Transformée de Laplace : annales janvier et juin 2011

Exercice (janvier 2011)

1. Trouver la décomposition en éléments simples de $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s^2-4s+5)}$.
2. Utiliser la transformation de Laplace pour résoudre le système (S) $\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = e^{-t} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

Réponse

1. On cherche A, B et C tels que $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s^2-4s+5)} = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{Bs+C}{s^2-4s+5}$

- $\times(s+1)$ puis $s=-1$: on trouve $A = 1/10$
- $\times s$ puis on fait tendre s vers $+\infty$: on trouve $0 = A + B$, i.e. $B = -A = -1/10$
- $F(0) = 1/5 = A + C/5$, d'où $C = 1 - 5A = 1 - 1/2 = 1/2$

Conclusion : $F(s) = \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{10}\dfrac{5-s}{s^2-4s+5}$

2. En posant $Y = \mathcal{L}(y)$, le système (S) entraîne $s^2Y(s) - 4sY(s) + 5Y(s) = \mathcal{L}(e^{-t})(s) = \dfrac{1}{s+1}$, d'où $Y(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s^2-4s+5)} = F(s)$. D'après 1., on a donc $Y(s) = \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{10}\dfrac{5-s}{s^2-4s+5}$ ou

$$Y(s) = \frac{1}{10}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{10}\frac{5-s}{(s-2)^2+1}$$

que l'on écrit sous la forme

$$Y(s) = \frac{1}{10}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{10}\frac{s-2}{(s-2)^2+1} + \frac{1}{10}\frac{3}{(s-2)^2+1}$$

afin de conclure que

$$y(t) = \frac{1}{10}\,e^{-t} - \frac{1}{10}\,\cos te^{2t} + \frac{3}{10}\,\sin te^{2t}$$

Exercice (juin 2011)

1. Trouver la décomposition en éléments simples de $\dfrac{2s-2}{s^2-s-2}$.

2. Trouver la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(s^2-s-2)(s-1)^2}$.

Utiliser la transformation de Laplace pour résoudre $\left\{\begin{array}{l} y''(t)-y'(t)-2y(t)=te^t \\ y(0)=2 \\ y'(0)=0 \end{array}\right.$

Réponse 1. On cherche A et B vérifiant : $\dfrac{2s-2}{s^2-s-2}=\dfrac{2s-2}{(s+1)(s-2)}=\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{s-2}$

- En multipliant, par $(s+1)$, puis en posant $s=-1$, on trouve $A=\dfrac{-4}{-3}=\dfrac{4}{3}$.
- En multipliant, par $(s-2)$, puis en posant $s=2$, on trouve $B=\dfrac{2}{3}$.

2. On cherche les constantes A, B, C et D telles que

$$\frac{1}{(s^2-s-2)(s-1)^2}=\frac{1}{(s+1)(s-2)(s-1)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-1}+\frac{D}{(s-1)^2}$$

- En multipliant, par $(s+1)$, puis en posant $s=-1$, on trouve $A=\dfrac{1}{-3\times 4}=-\dfrac{1}{12}$.
- En multipliant, par $(s-2)$, puis en posant $s=2$, on trouve $B=\dfrac{1}{3}$.
- En multipliant, par $(s-1)^2$, puis en posant $s=1$, on trouve $D=\dfrac{1}{2\times(-1)}=-\dfrac{1}{2}$.
- En posant $s=0$, on trouve $-\dfrac{1}{2}=A-\dfrac{B}{2}-C+D$ qui donne $C=A-\dfrac{B}{2}+D+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}$.

En conclusion : $\dfrac{1}{(s^2-s-2)(s-1)^2}=-\dfrac{1}{12}\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(s-1)^2}$.

3. Par la transformation de Laplace, on a $\mathscr{L}(y''-y'-2y)=\mathscr{L}(te^t)$, soit encore $\mathscr{L}(y'')-\mathscr{L}(y')-2\mathscr{L}(y)=\mathscr{L}(te^t)$.Puisque $\mathscr{L}(y'')=s^2\mathscr{L}(y)-sy(0)-y'(0)=s^2\mathscr{L}(y)-2s$, $\mathscr{L}(y')=s\mathscr{L}(y)-y(0)=s\mathscr{L}(y)-2$ et $\mathscr{L}(te^t)=\dfrac{1}{(s-1)^2}$, on en déduit que $(s^2-s-2)\mathscr{L}(y)=\dfrac{1}{(s-1)^2}+2s-2$, i.e. $\mathscr{L}(y)=\dfrac{1}{(s^2-s-2)(s-1)^2}+\dfrac{2s-2}{(s^2-s-2)}$. Ainsi, en utilisant le résultat de la question précédente, on trouve

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(y) &= \left(-\frac{1}{12}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{s-2}-\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2}\right)+\left(\frac{4}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{s-2}\right)\\ &= \frac{5}{4}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-2}-\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2}\end{aligned}$$

Par la transformation inverse de Laplace, on peut alors conclure que la solution du système (S) est

$$y(t)=\frac{5}{4}e^{-t}+e^{2t}-\frac{2t+1}{4}e^t$$