C31121

Ecole Normale Supérieure de Cachan
61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en **3ème année**
Mathématiques
Session 2011

Épreuve de
MATHEMATIQUES 1

Durée : **5 heures**

Aucun document n'est autorisé .

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Notations et préambule

L'objectif de ce problème est d'étudier la notion de stabilisation d'un système physique régi par une équation différentielle.

Dans ce problème, n et m désigneront deux nombres entiers naturels tels que $n \geq 2$ et $m \geq 1$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\|\cdot\|_k$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^k$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ le produit scalaire associé. S'il n'y a pas d'ambiguité, on omettra les indices.

Soient p et q, deux entiers naturels non nuls. $\mathbb{R}^{p\times q}$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant p lignes et q colonnes.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Si $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$, la série $\left(\sum_k \frac{A^k}{k!}\right)$ converge normalement et l'exponentielle de A, notée indifféremment $\exp A$ ou e^A est la somme de cette série.

Considérons une équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{1}$$

où le champ de vecteurs $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est supposé de classe C^1.

On rappelle que, pour toute donnée initiale $x_0 \in \Omega$ (i.e. $x(0) = x_0$), il existe une unique solution maximale $x :]t_-, t_+[\to \Omega$ de (1) satisfaisant $x(0) = x_0$ (théorème de Cauchy-Lipschitz). En d'autres termes, toute autre solution de (1) satisfaisant cette condition initiale est une restriction de $x(\cdot)$ à un sous intervalle de $]t_-, t_+[$.

Pour un point $x_0 \in \Omega$, notons $\phi(\cdot, x_0)$, la solution maximale de (1), valant x_0 en 0 et $I_{x_0} =]t_-, t_+[$, son intervalle de définition. Autrement dit, $\phi(\cdot, x_0)$ est la solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\phi(t, x_0) = f(\phi(t, x_0)) \\ \phi(0, x_0) = x_0. \end{cases} \tag{2}$$

L'application $(t, x_0) \mapsto \phi(t, x_0)$ est appelée le *flot* du champ de vecteurs f de l'équation $x' = f(x)$.

Définition 1 *On dit qu'un point $\overline{x} \in \Omega$ est un équilibre de* (1) *si $\phi(t, \overline{x}) = \overline{x}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Définissons à présent les notions de *stabilité* et de *stabilité asymptotique* d'un équilibre.

Définition 2 *Soit $\overline{x}$, un équilibre de* (1).

(i) On dit que $\overline{x}$ est stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
- *Pour tout x_0 tel que $\|\overline{x} - x_0\|_n < \delta$, $\phi(t, x_0)$ existe pour tout $t > 0$;*
- $\|x_0 - \overline{x}\|_n < \delta \Longrightarrow \forall t > 0,\ \|\phi(t, x_0) - \overline{x}\|_n < \varepsilon$.

(ii) On dit qu'un équilibre $\overline{x}$ est asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe un voisinage V de $\overline{x}$ tel que, pour tout $x_0 \in V$, $\phi(t, x_0)$ existe pour tout $t > 0$ et

$$\lim_{t\to+\infty} \phi(t, x_0) = \overline{x}.$$

(iii) On dit qu'un équilibre $\overline{x}$ est instable lorsqu'il n'est pas stable.

Enfin, dans tout le problème,
- si $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, la notation $B(x, r)$ (respectivement $\overline{B(x, r)}$) désignera la boule ouverte (respectivement fermée) de centre x et rayon r pour la norme euclidienne.

- si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n$ désigne une fonction de classe C^1 en un point $x \in \Omega$, on notera $\nabla f(x)$ le gradient de f en x, c'est-à-dire
$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)^\top.$$
- soit $y(\cdot) = (y_1(\cdot), \cdots, y_n(\cdot))$, une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, dont toutes les composantes $y_i(\cdot)$ sont intégrables. La notation $\int_I y(s)ds$ désignera le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la $i^{\text{ème}}$ composante est $\int_I y_i(s)ds$, $i \in \{1, \cdots, n\}$.
- soit $M(\cdot)$, une application définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n\times m}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, toutes les composantes de la fonction $M(\cdot)x$ sont intégrables sur I. Alors, on définit la matrice $\widetilde{M} = \int_I M(s)ds$ de $\mathbb{R}^{n\times m}$ par la relation :
$$\forall x \in \mathbb{R}^m,\ \widetilde{M}x = \int_I M(s)xds.$$

Les trois premières parties de ce problème sont indépendantes, tandis que la dernière question de la partie IV nécessite d'avoir lu l'énoncé des parties II et III.

Préliminaires

1. Montrer que l'application $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
2. Soit $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Démontrer que
$$\forall t > 0,\ \int_0^t Be^{Bs}ds = -I + e^{Bt}.$$
3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On considère l'application $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.
Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, puis que le gradient de f est donné par
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \nabla f(x) = (A + A^\top)x.$$

Partie I

Stabilité des systèmes différentiels autonomes affines

On considère l'équation différentielle autonome linéaire
$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + b \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$
où $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ne dépendent pas de la variable t.

I.1 Démontrer que (3) possède une solution unique définie sur $\mathbb{R}$, donnée par
$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}bds.$$

I.2 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur b pour que le système (3) possède un point d'équilibre. Montrer que si cette condition est satisfaite, l'étude de la stabilité du système autour de ce point d'équilibre est équivalente à l'étude de la stabilité du système $x'(t) = Ax(t)$ en 0.

Dans la suite de cette partie, on étudie la stabilité de l'équilibre 0 *du système*

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{4}$$

pour différents exemples de A.

I.3 On suppose que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de A pour que 0 soit un point stable, puis pour que 0 soit un point asymptotiquement stable.

I.4 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la matrice de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ notée A_λ par

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\exp(tA_\lambda)$ dans chacun des cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$.

(b) Étudier la stabilité, puis la stabilité asymptotique de l'équilibre 0 du système

$$x'(t) = A_\lambda x(t).$$

(c) *Cas* $\lambda = 0$. Montrer que 0 n'est pas asymptotiquement stable.
0 est-il un point stable du système (3) ?

I.5 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On définit la matrice M_λ par

$$M_\lambda = \lambda I_n + N,$$

où I_n est la matrice identité de $\mathbb{C}^{n\times n}$ et $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.
Préciser si l'équilibre 0 du système $x'(t) = M_\lambda x(t)$ est stable, asymptotiquement stable ou instable dans chacun des cas $\Re e(\lambda) > 0$, $\Re e(\lambda) < 0$ et $\Re e(\lambda) = 0$.

I.6 On considère le système (3) dans le cas particulier où $n = 3$ et A est antisymétrique réelle.

(a) Que peut-on dire du spectre de A ? Justifier.
Étudier alors la stabilité et la stabilité asymptotique de l'équilibre 0.

(b) Démontrer que les trajectoires $\{x(t), t > 0\}$ du système différentiel (3) dans l'espace $\mathbb{R}^3$ sont des cercles.
Indication. On pourra commencer par démontrer que la trajectoire $\{x(t), t > 0\}$ *est incluse dans une sphère que l'on caractérisera.*

Partie II

Commande des systèmes différentiels autonomes linéaires

Soit $\tau > 0$. Dans cette partie et la suivante, on perturbe le système affine $x'(t) = Ax(t)$ à l'aide d'une fonction continue $u : [0, \tau] \to \mathbb{R}^m$ appelée *commande* ce qui nous amène à considérer le système

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \ t \in [0, \tau] \tag{5}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ne dépendent pas de la variable réelle t. On rappelle que dans ce cas, il existe une unique solution $x(\cdot)$ de ce système définie sur $\mathbb{R}$ et satisfaisant $x(0) = x_0$. Cette solution est donnée par :

$$\forall t \in [0, \tau], \ x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

On s'intéresse à la question de trouver une commande u de façon à stabiliser asymptotiquement le système (5). Il est cependant nécessaire au préalable d'étudier la *commandabilité* du système (5). C'est l'objet de cette partie, tandis que la partie III s'intéresse à la stabilisation asymptotique du système (5) à l'aide d'une commande u continue.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On définit l'ensemble $\mathcal{A}(\tau, x_0)$ *des états accessibles en temps* τ par

$$\mathcal{A}(\tau, x_0) = \{x(\tau),\ \exists u \in C^0([0,\tau], \mathbb{R}^m),\ x \text{ solution de (5) et } x(0) = x_0\},$$

où $C^0([0,\tau], \mathbb{R}^m)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[0,\tau]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. On dit que le système (5) est *commandable en temps* τ si $\mathcal{A}(\tau, x_0) = \mathbb{R}^n$. Enfin, on définit la *matrice de commandabilité* C comme le regroupement des n matrices de $\mathbb{R}^{n\times m}$, B, AB, ..., $A^{n-1}B$ en une seule de taille $n \times nm$, autrement dit

$$C = [B\ AB\ \cdots\ A^{n-1}B].$$

II.1 Démontrer que $\mathcal{A}(\tau, x_0)$ est un espace affine.

II.2 On définit l'espace vectoriel $\mathcal{R}(A, B)$ par

$$\mathcal{R}(A,B) = \operatorname{Vect}\left\{A^i Bz, i \in \{0, \cdots, n-1\}, z \in \mathbb{R}^m\right\}.$$

On souhaite démontrer que $\mathcal{A}(\tau, 0) = \mathcal{R}(A, B)$.

(a) Expliquer pourquoi, pour tout $i \in \mathbb{N}$, A^i est une combinaison linéaire de I, A, ..., A^{n-1}.

(b) En déduire que $\mathcal{A}(\tau, 0) \subset \mathcal{R}(A, B)$.

(c) Soit $w \in \mathbb{R}^n$ appartenant à l'orthogonal de $\mathcal{A}(\tau, 0)$. Démontrer que

$$\forall s \in [0,\tau],\ \left(e^{(\tau-s)A}B\right)^\top w = 0.$$

(d) En déduire successivement que

$$\forall i \in \{1, \cdots, n-1\},\ \left(A^i B\right)^\top w = 0,$$

puis que $\mathcal{A}(\tau, 0) = \mathcal{R}(A, B)$.

II.3 Déduire de la question précédente que le système (5) est commandable en temps τ si, et seulement si la matrice C est de rang n.

II.4 *Un exemple.* On considère une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'une tige rigide de masse négligeable. On définit θ, l'angle formé entre la tige et la verticale, m, la masse du pendule, ℓ, la longueur de la tige et g l'accélération de la pesanteur. La position angulaire d'un *pendule inversé* sous l'effet d'une commande est régie par le système (linéarisé)

$$\theta''(t) = \frac{g}{\ell}\left(\theta(t) - u(t)\right),$$

où $u \in C^0([0,\tau], \mathbb{R})$. Ce système est-il commandable en temps τ ?

II.5 *Un exemple de commande.* Dans cette question, on considère encore le système (5). On suppose de plus que la matrice $C = [B\ AB\ \cdots\ A^{n-1}B]$ est de rang n. Par conséquent, d'après les conclusions des questions précédentes, le système (5) est commandable en temps $\tau > 0$.

On souhaite dans cette question exhiber une commande $\overline{u}$ permettant d'amener le système de l'état 0 à l'instant 0, à l'état $v \in \mathbb{R}^n$ à l'instant τ, autrement dit, trouver $\overline{u}$ tel que la solution $x(\cdot)$ de (5) associée à $\overline{u}$ vérifie $x(0) = 0$ et $x(\tau) = v$.

Soit $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par

$$G = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A}BB^\top \left(e^{(\tau-s)A}\right)^\top ds.$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle Gx, x\rangle = 0$.
Démontrer que pour tout $s \in [0,\tau]$, $\left(e^{(\tau-s)A}B\right)^\top x = 0$. En déduire que $x = 0$.

(b) Démontrer que G est inversible.

(c) Montrer que la commande

$$\begin{array}{rccl} \overline{u}: & [0,\tau] & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & s & \longmapsto & \left(e^{(\tau-s)A}B\right)^\top G^{-1}v. \end{array}$$

amène le système (5) de l'état 0 à l'instant 0, à l'état $v \in \mathbb{R}^n$ à l'instant τ.

(d) On introduit la fonctionnelle $E(\cdot)$, associant à $u \in C^0([0,\tau],\mathbb{R}^m)$ la quantité

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^\tau \|u(s)\|_m^2 ds.$$

On introduit $\widehat{u}(\cdot) = \overline{u}(\cdot) + h(\cdot)$, où $h(\cdot)$ est une commande continue amenant le système (5) de l'état 0 en $t = 0$ à l'état 0 en $t = \tau$.
Calculer $E(\widehat{u}) - E(\overline{u})$, puis montrer que $\overline{u}$ minimise la fonctionnelle E parmi les commandes $u \in C^0([0,\tau],\mathbb{R}^m)$ amenant le système de l'état 0 à l'instant 0, à l'état v à l'instant τ.

Partie III

Stabilisation de systèmes différentiels autonomes linéaires

Dans cette partie, on perturbe le système $x'(t) = Ax(t)$ à l'aide d'une loi de commande $u(\cdot) : [0,\tau] \to \mathbb{R}^m$, ce qui nous conduit à considérer le système

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),\ \ t \in [0,\tau] \tag{6}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. On rappelle le résultat établi dans la partie III : la propriété “(6) est commandable en temps τ” est équivalente à la propriété

$$C = [B\ AB\ \cdots\ A^{n-1}B] \text{ est de rang } n.\ (K)$$

À un système de commande linéaire $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$, on associe la paire (A,B). On dit que deux systèmes de commande $x_1'(t) = A_1x_1(t) + Bu_1(t)$ et $x_2'(t) = A_2x_2(t) + Bu_2(t)$ (ou indifféremment deux paires (A_1,B_1) et (A_2,B_2)) sont linéairement équivalents s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que

$$A_2 = PA_1P^{-1} \text{ et } B_2 = PB_1.$$

III.1 Montrer que la propriété (K) est invariante par équivalence linéaire.

III.2 On considère une paire (A,B) commandable en temps τ et on suppose dans cette question que $m = 1$.

(a) Démontrer qu'il existe $(a_0,\cdots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que la paire (A,B) est linéairement équivalente à la paire $(\hat{A},\hat{B})$, où

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Calculer $\chi_{\hat{A}}$, le polynôme caractéristique de $\hat{A}$.

(c) On définit la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $(f_1, \cdots, f_n)$ par

$$f_n = B,\ f_{n-1} = Af_n + a_{n-1}f_n, \cdots, f_1 = Af_2 + a_1 f_n.$$

Vérifier que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ définit une base de $\mathbb{R}^n$ et déterminer la forme prise par la paire (A, B) dans la base $(f_1, \cdots, f_n)$.

(d) En déduire que pour tout polynôme P, unitaire et de degré n, il existe $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$ tel que $\chi_{A+BK} = P$, où χ_{A+BK} désigne le polynôme caractéristique de la matrice $A + BK$.

III.3 On considère une paire (A, B) commandable en temps τ, mais m désigne à présent un nombre entier quelconque, supérieur ou égal à 1. Soit $y \in \mathbb{R}^m$ tel que $By \neq 0$. On pose $x_1 = By$.

(a) Montrer qu'il existe $x_2 \in Ax_1 + \mathrm{Im}B$ tel que dim $\mathrm{Vect}\{x_1, x_2\} = 2$.

(b) Montrer que pour tout $k \leq n$, il existe $x_k \in Ax_{k-1} + \mathrm{Im}B$ tel que $\dim E_k = k$, avec $E_k = \mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_k\}$.

(c) En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tel que la paire $(A + BC, x_1)$ vérifie la propriété (K).

(d) En déduire un choix de commande u telle que le système (5) soit asymptotiquement stable.

Partie IV

Stabilisation de systèmes non linéaires

Dans cette partie, on va s'intéresser à la stabilisation de systèmes non linéaires à l'aide d'une loi de commande $u(\cdot)$. Ces systèmes s'écriront donc de façon générale

$$x'(t) = f(x(t), u(t)).$$

On recherchera donc une loi de commande $u(\cdot)$ de façon à stabiliser ce système autour d'un équilibre. Dans un premier temps, on s'intéresse à l'étude de la stabilité de systèmes non linéaires du type $x'(t) = f(x(t))$.

On admettra dans cette partie que 0 est un équilibre asymptotiquement stable du système (4) si, et seulement si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

IV.1 On considère dans cette question le système non linéaire

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{7}$$

où $f(\cdot)$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Pour simplifier notre étude, on supposera f **complet**, autrement dit que f est tel que toute solution maximale du système (7) est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Soit $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, un équilibre du système (7), c'est-à-dire satisfaisant $f(\overline{x}) = 0$.

On suppose qu'il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^1 telle que $V(\overline{x}) = 0$ et telle que $V(x) > 0$ si $x \neq \overline{x}$. Soit $L(\cdot)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial V}{\partial x_i}(x).$$

On suppose que, quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$, $L(x) \leq 0$. Si une telle fonction $V(\cdot)$ existe, on l'appelle *fonction de Lyapunov centrée en $\overline{x}$ du système* (7).

(a) Soit $x(\cdot)$, une solution du système (7).
Démontrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto V(x(t))$ est décroissante.

(b) Supposons que $\overline{x}$ n'est pas un point stable.
Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ et $t_1 > 0$ tels que

$$x \in \overline{B(\overline{x}, \delta)} \text{ et } \|\phi(t_1, x) - \overline{x}\|_n = \varepsilon.$$

(c) En déduire que $\overline{x}$ est un point stable.

On suppose dorénavant que $L(x) < 0$ dans $\mathbb{R}^n \backslash \{\overline{x}\}$. On dit alors que $V(\cdot)$ est une fonction de Lyapunov stricte. On vient de démontrer que $\overline{x}$ est stable et on souhaite à présent montrer que $\overline{x}$ est asymptotiquement stable, compte tenu de la nouvelle hypothèse faite sur $L(\cdot)$.

(d) Soit $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite de points tendant vers $+\infty$.
Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in \overline{B(\overline{x}, \delta)}$, la suite $(\phi(t_k, x))_{k\geq 0}$ possède une valeur d'adhérence $\overline{y}$.

(e) Soient x et $\overline{y}$ choisis comme dans la question précédente et soit $t > 0$.
Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, si $k \geq k_0$, alors

$$V(\phi(t, x)) > V(\phi(t_k, x)) > V(\overline{y}),$$

et en déduire que nécessairement, $\overline{y} = \overline{x}$, autrement dit que $\overline{x}$ est asymptotiquement stable.

IV.2 *Équation de Lyapunov.* On considère à nouveau dans cette question le système linéaire (4). On cherche à démontrer que 0 est un point asymptotiquement stable si, et seulement si, pour toute matrice symétrique définie positive $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique définie positive satisfaisant *l'équation dite de Lyapunov*

$$A^\top P + PA + Q = 0.$$

(a) Démontrer que la condition est suffisante.
Indication. On pourra introduire la fonction V définie par $V(x) = \langle Px, x\rangle$.

(b) Démontrer que la condition est nécessaire.
Indication. On pourra introduire la matrice P définie par $P = \int_0^\infty e^{A^\top s} Q e^{As} ds$, après avoir justifié son existence.

IV.3 On considère dans cette question le système

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{8}$$

où $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est telle que $f(0) = 0$.
On appelle A, la matrice jacobienne de f évaluée au point 0, autrement dit

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

On suppose que toutes les valeurs propres (réelles ou complexes) de A ont une partie réelle strictement négative.

(a) Soit $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la matrice définie par

$$P = \int_0^{+\infty} \exp\left[sA^\top\right] \exp\left[sA\right] ds$$

Montrer que P est bien définie puis démontrer que la fonction V définie par la relation $V(x) = \langle Px, x\rangle$ définit une norme.

(b) Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ et $\nu > 0$ tels que

$$\forall x \in B(0,\delta),\ \langle \nabla V(x), f(x)\rangle_n \leq -\nu \|x\|_n^2.$$

Quelle conséquence sur la stabilité de 0 peut-on en déduire ?

(c) Démontrer la décroissance exponentielle des solutions, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in B(0,\varepsilon)$, il existe $M > 0$ et $m > 0$ tels que

$$\forall t > 0,\ \|x(t)\|_n \leq Me^{-mt},$$

où $x(\cdot)$ est la solution de (8).

(d) *Un exemple.* Étudier la stabilité en $(0,0)$ du système "pendule amorti" d'équation

$$x''(t) + kx'(t) + \sin x(t) = 0,$$

où k désigne un nombre réel strictement positif.

IV.4 Dans cette question, on considère le système commandé

$$x'(t) = f(x(t), u(t)), \tag{9}$$

où $f(\cdot)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$ et $u(\cdot)$ une commande. On suppose que $u(\cdot)$ est une commande par retour d'état, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ne dépendant pas de t telle que

$$u(\cdot) = Kx(\cdot).$$

De plus, on suppose que f est tel que toute solution maximale du système

$$x'(t) = f(x(t), Kx(t))$$

est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Soit $\overline{x}$, une solution de l'équation $f(x, 0) = 0$.

(a) Déterminer la matrice jacobienne de l'application :

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x, Kx).$$

(b) Énoncer, en utilisant les résultats établis dans les parties II et III, une condition suffisante portant sur les dérivées partielles de la fonction f pour qu'il existe une matrice K stabilisant asymptotiquement le système (9) dans un voisinage de $\overline{x}$.