2.

5. Commençons par fixer h et considérons φ_1, φ_2 dans $BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a

   $$G(h, \varphi_1) - G(h, \varphi_2) = T_{F_k \circ \varphi_1 - F_k \circ \varphi_2},$$

   où on utilise les notations de la question I.2 (avec $b = k$). D'après la question I.2.b on a

   $$\|G(h, \varphi_1) - G(h, \varphi_2)\|_\infty \leq \frac{1}{k}\|F_k \circ \varphi_1 - F_k \circ \varphi_2\|_\infty \leq \frac{L}{k}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty.$$

   Ceci montre que G est lipschitzienne par rapport à φ de rapport L/k.

   Fixons maintenant φ, et prenons $h_1, h_2 \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a

   $$G(h_1, \varphi) - G(h_2, \varphi) = T_{h_1 - h_2},$$

   et donc

   $$\|G(h_1, \varphi) - G(h_2, \varphi)\|_\infty \leq \frac{1}{k}\|h_1 - h_2\|_\infty,$$

   ce qui prouve que G est lipschitzienne par rapport à h de rapport $1/k$.

6. On a vu que $G(h,\varphi)$ est de la forme T_g pour une certaine fonction continue bornée g et donc, les résultats de la partie I montrent que $G(h,\varphi)$ est dans $BC^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que de plus elle vérifie l'équation

$$G(h,\varphi)' + kG(h,\varphi) = -F_k \circ \varphi + h = -f \circ \varphi + k\varphi + h,$$

ce qui est le résultat demandé.

7. Supposons que $G(h,\varphi) = \varphi$. La question précédente montre que φ est dans $BC^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que l'on a $\varphi' + f \circ \varphi = h$, c'est-à-dire $\mathcal{L}_f(\varphi) = h$.
Réciproquement, si $\varphi \in BC^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifie $\mathcal{L}_f(\varphi) = h$, alors on a

$$G(h,\varphi)' = k(\varphi - G(h,\varphi)) + \varphi',$$

et donc

$$(G(h,\varphi) - \varphi)' = k(\varphi - G(h,\varphi)).$$

Ainsi la fonction $z = G(h,\varphi) - \varphi$ est une solution bornée de l'équation $z' = kz$, ce qui n'est possible que si $z = 0$. D'où le résultat.

8. h étant fixé, on a vu que $\varphi \mapsto G(h,\varphi)$ est lipschitzienne de rapport $L/k = \frac{M-m}{M+m}$. On remarque qu'on peut toujours augmenter un peu M pour que $M > m$ de sorte que ce rapport L/k est strictement plus petit que 1. L'espace $BC^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, muni de la norme infinie étant complet on peut appliquer le théorème du point fixe de Banach qui dit que cette application admet un unique point fixe.
D'après la question précédente, pour tout $h \in BC^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ fixée il existe donc une unique fonction $\varphi \in BC^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{L}_f(\varphi) = h$, ce qui montre que $\mathcal{L}_f$ est une bijection.

9. (a) Il suffit d'utiliser correctement les estimations Lipschitz obtenues à la question IV.5 de la façon suivante

$$\begin{aligned}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty = \|G(h_1,\varphi_1) - G(h_2,\varphi_2)\|_\infty &\le \|G(h_1,\varphi_1) - G(h_1,\varphi_2)\|_\infty + \|G(h_1,\varphi_2) - G(h_2,\varphi_2)\|_\infty \\ &\le \frac{L}{k}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty + \frac{1}{k}\|h_1 - h_2\|_\infty,\end{aligned}$$

d'où le résultat avec $r = L/k \in]0,1[$.

(b) D'après la question précédente, si $\mathcal{L}_f(\varphi_1) = h_1$ et $\mathcal{L}_f(\varphi_2) = h_2$ alors on a

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty \le \frac{1}{k(1-r)}\|h_1 - h_2\|_\infty.$$

Ainsi $\mathcal{L}_f^{-1}$ est lipschitzien de rapport $\frac{1}{k(1-r)}$.

(c) On a vu en IV.8 que $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to BC^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est une bijection, en III.3 que $\mathcal{L}_f$ est continu et enfin en IV.9.b que $\mathcal{L}_f^{-1}$ ce qui achève la preuve du résultat.

Partie V - Un exemple

1. La fonction f dont il est question ici est la fonction $s \mapsto f(s) = 2s + \sin^2(s)$. Cette fonction est dérivable et sa dérivée vaut $f'(s) = 2 + 2\sin(s)\cos(s) = 2 + \sin(2s)$, ainsi on a

$$1 \le f'(s) \le 3, \;\; \forall s \in \mathbb{R},$$

et ainsi la propriété (3) est vraie pour $m = 1$ et $M = 3$, donc les résultats de la partie IV s'appliquent.

2. D'après la partie IV, l'opérateur $\mathcal{L}_f$ est une bijection et donc il existe une unique solution bornée de l'équation. Comme f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ cette solution bornée est constante.

3. (a) Toute solution bornée de (F) est également dans $BC^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ d'après la question I.4. Comme $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme, une telle solution existe de façon unique.

(b) On a $\varphi' + 2\varphi = h - \sin^2(\varphi)$. La fonction h est bornée et $0 \le \sin^2 \le 1$ et donc $\varphi' + 2\varphi$ est bornée.

(c) La fonction γ est dérivable et on a

$$|\gamma'(x)| = e^{2x}|\varphi'(x) + 2\varphi(x)| \leq Me^{2x}, \tag{4}$$

où M est une borne de $|\varphi' + 2\varphi|$. Ainsi l'intégrale de γ' sur un intervalle de la forme $[(u+v)/2, v[$ est absolument convergente et donc l'intégrale de γ' converge en v, ce qui exprime que γ admet une limite à gauche en v. Ainsi φ admet aussi une limite à gauche en v, ceci contredit le théorème d'explosion en temps fini.

(d) On raisonne de façon similaire pour la borne gauche de l'intervalle de sorte que l'intervalle de définition maximal est $\mathbb{R}$ tout entier. De plus, de l'inégalité (4) on déduit que pour $x > 0$ on a

$$|\gamma(x)| \leq |\gamma(0)| + \int_0^x |\gamma'(s)|\, ds \leq |\gamma(0)| + \frac{M}{2}e^{2x},$$

et donc pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$|\varphi(x)| = e^{-2x}|\gamma(x)| \leq \frac{M}{2} + |\gamma(0)|e^{-2x} \leq \frac{M}{2} + |\gamma(0)|.$$

4. (a) La fonction h considérée ici est 2π-périodique. On vérifie aisément que $x \mapsto \varphi_0(x+2\pi)$ est également une solution bornée de l'équation (F). Une telle solution étant unique, on en déduit que $\varphi_0(x+2\pi) = \varphi_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que φ_0 est 2π-périodique.

(b) Calculons $\psi' + 2\psi$:

$$\psi' + 2\psi = (\varphi' - 2\varphi) - (\varphi_0' - 2\varphi_0) = \sin^2(\varphi) - \sin^2(\varphi_0),$$

et donc la fonction $w = \sin^2(\varphi) - \sin^2(\varphi_0)$ convient (elle est bien continue et bornée !).
Par ailleurs, si ψ s'annule en un point, cela signifie que φ et φ_0 coincident en ce point. Par la propriété d'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz (que l'on peut appliquer ici car la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$) on en déduirait que φ et φ_0 seraient identiques, ce qui est exclu.

(c) On écrit l'équation précédente sous la forme

$$\psi' + \left(2 - \frac{w}{\psi}\right)\psi = 0,$$

car ψ ne s'annule pas et on constate que

$$\left|\frac{w(x)}{\psi(x)}\right| = \left|\frac{\sin^2(\varphi(x)) - \sin^2(\varphi_0(x))}{\varphi(x) - \varphi_0(x)}\right| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

car $\sin^2$ est 1-lipschitzienne.
Il vient

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\psi(x)\right) = e^x(\psi'(x) + \psi(x)) = -e^x(1 - w/\psi)\psi(x),$$

et comme ψ est de signe constant et que $w/\psi \leq 1$, on en déduit

$$\frac{d}{dx}\left(e^x|\psi(x)|\right) = -e^x(1 - w/\psi)|\psi(x)| \leq 0.$$

Ainsi $x \mapsto e^x|\psi(x)|$ décroit sur $\mathbb{R}^+$, ce qui donne le résultat attendu.

(d) La fonction φ_0 est continue périodique et non constante, son image est donc un intervalle compact non réduit à un singleton de la forme $[a, b]$ avec $a < b$. Montrons que la constante $\alpha = (a+b)/2$ convient (en fait n'importe quel α dans $]a, b[$ conviendrait).
D'après la question précédente, on a $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$. En particulier il existe $A > 0$ tel que

$$|\psi(x)| < \frac{b-a}{4}, \quad \forall x \geq A.$$

Prenons maintenant $y_1 < y_2$ tels que $\varphi_0(y_1) = a$ et $\varphi_0(y_2) = b$. Par périodicité, on a $\varphi_0(y_1 + 2k\pi) = a$ et $\varphi_0(y_2 + 2k\pi) = b$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $y_1 + 2k\pi \geq A$ on a

$$\varphi(y_1+2k\pi) = \varphi_0(y_1+2k\pi)+\underbrace{(\varphi(y_1 + 2k\pi) - \varphi_0(y_1 + 2k\pi))}_{=\psi(y_1+2k\pi)} \geq a+\frac{b-a}{4} \leq \frac{b+3a}{4} < \frac{a+b}{2} = \alpha.$$

De même, on montre que pour tout k assez grand on a

$$\varphi(y_2 + 2k\pi) > \alpha.$$