Licence MPC L3 – Mathématiques
Analyse de Fourier 2

Exercice 1. Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour $0 \leq x < 2\pi$.

1. Tracer le graphe de f.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f.

3. En quels $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $Sf(x) = f(x)$?

4. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

5. Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Exercice 2. Montrer que pour $0 < x < \pi$,

$$\cos(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin(2nx).$$

Exercice 3. Soit $f(t) = \sqrt{t}$ définie sur $[0, 2\pi[$ et prolongée par 2π-périodicité. Est-ce que f est C^1 par morceaux ? En quels points t la série de Fourier $Sf(t)$ converge-t-elle vers $f(t)$?

Exercice 4. Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ si $x \in [0, 2\pi[$, et soit g définie sur $\mathbb{R}$ par par $g(x) = f(x+1) - f(x-1)$. 1. Déterminer les séries de Fourier de f et de g.

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$. (On pourra montrer que les valeurs de ces deux sommes sont égales et utiliser la formule de Parseval.)

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π ?périodique de classe C^1 telle que ${}_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt$$

et caractériser l'égalité.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et 2π-périodique. 1. A l'aide du théorème de Parseval, démontrer que $c_n(f)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On suppose que f est de classe C^k. Etablir une relation entre les coefficients de Fourier de f et ceux de $f^{(k)}$.

3. En déduire que si f est de classe C^1, alors $c_n(f) = o(1/n^k)$ pour tout entier k.

4. Réciproquement, on suppose que $c_n(f) = o(1/n^k)$ quand $n \to +\infty$ pour tout entier k.

(a) Démontrer que la série Sf de Fourier associée à f est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que Sf est de classe C^∞.

(c) Montrer que f et Sf ont mêmes coefficients de Fourier.

(d) En déduire que $f = Sf$ et donc que f est de classe C^∞.

5. Quel théorème a-t-on démontré dans cet exercice ?

Exercice 7. Soit f la fonction 2π-périodique paire définie par $f(t) = \cos(t/2)$ si $x \in [0, \pi[$.

1. Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

2. Calculer la série de Fourier de f.

Exercice de révisions sur la transformée de Laplace

Exercice 1. Soit a, b deux réels positifs. Calculer la transformée de Laplace de la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = -a(t-b)$ si $t \in [0, b]$ et $f(t) = 0$ si $t > b$.

Exercice 2. On note u la fonction échelon unité définie par $u(t) = 0$ si $t < 0$ et $u(t) = 1$ si $t \geq 0$.

1. Calculer $\mathscr{L}u$.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue. On définit $g : \mathbb{R}^+ \to$ par $g(t) = f(t)$ si $t \in [0, T]$ et $g(t) = 0$ si $t > T$.

2. Montrer que g admet une transformée de Laplace.

3. Soit $p \mapsto G(p)$ la transformée de Laplace de g. Montrer que la transformée de Laplace $\mathscr{L}f$ est

$$\mathscr{L}f(p) = \frac{G(p)}{1 - \exp(-Tp)}.$$

Indication : on pourra remarquer que

$$f(t) = g(t)u(t) + g(t-T)u(t-T) + \cdots + g(t-nT)u(t-nT) + \cdots .$$

Exercice 3. Résoudre à l'aide de la transformée de Laplace l'équation différentielle

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t$$

avec conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$.