C38121 **Ecole Normale Supérieure de Cachan**

61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en **3$^{\text{ème}}$ année**

MATHÉMATIQUES

Session 2008

Épreuve de MATHÉMATIQUES 1

Durée : **5 heures**

Aucun document n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdit

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est d'aborder la question de la diffusion pour le problème à deux corps de la mécanique classique : on considère les solutions des équations de Newton,

$$\partial_t^2 x(t,y,q) = \nabla V(x(t,y,q)), \quad \forall t \geq 0,$$

où $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un potentiel donné, pour des conditions initiales données par $(y,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$x(0,y,q) = y, \quad \partial_t x(0,y,q) = q.$$

L'application $t \mapsto x(t,y,q)$, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$, sera aussi vue comme une famille $(x(t,y,q))_{t\geq 0}$ de points de $\mathbb{R}^n$, appelée trajectoire.
On cherche une asymptotique pour cette trajectoire, lorsque le temps t tend vers $+\infty$: typiquement, on cherchera à montrer qu'il existe $p^+(y,q), x^+(y,q) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$x(t,y,q) - tp^+(y,q) - x^+(y,q) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

l'application $t \mapsto x^+(y,q) + tp^+(y,q)$ correspondant à une trajectoire pour la dynamique "libre" $(V = 0)$.

Notations et rappels

Dans tout l'énoncé, on notera

$$\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[, \quad \mathbb{R}_+^\star =]0,+\infty[.$$

L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^m$ est muni du produit scalaire usuel :

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m, \forall y = (y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^m, \quad x \cdot y = \sum_{i=1}^m x_i y_i,$$

et on note $|\cdot|$ la norme associée.

Pour tous réels T_1, T_2 tels que $T_1 < T_2$, on munit l'espace $\mathcal{C}^0([T_1, T_2], \mathbb{R}^m)$ des applications continues de $[T_1, T_2]$ dans $\mathbb{R}^m$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\forall g \in \mathcal{C}^0([T_1, T_2], \mathbb{R}^m), \quad \|g\|_\infty = \sup_{t \in [T_1, T_2]} |g(t)|.$$

On rappelle que $\mathcal{C}^0([T_1, T_2], \mathbb{R}^m)$, muni de cette norme, est un espace de Banach.
Lorsque V est une application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, on note, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $\nabla V(x)$ son gradient au point x, c'est-à-dire le vecteur dans $\mathbb{R}^m$ dont la j-ème coordonnée est la dérivée partielle de V par rapport à x_j au point $x \in \mathbb{R}^m$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \forall j \in \{1, \dots m\}, \quad (\nabla V(x))_j = \frac{\partial V}{\partial x_j}(x).$$

Lorsque f est une application de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$, on note $\partial_t f(t,x)$ (respectivement, $\partial_t^2 f(t,x)$) sa dérivée partielle (respectivement, sa dérivée partielle seconde) par rapport à t au point $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$, et $\nabla_x f(t,x)$ sa matrice jacobienne ("en x") au point $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$:

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \forall i,j \in \{1, \dots m\}, \quad (\nabla_x f(t,x))_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x),$$

où f_i est la i-ème composante de f :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \quad f(t,x) = (f_1(t,x), \dots, f_m(t,x)).$$

De même, si $g : (x,p) \mapsto g(x,p)$ est une application de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, on note, pour tout $(x,p) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$:

$$\nabla_x g(x,p) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x,p), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_m}(x,p) \right) \in \mathbb{R}^m,$$
$$\nabla_p g(x,p) = \left(\frac{\partial g}{\partial p_1}(x,p), \dots, \frac{\partial g}{\partial p_m}(x,p) \right) \in \mathbb{R}^m.$$

On rappelle le théorème de point fixe suivant :

Théorème 0. *Soit $(E_1, \|\cdot\|_1)$ un espace de Banach, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ un espace vectoriel normé, et $\mathcal{T}$ une application de $E_2 \times E_1$ dans E_1 telle que :*
(i) pour tout x dans E_1, l'application $y \mapsto \mathcal{T}(y,x)$ est continue de E_2 dans E_1 ;
(ii) il existe $C \in]0,1[$ tel que :

$$\forall y \in E_2, \forall x, x' \in E_1, \quad \|\mathcal{T}(y,x) - \mathcal{T}(y,x')\|_1 \leq C\|x - x'\|_1.$$

Alors, pour tout y dans E_2, il existe un unique $x(y)$ dans E_1 tel que $\mathcal{T}(y, x(y)) = x(y)$, et l'application $y \mapsto x(y)$ est continue de E_2 dans E_1.

On dira qu'une application $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ vérifie l'hypothèse (H) si :

$$(\mathrm{H}) \begin{cases} f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \text{ et} \\ \text{l'application } (t,x) \mapsto \nabla_x f(t,x) \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ \text{(à valeurs dans l'espace des matrices réelles carrées de taille } m, \\ \text{ identifié à } \mathbb{R}^{m^2}\text{, muni de la norme } |\cdot|). \end{cases}$$

On rappelle qu'on note $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ lorsque f est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}^m$, et lorsque ses dérivées partielles $\partial_t f$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ (pour $j \in \{1, \dots, m\}$) se prolongent par continuité à $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$.
De même, pour $k \geq 1$ entier, une application X de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^m$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ si elle est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, et si ses dérivées jusqu'à l'ordre k se prolongent par continuité à $\mathbb{R}_+$.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Préliminaires

(1) Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ vérifiant l'hypothèse (H) pour $m = N$. On montre ici que pour tout $Y \in \mathbb{R}^N$, il existe une unique application $t \mapsto X(t, Y)$, de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^N$, telle que

$$\begin{cases} \partial_t X(t, Y) = F(t, X(t, Y)) & \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \\ X(0, Y) = Y, \end{cases}$$

et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $Y \mapsto X(t, Y)$ est continue de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.
Pour tout $T > 0$, on considère l'application $\mathcal{T}_T$, de $\mathbb{R}^N \times \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^N)$, définie par :

$$\forall Y \in \mathbb{R}^N, \forall Z \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^N),\ \forall t \in [0, T],$$
$$(\mathcal{T}_T(Y, Z))(t) = Y + \int_0^t F(t', Z(t'))\mathrm{d}t'.$$

(a) Montrer que pour tous $T > 0$, $Y \in \mathbb{R}^N$, $Z \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^N)$, on a bien $\mathcal{T}_T(Y, Z) \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^N)$.

(b) Montrer qu'il existe $T_0 > 0$ tel que, pour tout $T \in [0, T_0]$, l'application $\mathcal{T}_T$ vérifie les hypothèses du théorème 0, pour les espaces $(E_1, \|\cdot\|_1) = (\mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2) = (\mathbb{R}^N, |\cdot|)$, avec par exemple la constante $C \in]0, 1[$:

$$C = T \sup\{|\nabla_X F(t, X)|,\ (t, X) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N\}.$$

(c) En déduire qu'il existe $T_0 > 0$ tel que, pour tout $T \in [0, T_0]$, et pour tout $Y \in \mathbb{R}^N$, il existe une unique application $t \mapsto Z_T(t, Y)$, de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^N$, telle que

$$\begin{cases} \partial_t Z_T(t, Y) = F(t, Z_T(t, Y)) & \text{pour tout } t \in [0, T], \\ Z_T(0, Y) = Y, \end{cases}$$

et que pour tout $t \in [0, T]$, l'application $Y \mapsto Z_T(t, Y)$ est continue de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

(d) En déduire, pour tout $Y \in \mathbb{R}^N$, l'existence de l'application $t \mapsto X(t, Y)$ cherchée.

(e) Montrer, pour tout $Y \in \mathbb{R}^N$, l'unicité de cette application (on pourra procéder par restriction à de petits intervalles pour t).

(2) Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifant l'hypothèse (H) pour $m = n$. Déduire de la question précédente (en considérant le système différentiel satisfait par $(x, \partial_t x)$) que pour tout $(y, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique application $t \mapsto x(t, y, q)$, de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$, telle que

$$\text{(F)} \begin{cases} \partial_t^2 x(t,y,q) = f(t, x(t,y,q)) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \\ x(0,y,q) = y, \quad \partial_t x(0,y,q) = q, \end{cases}$$

et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $(y, q) \mapsto (x(t, y, q), \partial_t x(t, y, q))$ est continue de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.

(3) Soit V une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, bornée ainsi que ses dérivées d'ordre un et deux. Déduire de la question précédente que pour tout $(y, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique application $t \mapsto x(t, y, q)$, de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$, telle que

$$\text{(P)} \begin{cases} \partial_t^2 x(t,y,q) = -\nabla V(x(t,y,q)) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \\ x(0,y,q) = y, \quad \partial_t x(0,y,q) = q, \end{cases}$$

et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $(y, q) \mapsto (x(t, y, q), \partial_t x(t, y, q))$ est continue de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.

(4) Montrer que, si V est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, alors l'application $r \mapsto \inf_{|x|=r} V(x)$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

Première partie

Soit une application $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifant l'hypothèse (H) pour $m = n$. Ainsi, pour tout $(y, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique trajectoire $t \mapsto x(t, y, q)$, de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$, solution du système (F), d'après la partie "préliminaires", question (2). On note alors $p(t, y, q) = \partial_t x(t, y, q)$.

On dira que f vérifie l'hypothèse (H_1) si on a :

$$(\mathrm{H}_1) \qquad \int_0^\infty \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(t,x)| \mathrm{d}t < \infty.$$

On dira que f vérifie l'hypothèse (H_2) si on a :

$$(\mathrm{H}_2) \qquad \int_0^\infty t \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(t,x)| \mathrm{d}t < \infty.$$

(1) **Moment asymptotique.** On suppose que f vérifie (H_1).

(a) En écrivant par exemple

$$p(t,y,q) = q + \int_0^t \partial_t p(t', y, q) \mathrm{d}t',$$

montrer que pour tout $(y, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe $p^+(y, q) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$p(t,y,q) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} p^+(y,q), \text{ uniformément en } (y,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

(b) Montrer que l'application $(y, q) \mapsto p^+(y, q)$ est continue de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

(c) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall (y,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad |p^+(y,q) - q| \leq C.$$

(d) En écrivant par exemple

$$x(t,y,q) = y + \int_0^t \partial_t x(t',y,q)\mathrm{d}t',$$

montrer que :

$$\forall (y,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \frac{x(t,y,q)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} p^+(y,q).$$

(2) **Position asymptotique.** On suppose que f vérifie (H_1) et (H_2).

(a) Montrer pour tout $(y,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe $x^+(y,q) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$x(t,y,q) - tp^+(y,q) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} x^+(y,q), \text{ uniformément en } (y,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Indication : on pourra montrer qu'on a

$$x(t,y,q) - tp^+(y,q) = y - \int_0^t \int_u^\infty f(v, x(v,y,q))\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

et utiliser une intégration par parties.

(b) Montrer que l'application $(y,q) \mapsto x^+(y,q)$ est continue de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

(c) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall (y,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad |x^+(y,q) - y| \leq C.$$

(d) Montrer que

$$x(t,y,q) - tp(t,y,q) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} x^+(y,q), \text{ uniformément en } (y,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Deuxième partie

Soit une application $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, bornée, ainsi que ses dérivées partielles d'ordre un et deux. Alors, pour tout $(y,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique trajectoire $t \mapsto x(t,y,q)$, de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$, solution du système (P), d'après la partie "préliminaires", question (3).

Dans toute cette partie, pour alléger les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur le couple $(y,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on note

$$x(t) = x(t,y,q) \text{ et } p(t) = \partial_t x(t,y,q).$$

On supposera de plus que V tend vers zéro à l'infini :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, (|x| \geq r \Rightarrow |V(x)| \leq \varepsilon).$$

On dira que V vérifie l'hypothèse (H_3) si on a :

$$(\mathrm{H}_3) \qquad x \cdot \nabla V(x) \text{ tend vers zéro à l'infini.}$$

On dira que V vérifie l'hypothèse (H_4) si on a :

$$(\mathrm{H}_4) \qquad \int_0^{\infty} \sup_{|x|\geq r} |\nabla V(x)| \mathrm{d}r < \infty.$$

(1) **Conservation de l'énergie.** Soit H l'application de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad H(x,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x).$$

Montrer que, pour tout $(y,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, l'application $t \mapsto H(x(t),p(t))$, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, est constante.

(2) En déduire que $(p(t))_{t\geq 0}$ est bornée.

(3) **Energie négative.** En déduire également (compte-tenu du fait que V tend vers zéro à l'infini) que, si $H(y,q) < 0$, alors $(x(t))_{t\geq 0}$ est bornée.

(4) On suppose à présent que V vérifie (H_3).

(a) On rappelle que l'application qui à $r \in \mathbb{R}$ associe $e^{-1/r}$ si $r > 0$ et 0 si $r \leq 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \begin{cases} r \in]1/2, 1[\Rightarrow \chi(r) > 0, \\ r \notin]1/2, 1[\Rightarrow \chi(r) = 0. \end{cases}$$

En déduire qu'il existe $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall r \in \mathbb{R},\ \theta'(r) \geq 0, \text{ et } \begin{cases} r \leq 1/2 \Rightarrow \theta(r) = 0, \\ r \geq 1 \Rightarrow \theta(r) = 1. \end{cases}$$

(b) Pour tout $R > 0$, on définit, au moyen de la fonction θ ci-dessus, la fonction $\alpha_R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ par :

$$\forall (x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \alpha_R(x,p) = (x\cdot p)\,\theta(|x|^2/R^2).$$

Montrer que, pour tout $R > 0$ et pour tout $(x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\{H,\alpha_R\}(x,p) =& (2H(x,p) - x\cdot\nabla V(x) - 2V(x))\,\theta(|x|^2/R^2) \\ &+ \frac{2}{R^2}(x\cdot p)^2\,\theta'(|x|^2/R^2),\end{aligned}$$

où, lorsque f et g sont deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$, on note $\{f,g\}$ leur crochet de Poisson, application de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\{f,g\}(x,p) = \nabla_p f(x,p)\cdot\nabla_x g(x,p) - \nabla_x f(x,p)\cdot\nabla_p g(x,p).$$

En déduire que pour tout $\kappa > 0$, il existe $R > 0$ tel que, pour tout $(x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$(i) \text{ si } H(x,p) \geq \kappa, \text{ alors } \{H,\alpha_R\}(x,p) \geq 0;$$
$$(ii) \text{ si } |x| \geq R, \text{ alors } \{H,\alpha_R\}(x,p) \geq 2H(x,p) - \kappa.$$

(5) **Energie positive.** On suppose toujours que V vérifie (H_3).
Soit $\kappa > 0$. On fixe $R > 0$ donné par la question (4b). On se donne également $\sigma \in]0,1[$, $\varepsilon > 0$, et on va montrer qu'il existe $c_0, t_0 > 0$ tels que :

$$\forall t \geq 0, \quad |x(t)| \geq c_0(t - t_0),$$

uniformément par rapport à (y,q) dans l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{(y,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid H(y,q) \geq \kappa,\ y \cdot q \geq \sigma|y||q|,\ |y| \geq R,\ |q| \geq \varepsilon\}.$$

Utilisant à nouveau la fonction θ de la question (4a) ci-dessus, on pose, pour tout $r \geq 0$:

$$\Theta(r) = 1 + \int_1^r \theta(s)\mathrm{d}s,$$

et on définit, pour tout $R > 0$, la fonction $\beta_R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \beta_R(x) = \frac{R^2}{2}\Theta(|x|^2/R^2).$$

Noter que :

$$(|x| \geq R) \text{ équivaut à } (\beta_R(x) \geq R^2/2), \text{ et équivaut à } (\beta_R(x) = |x|^2/2)$$

(il est recommandé de faire des dessins pour visualiser ces fonctions).

(a) Soit $(y,q) \in \mathcal{F}$, et $(x(t),p(t))_{t\geq 0}$ la trajectoire associée. On pose, pour tout $t \geq 0$:

$$a(t) = \alpha_R(x(t),p(t)), \quad b(t) = \beta_R(x(t)).$$

Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$b'(t) = a(t) \quad \text{et} \quad a'(t) = \{H, \alpha_R\}(x(t),p(t)).$$

En déduire que, pour tout $t \geq 0$,

$$b(t) \geq a(0)t + b(0).$$

(b) En déduire que, pour tous $(y,q) \in \mathcal{F}$ et $t \geq 0$,

$$b(t) \geq \sigma\varepsilon R t + R^2/2,$$

puis que, pour tous $(y,q) \in \mathcal{F}$ et $t \geq 0$,

$$b(t) = \frac{1}{2}|x(t)|^2$$

(on rappelle que $(|x| \geq R)$ équivaut à $(\beta_R(x) \geq R^2/2)$, et équivaut à $(\beta_R(x) = |x|^2/2)$).

(c) En déduire que, pour tous $(y,q) \in \mathcal{F}$ et $t \geq 0$,

$$|x(t)|^2 \geq 2(\sigma\varepsilon R t + R^2/2),$$

puis qu'il existe un temps $t_1 > 0$ tel que, pour tout $(y,q) \in \mathcal{F}$,

$$t \geq t_1 \Longrightarrow a'(t) \geq \kappa.$$

(d) Conclure : montrer qu'il existe $c_0, t_0 > 0$ tels que :

$$\forall (y,q) \in \mathcal{F},\ \forall t \geq 0, \quad |x(t)| \geq c_0(t - t_0)$$

(on rappelle que $b''(t) = a'(t)$ pour tout $t \geq 0$).

(6) Montrer que l'hypothèse (H_4) implique l'hypothèse (H_3) (on pourra commencer par comparer $\displaystyle\int_{r/2}^r \sup_{|x|\geq s} |\nabla V(x)|\mathrm{d}s$ et $\displaystyle\sup_{|x|=r} |\nabla V(x)|$, pour tout $r \geq 0$).

(7) On suppose à présent que V vérifie (H$_4$). On se donne également les constantes $\kappa > 0$, $R > 0$, $\sigma \in]0,1[$ et $\varepsilon > 0$, ainsi que l'ensemble $\mathcal{F}$ et les constantes $c_0, t_0 > 0$, comme dans la question (5). On va montrer qu'alors, sur tout l'ensemble $\mathcal{F}$, on a :

$$\frac{x(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} p^+, \quad \text{et } p(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} p^+.$$

(a) Pour tous $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$f_{c_0}(t,x) = -\theta\left(\frac{2|x|}{c_0(t+1)}\right)\nabla V(x).$$

Montrer que pour tout $(y,q) \in \mathcal{F}$, on a :

$$t \geq 2t_0 + 1 \Longrightarrow f_{c_0}(t, x(t)) = -\nabla V(x(t)).$$

(b) Montrer que f_{c_0} vérifie (H$_1$).

(c) Déduire de la première partie qu'il existe une application $p^+ : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$ continue telle que :

$$p(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} p^+, \quad \text{uniformément en } (y,q) \in \mathcal{F},$$

$$\text{et} \quad \forall (y,q) \in \mathcal{F}, \ \frac{x(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} p^+.$$

(8) **Energie nulle.** Pour finir, on considère une trajectoire $(x(t))_{t\geq 0}$ associée à $(y,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que $H(y,q) = 0$. On ne suppose plus que V vérifie (H$_3$) ou (H$_4$), mais toujours que V tend vers zéro à l'infini. On pose, pour tout $r \geq 0$:

$$G(r) = \inf_{|x|=r} V(x).$$

(a) Montrer que, s'il existe une suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels positifs tendant vers $+\infty$ tels que $G(r_k) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors la trajectoire $(x(t))_{t\geq 0}$ est bornée.

(b) On suppose donc dans la suite qu'il existe $r_1 \geq 0$ tel que : pour tout $r \geq r_1$, $G(r) < 0$. On pose

$$r_0 = \inf\{R \geq 0 \mid \forall r \geq R, \, G(r) < 0\}.$$

Montrer que, s'il existe $\underline{t} \geq 0$ tel que $|x(\underline{t})| > r_0$ (respectivement, $< r_0$), alors pour tout $t \geq 0$, on a $|x(t)| > r_0$ (respectivement, $< r_0$).

(c) Soit $R > r_0$. On définit $K :]r_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall r > r_0, \quad K(r) = \int_R^r \frac{\mathrm{d}s}{|2G(s)|^{1/2}}.$$

Montrer que K est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]r_0, +\infty[$ sur $K(]r_0, +\infty[) =]K(r_0), +\infty[$. On note K^{-1} l'application réciproque.

(d) Montrer que, si $|y| > r_0$, alors pour tout $t \geq 0$,

$$\partial_t(|x(t)|) \leq |\partial_t x(t)| = |2V(x(t))|^{1/2}.$$

Dans ce cas, en déduire que :

$$\forall t \geq 0, \quad |x(t)| \leq K^{-1}(t - K(|y|)).$$

(e) Montrer que $\dfrac{K(r)}{r} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et en déduire que $\dfrac{x(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Fin de l'épreuve