

**Master 2 – Mathématiques Fondamentales**  
**Corrigé de l'examen de topologie du 11 janvier 2011**

**Problème 1**

**I : Éléments primitifs**

1) Soit  $\varphi(x) = kz$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $z \in H$ . Comme  $\varphi$  est bijectif, il existe un unique  $x' \in G$  tel que  $\varphi(x) = k\varphi(x') = \varphi(kx')$ . Ceci est équivalent à  $x = kx'$ . Il s'ensuit que  $\varphi(x)$  est primitif si et seulement si  $x$  est primitif. ■

2) Si  $x$  n'est pas primitif alors il existe un entier  $k > 1$  tel que  $x = ky$ ,  $y \in G$ . Alors  $ky \in H$ , d'où  $k[y] = 0$  dans  $G/H$ , ce qui montre que  $[y]$  est un élément de torsion dans  $G/H$ . Donc  $G/H$  n'est pas libre.

Réciproquement, supposons  $x$  primitif. Montrons que  $G/H$  est abélien libre de rang  $n - 1$ . Comme  $G$  et  $H \simeq \mathbb{Z}$  sont abéliens, le quotient est abélien. Pour montrer que  $G/H$  est libre, il suffit de montrer que ce groupe est sans torsion. Soit  $[u] \in G/H$  et soit  $m$  le plus petit entier positif ou nul tel que  $m[u] = 0$ . Alors  $mu \in H$ . Donc  $mu = kx$  pour un certain  $k \in \mathbb{Z}$ . Soit  $d$  le pgcd de  $m$  et de  $k$ . Alors  $(m/d)u = (k/d)x$  d'où  $(m/d)[u] = 0$ . Par définition de  $m$ , on en déduit que  $d = 1$ . Soit  $kv + mw = 1$  une relation de Bezout. Alors

$$x = 1 \cdot x = (kv + mw)x = kvx + mw x = v(kx) + mw x = v(mu) + mw x = m(vu + wx).$$

Puisque  $x$  est primitif,  $m = 1$ . Donc  $[u] = 0$ . On a ainsi démontré que  $G/H$  est sans torsion, donc libre. Son rang est donc

$$\text{rang}(G/H) = \text{rang}(G) - \text{rang}(H) = n - 1.$$

3) Soit  $(x, x_2, \dots, x_n)$  une base de  $G$ . Supposons qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  et  $y \in G$  tels que  $x = ky$ . Comme  $x \neq 0$ ,  $k \neq 0$ . Alors  $(y, x_2, x_3, \dots, x_n)$  est encore une famille  $\mathbb{Z}$ -libre de  $G$ . C'est aussi une famille  $\mathbb{Z}$ -génératrice de  $G$ . C'est donc aussi une base de  $G$ . L'application envoyant la première base sur la seconde base définit une application  $f : G \rightarrow G$  qui est  $\mathbb{Z}$ -linéaire bijective, donc  $\mathbb{Z}$ -invertible. La matrice de  $f$  dans la base  $(x, x_2, \dots, x_n)$  est  $\text{Diag}(k, 1, \dots, 1)$ . Son déterminant est donc  $k$ . Comme  $f$  est invertible sur  $\mathbb{Z}$ ,  $k = \pm 1$ . Donc  $x$  est primitif.

Réciproquement, supposons  $x$  primitif. Soit  $H_1 = \{kx \mid k \in \mathbb{Z}\}$  le sous-groupe engendré par  $x_1 = x$ . Ce groupe est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . D'après la question précédente,  $G/H_1$  est libre de rang  $n - 1$ . Supposons avoir construit une famille  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  libre dans  $G$  engendrant un sous-groupe libre  $H_k$  de rang  $k \leq n - 1$  tel que  $G/H_k$  est un groupe abélien libre de rang  $n - k$ . Comme  $H_k \neq G$ , il existe  $x_{k+1} \in G$  tel que  $x_{k+1} \notin H_k$ . On peut supposer  $x_{k+1}$  primitif. Alors la famille  $(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1})$  est libre dans  $G$ . Le sous-groupe qu'elle engendre est donc libre de rang  $k + 1$ . Montrons que  $G/H_{k+1}$  est libre de rang  $n - (k + 1)$ . Il suffit de montrer que ce groupe abélien est sans torsion. Soit  $[u] \in G/H_{k+1}$ . Soit  $m$  un entier positif ou nul vérifiant  $m[u] = 0$  dans  $G/H_{k+1}$ . Il existe donc  $l_1, \dots, l_{k+1} \in \mathbb{Z}$  tels que

$$mu = l_1 x_1 + \dots + l_{k+1} x_{k+1}.$$

Comme  $(x_1, \dots, x_{k+1})$  est une base de  $H_{k+1}$ , on en déduit que  $l_i \in m\mathbb{Z}$  pour tout  $1 \leq i \leq k+1$ . Donc  $u \in H_{k+1}$  d'où  $[u] = 0$ . Donc  $G/H_{k+1}$  est libre de rang  $\text{rang}(G) - \text{rang}(H_{k+1}) = n - (k+1)$ . On a donc démontré le résultat par récurrence. ■

4) Soit  $d$  pgcd de  $a_1, \dots, a_n$ . Supposons que  $y = kz$  pour un certain  $k \in \mathbb{Z}$  et  $z \in G$ . Il existe  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$  tels que  $z = b_1x_1 + \dots + b_nx_n$ . Donc

$$y = a_1x_1 + \dots + a_nx_n = k(b_1x_1 + \dots + b_nx_n) = kb_1x_1 + \dots + kb_nx_n.$$

Par unicité des coefficients de la base,  $a_i = kb_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Donc  $k$  divise le pgcd  $d$ . Par conséquent, si  $d = 1$  alors  $k = 1$  et  $y$  est primitif. Si  $d > 1$ , alors on peut prendre  $k = d$  et vérifier la relation  $y = kz$  donc  $y$  n'est pas primitif. ■

## II : Préliminaires géométriques

1) 1.1) D'après la classification des surfaces,  $\Sigma$  est difféomorphe à une somme connexe de  $g$  tores. On prend pour  $\lambda_i$  la longitude du  $i$ -ème tore et pour  $\mu_i$  le méridien du  $i$ -ème tore. Les intersections géométriques sont aisément vérifiées. En orientant convenablement les courbes  $\lambda_i$  et  $\mu_i$ , on peut imposer le signe de l'intersection algébrique  $\lambda_i \bullet \mu_i = +1$ . Le résultat s'ensuit. ■

1.2) L'application induite en homologie par l'inclusion  $\Sigma \rightarrow \widehat{\Sigma}$  est un isomorphisme. Vérifions le de deux manières :

- par la suite de Mayer-Vietoris : on prend  $\widehat{\Sigma} = D \cup \Sigma$  et  $D \cap \Sigma = \partial D$ . Nous avons la suite exacte

$$\dots \rightarrow H_1(\partial D) \rightarrow H_1(D) \oplus H_1(\Sigma) \rightarrow H_1(\widehat{\Sigma}) \rightarrow H_0(\partial D).$$

La dernière application à droite est nulle. Comme  $H_1(D) = 0$ , l'application à gauche se réduit à  $H_1(\partial D) \rightarrow H_1(\Sigma)$  qui est induite par l'inclusion. Comme  $\partial D$  est l'unique composante de bord de  $\Sigma$ , la classe  $[\partial D]$  est nulle en homologie dans  $\Sigma$ . L'application à gauche est donc aussi nulle. Comme la suite est exacte, on en déduit l'isomorphisme cherché.

- Alternativement, on peut utiliser le théorème de Van Kampen pour comparer les groupes fondamentaux : on trouve  $\pi_1(\Sigma, \star) = \langle \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_g, \mu_g \rangle$  (groupe libre à  $2g$  générateurs) et  $\pi_1(\widehat{\Sigma}, \star) = \langle \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_g, \mu_g \mid [\lambda_1, \mu_1] \cdots [\lambda_g, \mu_g] \rangle$  (quotient du groupe libre à  $2g$  générateurs par le sous-groupe normal engendré par le produit des commutateurs  $[\lambda_1, \mu_1] \cdots [\lambda_g, \mu_g]$ ). L'application induite par l'inclusion est la projection canonique. Le premier groupe d'homologie est l'abélianisé du groupe fondamental, donc la projection canonique induit un isomorphisme  $H_1(\Sigma) \simeq H_1(\widehat{\Sigma})$ .

Ensuite, on part d'une base symplectique géométrique pour  $\widehat{\Sigma}$ ; on isotope légèrement chaque courbe fermée simple de cette base de façon à éviter le disque  $D$  sans modifier les intersections géométriques entre elles. Les courbes fermées simples obtenues ainsi dans  $\Sigma$  induisent en homologie par inclusion dans  $\widehat{\Sigma}$  la même base symplectique de départ. Par conséquent, elles forment une base symplectique géométrique. ■

1.3) L'application induite en homologie par l'inclusion  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$  est un isomorphisme. Le même argument que précédemment s'applique donc. ■

1.4) Soit  $\alpha$  une courbe fermée simple sur  $\Sigma$  passant en  $[0] \in \Sigma = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Il existe un unique lacet  $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  relevant  $\alpha$  telle que  $\tilde{\alpha}(0) = (0, 0)$ . Soit  $(a, b) = \tilde{\alpha}(1)$ . Comme  $\tilde{\alpha}(1)$  et  $\tilde{\alpha}(0) = 0$  sont deux relevés de  $[0] \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , on en déduit que  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ . Il est aisé d'homotoper dans  $\mathbb{R}^2$  la courbe  $\tilde{\alpha}$  en un segment joignant  $(0, 0)$  à  $(a, b)$  :

$$\tilde{\alpha}_s(t) = (1 - s)\tilde{\alpha}(t) + st(a, b)$$

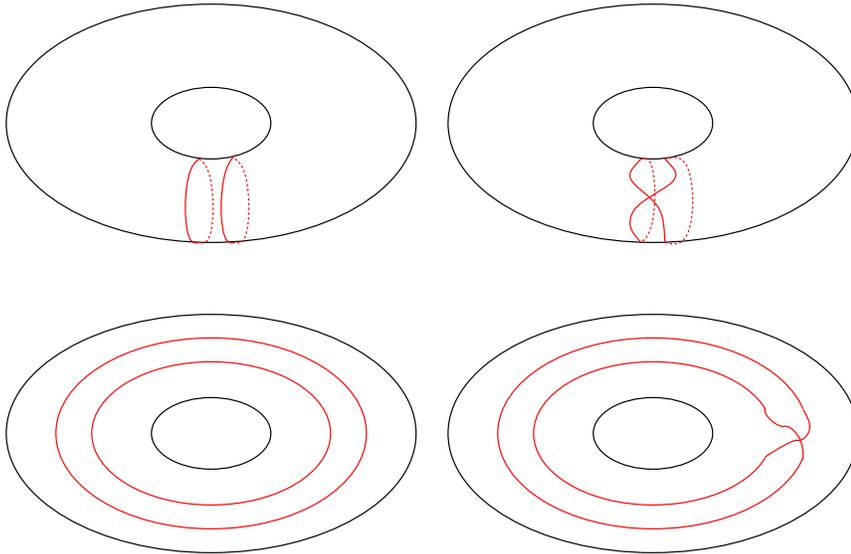
est l'homotopie recherchée. De plus, cette homotopie se projette en une homotopie de  $\alpha$ . Les classes d'homotopie de lacets sur  $\Sigma$  sont ainsi en correspondance bijective avec les segments passant par  $(0, 0)$  et  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $d$  le pgcd de  $(a, b)$ . Compte tenu de l'action de  $\mathbb{Z}^2$ , la courbe  $\alpha$  est parcourue  $d$  fois. Par suite, vu la question I-4, les classes d'homotopie de courbes fermées simples sur  $\Sigma$  sont en correspondance bijective avec les éléments primitifs de  $\mathbb{Z}^2$ . ■

2)

2.1) On écrit  $\alpha$  dans une base symplectique géométrique de  $\Sigma$ . On a alors  $\alpha = \sum_j a_j[\lambda_j] + \sum b_j[\mu_j]$ . On représente chaque classe  $a_j[\lambda_j]$  par  $a_j$  copies parallèles de la courbe fermée simple  $\lambda_j$  avec ou non l'orientation originale de  $\lambda_j$  selon que  $a_j$  est positif ou négatif respectivement. On procède de même pour  $b_j[\mu_j]$ . Les intersections géométriques sont bien nulles ou égales à 1. ■

2.2) Si  $c$  est séparante, compte-tenu des hypothèses sur  $\Sigma$ ,  $\alpha = [c] = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse. ■

2.3) Pour la réalisation de  $2m$  par une courbe fermée immergée, voir les deux premiers dessins de la figure ci-dessous. (Les deux autres dessins indiquent comment réaliser  $2l$ .)



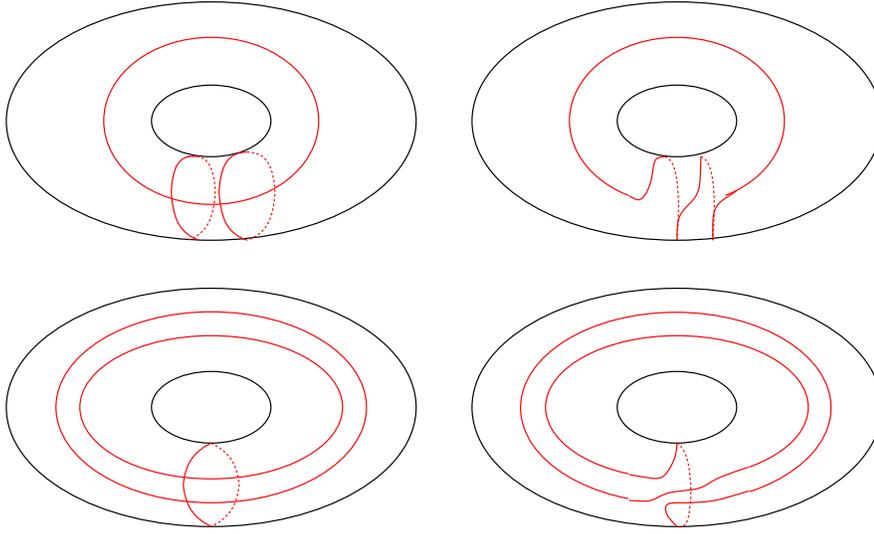
Supposons par l'absurde qu'il existe une courbe fermée simple  $c$  telle que  $[c] = 2[\mu] = 2m$ . Comme  $\alpha \neq 0$ ,  $[c]$  est non séparante. Par un difféomorphisme positif  $f$  de  $\Sigma$ , on peut envoyer cette courbe fermée simple sur n'importe quelle autre courbe fermée simple non séparante, par exemple sur le méridien  $\mu$ . Maintenant  $f(\mu)$  est une courbe fermée simple

non séparante  $\mu'$  dont la classe d'homologie est  $[\mu'] = a l + b m$  pour un certain  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}$ . Comme  $f$  préserve l'intersection algébrique,

$$0 = [c] \bullet [c] = f_*([c]) \bullet f_*([c]) = [\mu] \bullet f_*(2[\mu]) = 2[\mu] \bullet [\mu'] = 2 m \bullet (a l + b m) = 2 a m \bullet l = -2 a.$$

Donc  $a = 0$ . Par conséquent,  $[\mu']$  est un multiple (entier) non nul de  $m$ . D'autre part,  $2[\mu'] = 2f_*([\mu]) = f_*([c]) = m$ , ce qui impose  $[\mu'] = \frac{1}{2}m$ , ce qui est absurde. ■

2.4) Conséquence de I-4) et de II-1.4). Pour le dessin, il suffit de suivre l'orientation de chaque courbe à chaque point d'intersection (et d'effacer les arcs non parcourus). Voir ci-dessous les courbes fermées simples correspondant à  $l + 2m$  et  $2l + m$  respectivement. ■



2.5) Supposons que  $d = \text{pgcd}(x, y)$ . Alors  $\alpha = d(x' l + y' m)$  avec  $dx' = x$ ,  $dy' = y$ ,  $x', y' \in \mathbb{Z}$ . Comme  $x'$  et  $y'$  sont premiers entre eux,  $\alpha' = x' l + y' m$  est primitif et la question précédente assure qu'il existe une courbe fermée simple  $c'$  représentant  $\alpha'$ . Choississant  $d$  copies parallèles de  $c'$ , on obtient  $d$  courbes fermées simples deux à deux disjointes représentant  $\alpha = d \alpha'$ . Montrons que  $d$  est le nombre minimal de courbes fermées simples deux à deux disjointes ayant cette propriété. Soit  $1 < k \leq d$  le plus petit entier tel qu'il existe  $k$  courbes fermées simples  $c_1, \dots, c_k$  deux à deux disjointes vérifiant  $\alpha = [c_1] + \dots + [c_k]$ . Supposons qu'il existe au moins deux courbes parmi les  $c_j$  ne représentant pas la même classe d'homologie. Disons  $[c_1] = x_1 l + y_1 m$  et  $[c_2] = x_2 l + y_2 m$  pour des coefficients  $x_i, y_i$  entiers. D'après 2.4),  $[c_1]$  et  $[c_2]$  sont indépendants sur  $\mathbb{Z}$ . Or comme  $c_1$  et  $c_2$  sont disjointes,

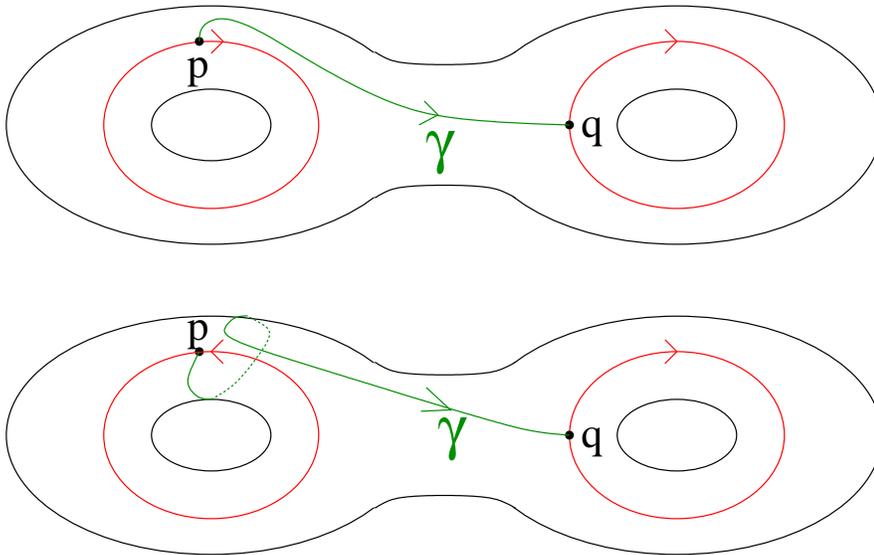
$$0 = [c_1] \bullet [c_2] = (x_1 l + y_1 m) \bullet (x_2 l + y_2 m) = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

ce qui contredit l'indépendance de  $[c_1]$  et de  $[c_2]$ . Donc  $[c_1] = \dots = [c_k]$ . Alors  $\alpha = k [c_1] = d [c]$ . Comme  $c$  est non séparante, il existe un difféomorphisme positif  $f$  de  $\Sigma$  tel que  $f(c) = \mu$ . Donc  $f_*([c]) = m$  et  $f_*(\alpha) = d m = k f_*(c_1)$ . On en déduit que  $f_*([c_1]) = \frac{d}{k} m$ . On conclut par 2.4) que  $d/k = \pm 1$ . Vu l'hypothèse sur  $k$ , on conclut  $k = d$ . ■

2.6) On commence par traiter le cas  $\Sigma = \Sigma_{g,0,0}$ . Pour  $g = 0$ , il n'y a rien à démontrer (toutes les courbes fermées simples représentent la classe d'homologie triviale). Le cas  $g = 1$

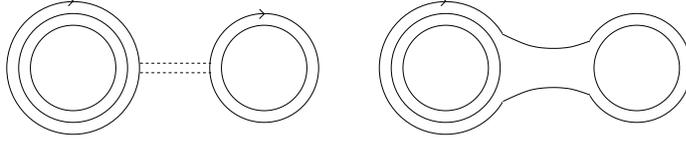
a été traité en 2.4). On peut donc supposer  $g \geq 2$ . Donnons nous une base symplectique géométrique  $(\lambda_i, \mu_i)$  pour  $H_1(\Sigma)$ . Supposons qu'une courbe fermée simple  $c$  représente une classe d'homologie non nulle. Alors  $c$  est non séparante et il existe un difféomorphisme positif  $g$  de  $\Sigma$  envoyant  $c$  sur  $\lambda_1$ . Par conséquent (I-1 et I-3),  $[c]$  est primitive.

Réciproquement, soit  $\alpha$  une classe d'homologie primitive, disons  $\alpha = x_1 [\lambda_1] + y_1 [\mu_1] + \dots + x_g [\lambda_g] + y_g [\mu_g]$ . Quitte à modifier l'orientation de l'une ou l'autre des courbes  $\lambda_i, \mu_i$ , on peut supposer que les coefficients  $x_i, y_i$  sont tous positifs ou nuls. Pour chaque  $1 \leq i \leq g$ , on forme un voisinage relatif fermé de  $\lambda_i \cup \mu_i$  : ce voisinage  $V_i$  est topologiquement un tore privé d'un disque ouvert. Dans  $V_i$ , le résultat de la question 2.4) reste valide. Ainsi il existe une courbe fermée simple  $c_i$  dans  $V_i$  telle que  $\text{pgcd}(x_i, y_i) [c_i] = x_i [\lambda_i] + y_i [\mu_i] \in H_1(\Sigma)$ . Nous pouvons ainsi représenter  $\alpha$  par la réunion disjointe de  $\sum_{1 \leq i \leq g} \text{pgcd}(x_i, y_i)$  courbes fermées simples. Montrons que cette réunion peut se modifier en une seule courbe fermée simple. Pour cela, on utilise l'observation de l'énoncé : on peut joindre une courbe fermée orientée simple  $c$  non séparante à une autre courbe fermée orientée simple  $c'$  non séparante disjointe de la première par un arc orienté  $\gamma$  transverse à  $c$  et à  $c'$  tel que  $T_p \gamma \oplus T_p c = T_p \Sigma$  (avec  $p = \gamma \cap c$ ) avec une orientation négative et  $T_q \gamma \oplus T_q c' = T_q \Sigma$  (avec  $q = \gamma \cap c'$ ) avec une orientation positive. Voir la figure.



Pour le voir, il suffit d'utiliser un difféomorphisme positif envoyant la première courbe fermée simple sur une longitude pour s'en rendre compte. La seconde courbe est une courbe disjointe de la première (représentée par une autre longitude sur la figure). Il y a deux cas à considérer en fonction de l'orientation : voir la figure.

En remplaçant  $\gamma$  par  $\gamma$  et un arc parallèle  $\gamma'$  (dont l'intersection avec  $c$  et  $c'$  est  $p'$  et  $q'$ ) et en effaçant le petit sous-arc de  $c$  entre  $p$  et  $p'$  (resp. le petit arc entre  $q$  et  $q'$ ), on obtient une courbe fermée simple orientée unique  $c \#_{\gamma} c'$ . Il est clair que cette courbe fermée simple représente  $[c] + [c'] = [c \cup c']$  (on peut par exemple vérifier que  $[c \#_{\gamma} c']$  agit comme  $[c] + [c']$  par intersection algébrique et l'intersection algébrique est non dégénérée ; ou encore vérifier directement que la différence des deux cycles est bien un bord).



On commence le processus de la manière suivante : on considère une sous-surface  $V_{1,2} \subset \Sigma$  de genre 2 à une composante de bord contenant  $V_1$  et  $V_2$  (et disjointe des autres  $V_i$ ). Sur  $V_1$  et  $V_2$ , d'après 2.5), on a représenté  $x_i [\lambda_i] + y_i [\mu_i]$  par  $\text{pgcd}(x_i, y_i)$  courbes fermées simples parallèles  $c_j$ . L'orientation de  $\Sigma$  nous donne une courbe  $c_{10}$  qui est la plus extérieure de toutes les  $\text{pgcd}(x_1, y_1)$  courbes parallèles dont la réunion représente  $x_1 [\lambda_1] + y_1 [\mu_1]$ . De même, il y a une courbe  $c_{20}$  qui est la plus extérieure de toutes les  $\text{pgcd}(x_2, y_2)$  courbes parallèles dont la réunion représente  $x_2 [\lambda_2] + y_2 [\mu_2]$ . On peut donc remplacer  $c_{10} \cup c_{20}$  par la courbe  $c_{10} \#_\gamma c_{20}$  pour un arc  $\gamma$  approprié sans modifier sa classe d'homologie. On itère ce procédé tant qu'il reste au moins une courbe "interne" parallèle à  $c_{20}$  dans  $V_2$  (ou une courbe interne parallèle à  $c_{10}$  dans  $V_1$ ). Par conséquent, on itère  $|\text{pgcd}(x_1, y_1) - \text{pgcd}(x_2, y_2)|$  fois. Ensuite nous avons à nouveau deux collections de courbes parallèles : par exemple, si  $\text{pgcd}(x_1, y_1) > \text{pgcd}(x_2, y_2)$  alors une collection est constituée de  $\text{pgcd}(x_1, y_1) - \text{pgcd}(x_2, y_2)$  courbes parallèles et l'autre collection est constituée de  $\text{pgcd}(x_2, y_2)$  courbes parallèles. Nous pouvons alors réitérer le procédé. On reconnaît ici que le nombre de courbes parallèles est donné par l'algorithme d'Euclide. Le processus s'arrête une fois que nous avons une seule collection de

$$\text{pgcd}(\text{pgcd}(x_1, y_1), \text{pgcd}(x_2, y_2)) = \text{pgcd}(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

courbes fermées simples orientées parallèles dont la réunion représente  $x_1 l_1 + y_1 m_1 + x_2 l_2 + y_2 m_2 \in H_1(\Sigma)$ . De plus, ces courbes sont dans  $V_{1,2}$  donc sont disjointes des autres courbes  $c_j$ ,  $j > 2$ .

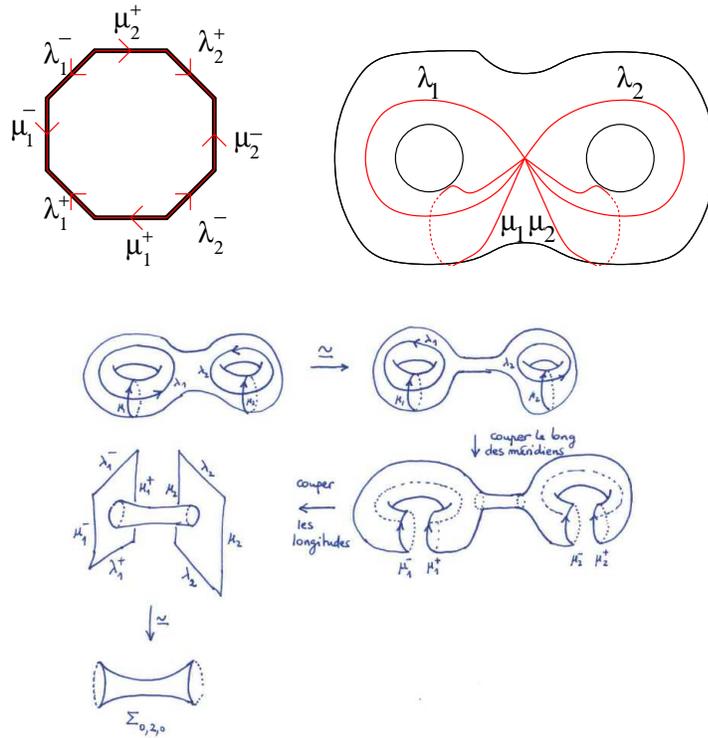
On poursuit ce procédé par induction sur  $g$ . À la fin de ce procédé, nous trouvons une seule collection de  $\text{pgcd}(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g)$  courbes parallèles. Mais comme  $\alpha$  est primitive,  $\text{pgcd}(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g) = 1$  et donc il y a une seule courbe fermée simple représentant  $\alpha$ .

■

Reste à considérer les cas où  $\Sigma = \Sigma_{g,1,0}$  et  $\Sigma = \Sigma_{g,0,1}$ . Comme le fait de reboucher par un disque ou un point induit un isomorphisme en homologie (le fait d'isotoper une courbe fermée simple pour qu'elle évite un disque ou un point ne modifie pas sa classe d'homologie), le résultat reste valide. ■

2.7) Toute surface connexe sans bord compacte orientée de genre  $g$  est homéomorphe au quotient d'un polygone surface à  $4g$  arêtes par les relations d'identification usuelles. À l'aide d'un vecteur normal à chaque courbe  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$  et de l'orientation de  $\Sigma$ , on peut distinguer le côté gauche ou droit de chaque courbe (ceci a déjà été utilisé dans la question 2.6). On peut donc distinguer avant l'identification  $\lambda_i^-$  et  $\lambda_i^+$  ou  $\mu_i^-$  et  $\mu_i^+$ . De plus, on peut voir ce polygone à  $4g$  arêtes comme la réunion de  $g$  carrés  $\lambda_i^- \mu_i^- \lambda_i^+ \mu_i^+$  joints par un petit tube (= cercle épaissi = cylindre). Le résultat en découle. Ci-dessous deux figures illustrant le cas  $g = 2$ .

### III : Représentation symplectique



1) L'homologie est un foncteur covariant donc  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$  et que  $(\text{id})_* = \text{id}_{H_1(\Sigma)}$ . Si de plus,  $f$  et  $g$  représentent la même difféotopie dans  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  alors  $f$  et  $g$  sont homotopes et donc  $f_* = g_*$ . Enfin, si  $[f] \in \mathfrak{M}(\Sigma)$  alors tout représentant  $f$  préserve l'orientation. Il résulte de la définition géométrique de  $\bullet$  que  $f$  préserve la forme d'intersection symplectique :  $f_*(x) \bullet f_*(y) = x \bullet y$  pour tous  $x, y \in H$ . Donc  $f_* \in \text{Sp}(H, \bullet)$ . ■

2) L'isomorphisme est simplement l'application qui à  $\psi \in \text{Sp}(H, \bullet)$  associe sa matrice dans la base  $([\lambda_i], [\mu_i]) = (l_i, m_i)$ . ■

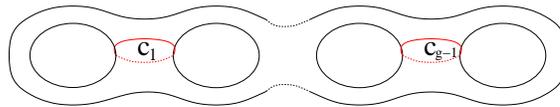
3) Chaque matrice de l'énoncé est l'image par  $\rho$  d'un twist de Dehn. Avec la base géométrique symplectique standard  $([\lambda_1], [\mu_1], \dots, [\lambda_g], [\mu_g])$ , on vérifie

$$\rho(\tau_{\lambda_i}^{-1}) = U_i, \quad \rho(\tau_{\mu_i}^{-1}) = V_i.$$

On peut donc prendre  $a_i = \lambda_i$ ,  $b_i = \mu_i$ ,  $1 \leq i \leq g$ . Pour le troisième type de matrice, on vérifie que

$$\rho(\tau_{c_i}^{-1}) = W_i$$

où les courbes  $c_i$  ( $1 \leq i \leq g-1$ ) sont indiquées sur la figure ci-dessous.



4.1) D'après II – –2.7), si l'on découpe la surface le long des courbes d'une base symplectique géométrique, on obtient une surface de type  $\Sigma_{0,g,0}$ . On dispose donc d'un homéomorphisme

entre deux surfaces de même type  $\Sigma_{0,g,0} \rightarrow \Sigma'_{0,g,0}$ . On peut le construire de telle sorte que non seulement il envoie composante de bord ( $i$ -ème carré) sur composante de bord ( $i$ -ème carré) mais aussi qu'il envoie côté  $\lambda_i^\pm$  sur côté  $\lambda'_i^\pm$  et côté  $\mu_i^\pm$  sur côté  $\mu'_i^\pm$ . Comme cet homéomorphisme respecte les identifications, il induit un homéomorphisme  $f : \Sigma_{g,0,0} \rightarrow \Sigma'_{g,0,0}$ . Par construction,  $f$  vérifie  $f(\lambda_i) = \lambda'_i$  et  $f_*(\mu_i) = \mu'_i$  et donc  $f_*([\lambda_i]) = [\lambda'_i]$  et  $f_*([\mu_i]) = [\mu'_i]$  ( $1 \leq i \leq g$ ). Donc  $f_* = \psi$ . On a donc déterminé un antécédent de  $\psi$ , ce qu'il fallait démontrer. ■

4.3) D'après I-1) et I-3),  $\psi([\lambda_1])$  est primitif dans  $H$ . Donc d'après II-2.6), il existe une courbe fermée simple orientée  $\lambda'_1$  représentant  $\psi([\lambda_1])$ . ■

4.4) Puisque  $[\lambda'_1]$  est primitive, on peut la compléter en une base *symplectique géométrique*<sup>1</sup> de  $H$  : on part de la base symplectique géométrique canonique, il existe un difféomorphisme positif envoyant la première courbe fermée de la base sur  $[\lambda'_1]$ , donc on peut prendre l'image en homologie de ce difféomorphisme de cette base. ■

4.5) Dans la base symplectique géométrique  $(\nu_i, \pi_i)$ ,  $\nu_1 = \lambda'_1$  et  $\pi_1$  est la seule courbe fermée simple de la base géométrique à intersecter en un unique point la courbe  $\nu_1$ . Écrivons  $\psi([\mu_1])$  dans la base symplectique  $([\nu_i], [\pi_i])$  : c'est une combinaison linéaire sur  $\mathbb{Z}$  de  $[\nu_i], [\pi_i]$ , disons  $\psi([\mu_1]) = a_1 [\nu_1] + a'_1 [\pi_1] + \dots + a_g [\nu_g] + a'_g [\pi_g]$ . Pour chaque  $1 \leq i \leq g$ , considérons la réunion de  $|a_i|$  courbes fermées simples orientées constituée de  $|a_i|$  parallèles à  $\nu_i$  avec son orientation si le signe de  $a_i$  est positif, à  $\nu_i$  avec l'orientation opposée si le signe de  $a_i$  est négatif. On procède de même avec les courbes  $\pi_i$  et on prend la réunion  $b$  de toutes les courbes ainsi formées. Par construction, cette réunion  $b$  représente  $\psi([\mu_1])$ . L'intersection géométrique de cette réunion  $b$  avec  $\nu_1$  est la somme des intersections géométriques de  $\nu_1$  avec les  $\nu_i$  et  $\pi_i$ , et donc est égale à  $|a'_1| i(\pi_1, \nu_1) = |a'_1|$ . De plus nous avons d'une part,

$$\psi([\mu_1]) \bullet [\nu_1] = (a_1 [\nu_1] + a'_1 [\pi_1] + \dots + a_g [\nu_g] + a'_g [\pi_g]) \bullet [\nu_1] = a'_1 [\pi_1] \bullet [\nu_1] = -a'_1$$

et d'autre part,

$$\psi([\mu_1]) \bullet [\nu_1] = \psi([\mu_1]) \bullet \psi([\lambda_1]) = [\mu_1] \bullet [\lambda_1] = -1.$$

Donc  $a'_1$ . On conclut que l'intersection géométrique entre la réunion  $b$  de courbes fermées simples représentant  $\psi([\mu_1])$  et la courbe  $\nu_1$  est un unique point. ■

4.6) Il s'agit de modifier  $b$  comme dans la question II-2.6) pour le remplacer par une seule courbe fermée simple : on sait que l'algorithme fonctionne a priori, il s'agit seulement de s'assurer que l'on ne modifie pas l'intersection avec  $\nu_1$ . Au cours de l'algorithme de la question II-2.6), on insère un arc joignant deux composantes disjointes "externes" d'une réunion de courbes fermées simples (qui est  $b$  au début). Au plus une de ces composantes intersecte  $\nu_1$ . Il suffit de s'assurer que l'arc n'intersecte pas  $\nu_1$ . Comme  $\nu_1$  est non séparante, ceci est toujours possible. ■

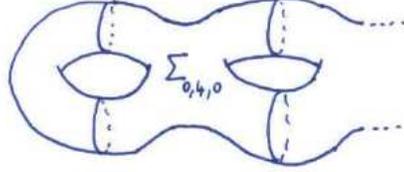
4.7) La conclusion de 4.6) est qu'il existe une paire de courbes fermées simples orientées  $(\nu_1, \pi'_1)$  telle que  $\psi([\lambda_1]) = [\nu_1]$  et  $\psi([\lambda_1]) = [\pi'_1]$ . En procédant par récurrence, on produit une base géométrique symplectique  $(\nu'_i, \pi'_i)$  telle que  $\psi([\lambda_i]) = [\nu_i]$  et  $\psi([\lambda_i]) = [\pi'_i]$ ,  $1 \leq i \leq g$ . L'hypothèse (H) est donc vérifiée. On conclut par 4.1). ■

<sup>1</sup>et pas seulement en une base.

## Problème 2

### I : La relation de la lanterne et l'abélianisation de $\mathfrak{M}(\Sigma)$

1) Le plongement est aisé, par exemple



2) Supposons d'abord que  $f$  fixe les segments  $I_j$ . Si l'on découpe  $\Sigma_{0,4,0}$  le long des trois segments  $I_1, I_2, I_3$ , on obtient un disque (topologique)  $D$ . Comme  $f$  fixe le bord de  $\Sigma_{0,4,0}$ ,  $f$  induit par restriction à  $D = \Sigma_{0,4,0} \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3)$  un homéomorphisme  $\tilde{f}$  de  $D$  qui fixe  $\partial D$ . D'après le truc d'Alexander,  $[\tilde{f}] = [\text{id}_D]$ . On en déduit que  $[f] = [\text{id}_\Sigma]$  dans  $\mathfrak{M}(\Sigma_{0,4,0})$ .

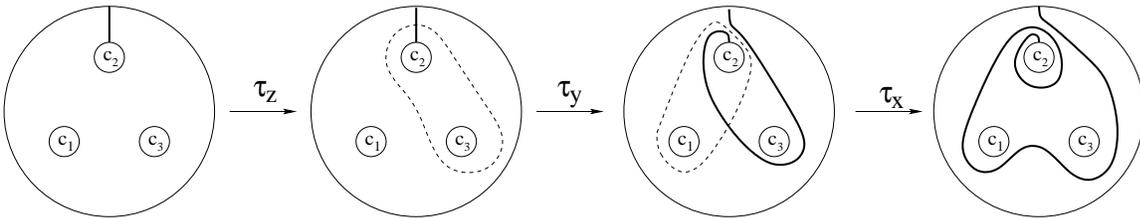
Dans le cas général,  $f(I_j)$  est isotope à  $I_j$  par une isotopie fixant les extrémités à tout instant. Donc le lacet formé de  $I_j$  puis de  $f(I_j)^{-1}$  est homotopiquement trivial, il borde donc un disque  $D_j$  dans  $\Sigma_{0,4,0}$ . Les trois disques  $D_j$  sont donc nécessairement disjoints deux à deux. Donc les isotopies  $(h_j)_t$  correspondantes (faisant passer de  $f(I_j)$  à  $I_j$ ) sont à supports disjoints deux à deux. Donc  $(h_3)_1 \circ (h_2)_1 \circ (h_1)_1 \circ f$  est un difféomorphisme fixant les segments  $I_j$ . Comme chaque isotopie  $(h_j)_t$  se prolonge en une isotopie de l'identité de  $\Sigma_{0,4,0}$ , on n'a pas modifié la classe de  $f$  en composant par  $(h_3)_1 \circ (h_2)_1 \circ (h_1)_1$ . On est ainsi ramené au cas précédent, qui s'applique. Conclusion :  $[f] = [\text{id}_{\Sigma_{0,4,0}}]$ .

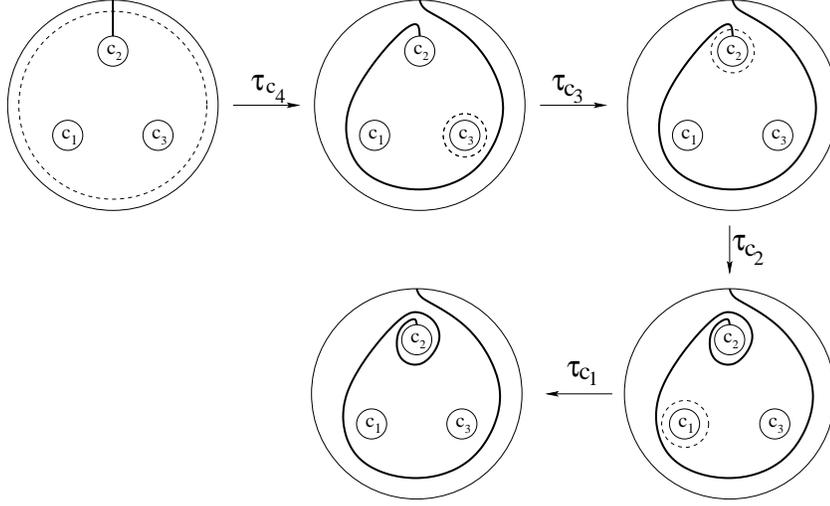
En particulier, si  $t_x t_y t_z(I_j)$  est isotope à  $t_{c_1} t_{c_2} t_{c_3} t_{c_4}(I_j)$ , alors  $(t_{c_1} t_{c_2} t_{c_3} t_{c_4})^{-1} t_x t_y t_z(I_j)$  est isotope à  $I_j$  pour  $j \in \{1, 2, 3\}$ . On peut donc appliquer ce qui précède à

$$f = (t_{c_1} t_{c_2} t_{c_3} t_{c_4})^{-1} t_x t_y t_z,$$

ce qui démontre la relation désirée. ■

3) La relation se démontre donc en vérifiant que  $t_x t_y t_z(I_j)$  est isotope à  $t_{c_1} t_{c_2} t_{c_3} t_{c_4}(I_j)$  pour  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Compte-tenu de la symétrie de la figure, il est suffisant de le vérifier pour un seul indice  $j$ . Faisons le pour  $j = 2$ .





Il est bien clair que les deux images de  $I_2$  sont isotopes dans  $\Sigma_{0,4,0}$ . La conclusion s'ensuit dans  $\mathfrak{M}(\Sigma_{0,4,0})$ .

Comme on dispose du morphisme

$$\mathfrak{M}(\Sigma_{0,4,0}) \rightarrow \mathfrak{M}(\Sigma)$$

induit par l'inclusion vue en I-1), il est clair que toute relation dans  $\mathfrak{M}(\Sigma_{0,4,0})$  induit la même relation vue dans  $\mathfrak{M}(\Sigma)$ . On a donc bien démontré la relation de la lanterne dans  $\mathfrak{M}(\Sigma)$ . ■

4) La relation

$$[f] \circ \tau_a \circ [f]^{-1} = \tau_{f(a)}$$

est valable pour tout difféomorphisme positif  $f$  de  $\Sigma$  et implique que dans l'abélianisé, tous les twists de Dehn sont *égaux*. Comme  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  est engendré par les twists de Dehn, on en déduit que l'abélianisé  $\mathfrak{M}(\Sigma)^{\text{ab}}$  est engendré par un seul générateur  $\tau$ , représenté par un twist de Dehn quelconque. D'après la relation précédente projetée dans  $\mathfrak{M}(\Sigma)^{\text{ab}}$ ,

$$\tau^3 = \tau^4,$$

donc  $\tau = 1$  et ainsi  $\mathfrak{M}(\Sigma)^{\text{ab}} = 1$ . ■

## II : Quelques difféotopies dans $\mathcal{T}(\Sigma)$

1) Puisque  $a$  est séparante,

$$(\tau_a)_*(x) = x + ([a] \bullet x) \quad x = x + (0 \bullet x) \quad x = x,$$

pour tout  $x \in H$ . Donc  $(\tau_a)_* = \text{id}_H$ . Ainsi  $\tau_a \in \mathcal{T}(\Sigma)$ .

Une courbe fermée simple  $a$  est séparante si et seulement si  $f(a)$  est séparante pour tout difféomorphisme positif  $f$  de  $\Sigma$ . La relation

$$[f] \circ \tau_a \circ [f]^{-1} = \tau_{f(a)}$$

implique que le conjugué quelconque d'un twist de Dehn est encore un twist de Dehn séparant. Donc le sous-groupe engendré par les twists de Dehn est normal dans  $\mathcal{T}(\Sigma)$ . ■

2) On déduit de  $[a] = [b]$  que  $(\tau_a)_* = (\tau_b)_*$  par la même formule que précédemment. Donc  $T_{a,b} \in \mathcal{T}(\Sigma)$ . La relation

$$[f] \circ T_{a,b} \circ [f]^{-1} = [f] \circ \tau_a \circ [f]^{-1} \circ [f] \circ \tau_b^{-1} \circ [f]^{-1} = \tau_{f(a)} \circ \tau_{f(b)}^{-1}$$

montre que le sous-groupe engendré par les paires bordantes est normal dans  $\mathcal{T}(\Sigma)$ . ■

### III : La filtration de Johnson

1) L'inclusion  $\Sigma_{g,1,0} \rightarrow \Sigma_{g,0,1}$  (induite en recollant un disque percé le long du bord) induit un épimorphisme  $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,1,0}) \rightarrow \mathfrak{M}(\Sigma_{g,0,1})$  dont le noyau est engendré par  $\tau_C$  (voir le cours). D'après II-1),  $\tau_C \in \mathcal{T}(\Sigma_{g,1,0})$ . Nous avons donc le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \langle \tau_C \rangle & \longrightarrow & \mathcal{T}(\Sigma_{g,1,0}) & \longrightarrow & \mathcal{T}(\Sigma_{g,0,1}) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \langle \tau_C \rangle & \longrightarrow & \mathfrak{M}(\Sigma_{g,1,0}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}(\Sigma_{g,0,1}) \longrightarrow 1 \end{array}$$

2) On se fixe un système  $S$  de générateurs  $x_1, \dots, x_{2g}$  de  $\pi$ . Un mot en les générateurs du système  $S$  est une suite finie d'éléments parmi  $S \cup S^{-1}$  (où  $S^{-1}$  désigne l'ensemble des inverses des éléments de  $S$ ). La longueur  $|w|$  d'un mot est le nombre d'éléments de la suite constituant  $w$ . La longueur  $|x| = |x|_S$  d'un élément  $x \in \pi$  est le nombre de générateurs et de leurs inverses dans un mot réduit représentant  $x$ . Il est bien connu que pour un groupe libre, il existe exactement un mot réduit correspondant à un élément donné. En particulier, un mot réduit  $w$  représente un élément non nul dans  $\pi$  si et seulement si  $w$  est non vide.

Preuve intuitive : chaque élément non trivial  $x \in \Gamma_k \pi$  a une longueur  $|x| \geq k$  par conséquent,  $x \notin \Gamma_{k+1} \pi$ . Donc l'intersection des  $\Gamma_k \pi$  est triviale. (NB : Cette preuve a été acceptée à la correction.)

La difficulté est de démontrer de façon complètement rigoureuse la première affirmation sur la longueur. En particulier le fait que  $\pi$  est libre joue un rôle crucial. Cependant, même pour le groupe libre qui jouit de la propriété d'unicité du mot réduit, la longueur d'un mot réduit n'est pas évidente à contrôler. Une preuve rigoureuse à peu près élémentaire est proposée à la fin de ce corrigé.

3) On sait que  $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,1,0})$  agit sur  $\pi$  : par automorphismes induits au niveau du groupe fondamental. Soit  $[f] \in \mathfrak{M}(\Sigma_{g,1,0})$ . Alors  $f_{\sharp}$  est un automorphisme de  $\pi$  vérifiant  $f_{\sharp}([\partial\Sigma]) = [\partial\Sigma]$ . Montrons que  $f_{\sharp}(\Gamma_k \pi) = \Gamma_k \pi$ . Il n'y a rien à montrer pour  $k = 1$ . Montrons le résultat par récurrence sur  $k$ . Alors

$$f_{\sharp}(\Gamma_{k+1} \pi) = f_{\sharp}([\Gamma_k \pi, \pi]) = [f_{\sharp}(\Gamma_k \pi), f_{\sharp}(\pi)] = [\Gamma_k \pi, \pi] = \Gamma_{k+1} \pi.$$

C'est le résultat attendu. Il s'ensuit que  $f_{\sharp}$  induit par passage au quotient un automorphisme  $\pi/\Gamma_k \pi \rightarrow \pi/\Gamma_k \pi$  pour tout  $k \geq 1$ . L'application correspondante  $\rho_k : [f] \mapsto f_{\sharp}, \mathfrak{M}(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(\pi/\Gamma_k)$  est le morphisme recherché. ■

Pour  $k = 2$ ,  $\Gamma_2 \pi = [\pi, \pi]$  de sorte que  $\pi/\Gamma_2 \pi = \pi/[\pi, \pi] \simeq H_1(\Sigma)$ . Le morphisme  $\rho_2$  n'est autre que la représentation symplectique. ■

4) D'après la question 3),  $\mathcal{J}(2) = \mathcal{T}(\Sigma_{g,1,0})$  (le sous-groupe de Torelli). Noter que  $\rho_k$  se factorise par  $\rho : \mathfrak{M}(\Sigma_{g,1,0}) \rightarrow \text{Aut}(\pi)$  (qui est injective par Dehn-Baer-Nielsen). Puisque

$$\Gamma_{k+1}\pi \subset \Gamma_k\pi$$

et que tout automorphisme  $f_{\sharp}$  de  $\pi$  vérifie  $f_{\sharp}\Gamma_k\pi = \Gamma_k\pi$ , on a un morphisme naturel  $\text{Im}(\rho_{k+1}) \rightarrow \text{Im}(\rho_k)$  qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}(\Sigma_{g,1,0}) & \xrightarrow{\rho_k} & \text{Im}(\rho_k) \\ & \searrow \rho_{k+1} & \uparrow \\ & & \text{Im}(\rho_{k+1}) \end{array}$$

Par conséquent,  $\mathcal{J}(k) = \text{Ker}(\rho_k) \supset \text{Ker}(\rho_{k+1}) = \mathcal{J}(k+1)$ . ■

5) Considérons la suite exacte

$$1 \rightarrow \Gamma_k\pi/\Gamma_{k+1}\pi \rightarrow \pi/\Gamma_{k+1}\pi \rightarrow \pi/\Gamma_k\pi \rightarrow 1.$$

Puisque  $[f] \in \mathcal{J}(k)$ ,  $[f]$  agit trivialement (i.e. comme l'identité) sur  $\pi/\Gamma_k\pi$ . Donc  $f_{\sharp}\gamma \cdot \gamma = 1$  dans  $\pi/\Gamma_k\pi$ . Par conséquent,  $f_{\sharp}\gamma \cdot \gamma^{-1} \in \text{Im}(\Gamma_k\pi/\Gamma_{k+1}\pi \rightarrow \pi/\Gamma_{k+1}\pi)$ . On peut donc voir  $f_{\sharp}\gamma \cdot \gamma^{-1}$  comme un élément dans  $\Gamma_k\pi$ . ■

On note  $[f_{\sharp}\gamma \cdot \gamma^{-1}]$  sa projection dans  $\Gamma_k\pi/\Gamma_{k+1}\pi$ . Pour montrer que l'application

$$\mathcal{J}(k) \rightarrow \text{Hom}(H, \Gamma_k\pi/\Gamma_{k+1}\pi), \quad \tau_k([f]) = [f_{\sharp}\gamma \cdot \gamma^{-1}]$$

est bien définie, il suffit de voir qu'elle ne dépend que de la classe d'homologie  $[\gamma] \in H = \pi/\Gamma_2\pi$  et non du relevé  $\gamma \in \pi$ . Pour cela, il est suffisant d'observer que  $\Gamma_k\pi/\Gamma_{k+1}\pi$  est *abélien*. En fait, nous avons

$$\Gamma_{k+1}\pi \supset \Gamma_{2k}\pi \supset [\Gamma_k, \Gamma_k].$$

(La dernière inclusion découle du fait que  $\Gamma_{k+l}\pi \supset [\Gamma_k\pi, \Gamma_l\pi]$  qui se montre par récurrence.) Donc le groupe abélien  $(\Gamma_k\pi)^{\text{ab}} = \Gamma_k\pi/[\Gamma_k\pi, \Gamma_k\pi]$  se surjecte sur  $\Gamma_k\pi/\Gamma_{k+1}\pi$  qui est donc aussi abélien. Donc  $\tau_k([f])$  se factorise bien à travers l'abélianisé de  $\pi$  qui est  $H$ . ■

Il convient aussi de montrer que  $\tau_k$  est bien un homomorphisme. Nous avons, pour  $f, g \in \mathcal{J}(k)$ ,

$$\begin{aligned} \tau_k([f \circ g])([\gamma]) &= [(f \circ g)(\gamma) \cdot \gamma^{-1}] = [f(g(\gamma)) \cdot \gamma^{-1}] \\ &= [f(g(\gamma) \cdot \gamma^{-1}) \cdot f(\gamma) \cdot \gamma^{-1}] \\ &= [g(\gamma) \cdot \gamma^{-1} \cdot f(\gamma) \cdot \gamma^{-1}] \\ &= \tau_k([g])([\gamma]) + \tau_k([f])([\gamma]). \end{aligned}$$

(On a utilisé le fait, dans la troisième égalité, que  $f$  agit trivialement sur  $\pi/\Gamma_k\pi$  et que  $g(\gamma)\gamma^{-1} \in \pi/\Gamma_k\pi$ .) ■

Le noyau de  $\tau_k$  se calcule directement :  $\tau_k([f]) = 0$  ssi  $\tau_k([f])([\gamma]) = 0$  pour tout  $[\gamma] \in H$ . Or  $\tau_k([f])([\gamma]) = [f_{\sharp}(\gamma) \cdot \gamma^{-1}] = 0$  ssi  $f_{\sharp}\gamma \cdot \gamma^{-1} \in \Gamma_{k+1}\pi$  ssi  $f_{\sharp}(\gamma) = \gamma \text{ mod } \Gamma_{k+1}\pi$ . On en conclut que  $\tau_k([f]) = 0$  ssi  $f$  agit comme l'identité modulo  $\Gamma_{k+1}\pi$ , ce qui revient exactement à dire que  $[f] \in \mathcal{J}(k+1)$ . ■

### Complément : le groupe libre $\pi$ est résiduellement nilpotent

L'objet de ce complément est de démontrer rigoureusement l'affirmation selon laquelle

$$\bigcap_{k \geq 1} \Gamma_k \pi = \{1\}.$$

(Cette affirmation est équivalente à :  $\pi$  est résiduellement nilpotent.)

L'idée est de "mesurer" la longueur des mots de  $\Gamma_k \pi$  à l'aide d'une représentation de  $\pi$  (la représentation de Magnus).

Notons  $\Lambda_n = \mathbb{Z}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$  l'algèbre des séries formelles à  $n$  indéterminées non commutatives. Cette algèbre est de dimension infinie, constituée par les sommes formelles infinies de monômes de la forme

$$X_{s_1}^{k_1} \dots X_{s_r}^{k_r},$$

pour tout  $r \geq 0$  et toutes applications  $s : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  et  $k : \{1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{N}$  telles que  $s_i \neq s_{i+1}$ . Il n'est pas très difficile de voir que le groupe  $U_n$  des unités de  $\Lambda_n$  (dont l'élément neutre est la série formelle égale à 1) est constitué des séries formelles dont le terme constant est égal à 1.

On définit une application  $\rho : \pi \rightarrow \Lambda_{2g}$  en posant

$$x_i \mapsto 1 + X_i, \quad x_i^{-1} \mapsto 1 - X_i + X_i^2 - X_i^3 + \dots,$$

pour tout  $1 \leq i \leq 2g$ . On vérifie par le calcul formel usuel que cette application est un morphisme de groupes. Il est clair que l'image de  $\rho$  est bien dans  $U_{2g}$ .

**Lemme 1.** *Le morphisme  $\rho : \pi \rightarrow U_{2g}$  est injectif.*

Pour montrer le lemme, il suffit de montrer qu'un mot  $w$  réduit en  $x_1, \dots, x_{2g}$  non trivial n'est pas envoyé sur 1. Pour effectuer le calcul, il est utile d'observer que

$$\rho(x_i^n) = 1 + n X_i + X_i h(X_i),$$

où  $h(X_i) \in \Lambda_{2g}$  est une série formelle ne faisant intervenir que l'indéterminée  $X_i$ . Si maintenant l'on écrit l'image d'un mot réduit non trivial

$$w = x_{s_1}^{k_1} \dots x_{s_r}^{k_r}$$

dans  $U_{2g}$ , on observe après calcul que  $\rho(w)$  contient un unique monôme de la forme  $k_1 \dots k_r X_{s_1} \dots X_{s_r}$ . Comme  $k_1 \dots k_r \neq 0$ , on en déduit que  $\rho(w) \neq 1$ . ■

Soit  $s \in U = U_{2g}$ . Définissons la *hauteur* de  $s$  comme le plus petit degré des monômes apparaissant dans  $s$ . Par exemple, si  $s$  a une hauteur nulle alors  $s = 1$ . Un autre exemple moins trivial est

$$s = 1 + X_i X_j - X_j X_i$$

dont la hauteur est 2.

**Lemme 2.** *Tous les éléments non triviaux de  $\rho(\Gamma_k \pi)$  ont une hauteur  $\geq k$ .*

Ce résultat se montre par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 1$ ,  $\Gamma_1 \pi = \pi$  et  $\rho(\pi) \subset U_{2g}$  dont tous les éléments distincts de 1 ont hauteur  $\geq 1$ . Soit  $H_k$  l'ensemble des éléments de  $U$  de hauteur  $\geq k$ . Si on lui adjoint 1, c'est manifestement un sous-groupe de  $U$ . En comparant

les produits  $f \cdot g$  et  $g \cdot f$  pour  $f \in H_k$  et  $g \in U$ , il n'est pas difficile de voir que  $[f, g] \in H_{k+1}$ .  
Donc

$$[H_k, U] \subset H_{k+1}.$$

Supposons, par récurrence sur  $k$ , avoir montré que  $\rho(\Gamma_k \pi) \subset H_k$ . Alors

$$\rho(\Gamma_{k+1} \pi) = [\rho(\Gamma_k \pi), \rho(\pi)] \subset [H_k, U] \subset H_{k+1}.$$

D'où le résultat. ■

Évidemment, l'intersection de tous les  $H_k$ ,  $k \geq 1$ , est réduite à  $\{1\}$ . Il résulte immédiatement du lemme que

$$\bigcap_{k \geq 1} \Gamma_k \pi = \{1\}.$$
■