Faisceaux localement asphériques

par

Denis-Charles Cisinski

Version préliminaire : 26 janvier 2003.

Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Paris 7-Denis Diderot
Case 7012, 2 Place Jussieu, 75 251 Paris cedex 05 France
cisinski@math.jussieu.fr

Abstract. This text deals with a natural generalization of the theory of Grothendieck's test local categories in the topos setting. In other words, we give necessary and sufficient conditions for witch a category of sheaves $\mathcal{E}$ modelize "canonically" homotopy types (*i.e.* CW-complexes up to homotopy), and such that this property remains true locally on $\mathcal{E}$. For this purpose, we develop a general homotopy theory in sheaves categories with a particular emphasis on functoriality and descent properties. This allows us to define different homotopy theories of topoi, and then a language for the theory we are looking for. We are particularly interested in the caracterization of topoi weak equivalences in terms of cohomology and of Galois theory, recovering the classical theory of M. Artin and B. Mazur. We thus obtain a common framework to describe homotopy types from a combinatorial point of view (for example by considering the topos of simplicial sets), or from a geometric point of view (for example by considering the topos of sheaves on the site of real differential or analytic manifolds). Furthermore, the purely local theory allows the equivariant homotopy theories in this frame (considering for example the actions of a simplicial group as well as the actions of a Lie group or of an orbifold).

Résumé. Ce texte contribue à une généralisation naturelle de la théorie des catégories test locales de Grothendieck au cadre des topos. Autrement dit, nous y donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une catégorie de faisceaux $\mathcal{E}$ modèle "canoniquement" les types d'homotopie (*i.e.* les CW-complexes à homotopie près) et pour que cette propriété soit locale sur $\mathcal{E}$. Pour se faire, nous développons la théorie générale de l'homotopie dans les catégorie de faisceaux, en mettant l'emphase sur les propriétés de fonctorialité et de descente. Cela permet de définir différentes théories de l'homotopie des topos, et donc un langage pour la théorie recherchée. Nous avons pris soin de caractériser autant que possible les différentes notions d'équivalences faibles en termes cohomologiques et galoisiens, faisant ainsi le lien avec la théorie de M. Artin et B. Mazur. Nous obtenons ainsi un cadre général permettant de décrire les types d'homotopie d'un point de vue combinatoire (par exemple en considérant le topos des ensembles simpliciaux) ou bien d'un point de vue géométrique (par exemple en considérant le topos des faisceaux sur le site des variétés différentielles ou analytiques réelles). La théorie purement locale permet d'intégrer dans ce cadre les théories de l'homotopie équivariantes (par exemple en considérant les actions d'un groupe simplicial aussi bien que celles d'un groupe de Lie ou encore d'un orbifold).

Table des matières

CHAPITRE 1

Algèbre homotopique des faisceaux

1. Accessibilité

1.1.1. Nous renvoyons le lecteur à SGA 4 [**31**, exposés II à IV] pour les notions de site et de topos. La terminologoie “topologique” que nous utiliserons sera, sauf mention explicite du contraire, issue de ce texte. En particulier, on parlera indifféremment d'objet d'un topos $\mathcal{E}$ ou de faisceau sur $\mathcal{E}$ (sous-entendu, pour la topologie canonique sur $\mathcal{E}$). Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux topos, on note $\mathsf{Homtop}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ la catégorie dont les objets sont les morphismes de topos de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$ et dont les flèches $\varphi \longrightarrow \psi$ sont les morphismes de foncteurs images directes de φ_* vers ψ_*.

Les notions d'accessibilité envisagées ici sont celles de [**13, 15**].

On fixe pour le moment un petit site (C,J). On note $\mathcal{E} = \widetilde{C}$ le topos des faisceaux sur celui-ci, $i : \mathcal{E} \longrightarrow \widehat{C}$ le foncteur d'oubli, et $a : \widehat{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ le foncteur “faisceau associé”.

Lemme 1.1.2. *Le foncteur composé $ia : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{C}$ est accessible.*

Démonstration. On rappelle que le foncteur ia peut-être défini comme suit. Si X est un préfaisceau sur C, on pose

$$LX(U) = \varinjlim_{R\in J(U)^\circ} \mathsf{Hom}_{\widehat{C}}(R,X) \quad , \quad U \in \mathsf{Ob}\, C \ ,$$

$J(U)$ désignant l'ensemble ordonné, cofiltrant pour l'inclusion, des cribles couvrants de U pour la topologie J sur C. Cela définit un endofoncteur de $\widehat{C}$, $X \longmapsto LX$. On sait que le foncteur ia est isomorphe au foncteur itéré L^2 (cf. [**31**, exposé II, théorème 3.4]). Il suffit par conséquent de montrer que le foncteur L est accessible. Soit α un cardinal tel que pour tout objet U de C, et tout crible couvrant R de U, R soit α-accessible. Comme toute petite limite inductive de foncteurs α-accessibles est α-accessible, il est immédiat que les foncteurs

$$X \longmapsto LX(U) \quad , \quad U \in \mathsf{Ob}\, C \ ,$$

sont α-accessibles. On en déduit aussitôt l'assertion. □

Proposition 1.1.3. *Le foncteur d'oubli $i : \mathcal{E} \longrightarrow \widehat{C}$ est accessible.*

Démonstration. Soit α un cardinal tel que le foncteur ia soit α-accessible (ce qui existe en vertu du lemme précédent). On va montrer que i est α-accessible. Soient I un petit ensemble ordonné α-filtrant, et $F : I \longrightarrow \mathcal{E}$ un foncteur. Alors on a les identifications suivantes,

$$\varinjlim iF \simeq \varinjlim iaiF \simeq ia \varinjlim iF \simeq i \varinjlim aiF \simeq i \varinjlim F \ ,$$

ce qui prouve bien la proposition. □

Corollaire 1.1.4. *Tous les objets de $\mathcal{E}$ sont accessibles.*

DÉMONSTRATION. Soit X un objet de $\mathcal{E}$. En vertu de [**13**, corollaire 2.1.11], le préfaisceau iX est accessible et il résulte de la proposition précédente qu'on peut choisir un cardinal α tel qu'à la fois iX soit α-accessible et i α-accessible. On va en déduire que X est α-accessible dans $\mathcal{E}$. Considérons un petit ensemble ordonné α-filtrant I et un foncteur F de I vers $\mathcal{E}$. On obtient alors les bijections canoniques

$$\begin{aligned} \varinjlim \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(X,F) &\simeq \varinjlim \mathsf{Hom}_{\widehat{C}}(iX,iF) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\widehat{C}}(iX,\varinjlim iF) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\widehat{C}}(iX,i\varinjlim F) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(X,\varinjlim F)\ , \end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion. □

DÉFINITION 1.1.5. Soit α un cardinal. Un objet X de $\mathcal{E}$ est *de taille* $\leq \alpha$ s'il existe un préfaisceau R sur C, et un isomorphisme $aR \simeq X$ dans $\mathcal{E}$.

1.1.6. On note $T_\alpha(\mathcal{E},C)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ formée des objets de taille $\leq \alpha$, et $Acc_\alpha(\mathcal{E})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ formée des objets α-accessibles.

PROPOSITION 1.1.7. *Soit α un cardinal infini majorant $|\,\mathsf{Fl}(C)|$, tel que pour tout objet U de C, le faisceau associé aU soit α-accessible.*

(i) *Le foncteur $a : \widehat{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ envoie tout préfaisceau α-accessible sur un faisceau α-accessible (*i.e.* un objet α-accessible de $\mathcal{E}$).*

(ii) *On a l'égalité $T_\alpha(\mathcal{E},C) = Acc_\alpha(\mathcal{E})$. En particulier, la catégorie $Acc_\alpha(\mathcal{E})$ est essentiellement petite.*

(iii) *Tout objet de $\mathcal{E}$ est la réunion α-filtrante de ses sous-objets α-accessibles.*

(iv) *Les objets α-accessibles de $\mathcal{E}$ sont stables par limites inductives finies et par limites projectives finies.*

DÉMONSTRATION. Soit X un préfaisceau de taille $\leq \alpha$. On note

$$\phi_X : C/X \longrightarrow \widehat{C} \quad , \quad (U, U \longrightarrow X) \longmapsto U\ .$$

On sait que $\varinjlim \phi_X \simeq X$. Comme le foncteur a commute aux petites limites inductives, il en résulte aussitôt un isomorphisme canonique

$$\varinjlim a\phi_X \simeq aX\ .$$

Comme par hypothèse, on a l'inégalité

$$|\,\mathsf{Fl}(C/X)| \leq \alpha\ ,$$

[**13**, 2.1.10] implique que aX est α-accessible. En vertu de [**13**, proposition 2.1.16], on a donc montré (i). Le lecteur conviendra qu'on a aussi établi l'inclusion $T_\alpha(\mathcal{E},C) \subset Acc_\alpha(\mathcal{E})$. Or il résulte encore une fois de [**13**, 2.1.16] que tout objet X de $\mathcal{E}$ est la réunion α-filtrante de ses sous-objets de taille $\leq \alpha$. On en déduit que tout objet α-accessible X de $\mathcal{E}$ est de taille $\leq \alpha$, puisque par un argument standard, il existe un sous-objet Y de X, de taille $\leq \alpha$, tel que l'inclusion $Y \longrightarrow X$ admette une rétraction. Cela prouve à la fois (ii) et (iii). L'assertion (iv) résulte facilement de (ii). □

PROPOSITION 1.1.8. *Soit $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de topos. Il existe un cardinal α_0 tel que pour tout cardinal $\alpha \geq \alpha_0$, on ait l'inclusion*

$$\varphi^* Acc_\alpha(\mathcal{F}) \subset Acc_\alpha(\mathcal{E}) \ .$$

DÉMONSTRATION. Soit (C, J) un petit site tel que $\mathcal{F}$ s'identifie à la catégorie des faisceaux sur C. On note $a : \widehat{C} \longrightarrow \mathcal{F}$ le foncteur faisceau associé. Il existe un cardinal infini α_0 vérifiant les conditions suivantes.

(i) Pour tout objet U de C, aU et $\varphi^* aU$ sont α_0-accessibles (cf. 1.1.4).

(ii) Le cardinal α_0 majore $|\,\mathsf{Fl}\, C|$.

On sait alors (1.1.7) que pour tout cardinal $\alpha \geq \alpha_0$, on a l'identification $Acc_\alpha(\mathcal{F}) = T_\alpha(\mathcal{F}, C)$. Il suffit donc de montrer que pour un tel α, on a l'inclusion

$$\varphi^* T_\alpha(\mathcal{F}, C) \subset Acc_\alpha(\mathcal{E}) \ .$$

Soit X un faisceau sur C de taille $\leq \alpha$. Alors il existe un foncteur $F : I \longrightarrow C$, I étant une petite catégorie telle que $|\,\mathsf{Fl}\, I| \leq \alpha$, et un isomorphisme de faisceaux

$$\varinjlim aF \simeq X \ .$$

On a donc un isomorphisme

$$\varphi^* X \simeq \varinjlim \varphi^* aF \ ,$$

ce qui permet de conclure en vertu de [**13**, proposition 2.1.9]. $\square$

DÉFINITION 1.1.9. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un cardinal α est *adapté* à $\mathcal{E}$ s'il vérifie les conditions suivantes.

(i) Tout faisceau sur $\mathcal{E}$ est réunion α-filtrante de ses sous-objets α-accessibles.

(ii) La catégorie $Acc_\alpha(\mathcal{E})$ est stable par limites projectives finies.

(iii) Tout sous-objet d'un objet α-accessible de $\mathcal{E}$ est α-accessible.

REMARQUE 1.1.10. Les catégorie $Acc_\alpha(\mathcal{E})$ sont systématiquement stables par limites inductives finies. Il résulte de la proposition 1.1.7 qu'il existe toujours un cardinal α_0 tel que tout cardinal $\alpha \geq \alpha_0$ soit adapté à $\mathcal{E}$.

LEMME 1.1.11. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, et α un cardinal adapté à $\mathcal{E}$. On considère un épimorphisme $q : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{E}$, dont le but est α-accessible. Alors pour tout sous-objet α-accessible K de X, il existe un sous-objet α-accessible L de X, contenant K, et tel que la restriction de q à L soit encore un épimorphisme de but Y.*

DÉMONSTRATION. Soit I l'ensemble des sous-objets α-accessibles de X, ordonné par l'inclusion. On note $F : I \longrightarrow \mathcal{E}$ le foncteur qui associe à chaque sous-objet α-accessible X' de X, son image $q(X')$ dans Y par la flèche q. On sait par hypothèse que I est un ensemble ordonné α-filtrant, et comme q est un épimorphisme, la flèche canonique

$$\varinjlim F \longrightarrow Y$$

est un isomorphisme. En outre, l'α-accessibilité de Y implique qu'on a des bijections canoniques

$$\varinjlim \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(Y, F) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(Y, \varinjlim F) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(Y, Y) \ .$$

Comme pour tout $i \in I$, la flèche $F_i \longrightarrow Y$ est une inclusion, on en déduit aussitôt qu'il existe un $i \in I$ tel que $F_i = Y$. $\square$

DÉFINITION 1.1.12. Soit $\mathcal{E}$ un topos. On note $\mathbf{s}\mathcal{E}$ le topos des *faisceaux simpliciaux* sur $\mathcal{E}$ (*i.e.* des objets simpliciaux de la catégorie $\mathcal{E}$). Un cardinal α est *s-adapté* s'il vérifie les conditions suivantes.

(i) Le cardinal α est adapté à la fois à $\mathcal{E}$ et à $\mathbf{s}\mathcal{E}$.

(ii) Le cardinal α est infini

(iii) Pour tout faisceau simplicial α-accessible X sur $\mathcal{E}$, et tout entier $n \geq 0$, le faisceau X_n est α-accessible.

LEMME 1.1.13. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. Il existe un cardinal α_0 tel que tout cardinal $\alpha \geq \alpha_0$ soit s-adapté à $\mathcal{E}$.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement de la remarque 1.1.10 et de la proposition 1.1.8 appliquée aux morphismes de topos d'évaluation

$$ev_n : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E} \ ,$$

dont les foncteurs image inverse sont définis par la formule $ev_n^* X = X_n$. $\square$

2. $\mathcal{E}$-localisateurs

Ce paragraphe est un fascicule de résultats, analogues à ceux de [**13**, chapitre 2] dans le cadre des catégories de préfaisceaux. Les démonstrations déjà établies dans le cadre des catégories de préfaisceaux gardant leur sens *mutatis mutandis* dans celui des faisceaux, nous les avons omises, renvoyant le lecteur à [**13**] et à [**15**].

Si F désigne un ensemble de flèches d'une catégorie $\mathcal{C}$, on rappelle que $l(F)$ (resp. $r(F)$) désigne l'ensemble des flèches de $\mathcal{C}$ vérifiant la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) relativement aux éléments e F.

DÉFINITION 1.2.1. Un *modèle cellulaire* d'un topos $\mathcal{E}$ est un petit ensemble $\mathcal{M}$ de monomorphismes de $\mathcal{E}$, tel que $l(r(\mathcal{M}))$ soit l'ensemble des monomorphismes de $\mathcal{E}$

PROPOSITION 1.2.2. *Tout topos admet un modèle cellulaire.*

DÉFINITION 1.2.3. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un *cylindre* d'un objet X de $\mathcal{E}$ est un quadruplet

$$(IX, \partial^0_X, \partial^1_X, \sigma_X)$$

correspondant à un diagramme commutatif du type suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, bend left, "\partial^0_X"'] \arrow[drr, bend left, "1_X"] & & \\
& IX \arrow[r, "\sigma_X"] & X \\
X \arrow[ur, bend right, "\partial^1_X"] \arrow[urr, bend right, "1_X"'] & &
\end{tikzcd} \quad ,$$

et tel que $(\partial^0_X, \partial^1_X) : X \amalg X \longrightarrow IX$ soit un monomorphisme.

Un morphisme de cylindres

$$(IX, \partial^0_X, \partial^1_X, \sigma_X) \longrightarrow (IY, \partial^0_Y, \partial^1_Y, \sigma_Y)$$

est une paire de morphismes $\phi : X \longrightarrow Y$ et $\psi : IX \longrightarrow IY$ tels que $\psi\partial^e_X = \partial^e_Y\phi$ pour $e = 0, 1$ et $\phi\sigma_X = \sigma_Y\psi$.

On note $Cyl(\mathcal{E})$ la catégorie des cylindres de $\mathcal{E}$.

Un *cylindre fonctoriel* $\mathcal{I}$ est une section du foncteur

$$Cyl(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E} \qquad , \qquad (IX, \partial^0_X, \partial^1_X, \sigma_X) \longmapsto X \ .$$

Notations 1.2.4. Un cylindre fonctoriel $\mathcal{I}$ est déterminé par un quadruplet $(I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$, où I est un endofoncteur de $\mathcal{E}$, et σ un morphisme de foncteurs de I vers $1_{\mathcal{E}}$, et ∂^e des sections de σ vérifiant des conditions évidentes (cf. [**15**, 2.1]). On adoptera les mêmes conventions d'écriture que dans [**15**, 2.2]. Par exemple on écrira $X \otimes I$ pour $I(X)$, $X \otimes \partial I$ pour $X \amalg X$, *etc.*

Définition 1.2.5. Une *donnée homotopique élémentaire* sur un topos $\mathcal{E}$ est un cylindre fonctoriel $\mathcal{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ vérifiant les axiomes suivants.

DH1 Le foncteur I commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes.

DH2 Pour tout monomorphisme $j : K \longrightarrow L$ de $\mathcal{E}$, les carrés ci-dessous sont cartésiens $(e = 0, 1)$:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "1_K\otimes\partial^e"'] & L \arrow[d, "1_L\otimes\partial^e"] \\ K\otimes I \arrow[r, "j\otimes 1_I"'] & L\otimes I \end{tikzcd} \quad .$$

Une *donnée homotopique* sur $\mathcal{E}$ est un couple $(\mathcal{I}, S)$ où $\mathcal{I}$ est une donnée homotopique élémentaire, et où S est un petit ensemble de monomorphismes de $\mathcal{E}$.

Exemple 1.2.6. Un *segment* dans un topos $\mathcal{E}$ est un triplet $(I, \partial^0, \partial^1)$, où I est un objet de $\mathcal{E}$, et où ∂^e, $e = 0, 1$, sont des sections globales de I. On dira qu'un tel segment est *séparant* si la flèche

$$(\partial^0, \partial^1) : * \amalg * \longrightarrow I$$

est un monomorphisme. Il est évident que tout segment séparant définit canoniquement une donnée homotopique élémentaire.

Exemple 1.2.7. Comme dans le cas des préfaisceaux, tout topos admet un objet de Lawvere, *i.e.* un objet qui classifie les sous-objets des objets de $\mathcal{E}$. Plus précisément, si $\mathcal{E}$ est un topos, le foncteur

$$\mathbb{L} : \mathcal{E}^\circ \longrightarrow \mathcal{E}ns \quad , \quad X \longmapsto \{ \text{ sous-objets de } X \ \}$$

est représentable (cf. [**47**, III.7, prop. 3]). On appellera un *objet de Lawvere de* $\mathcal{E}$ (et même, par abus de language, l'objet de Lawvere de $\mathcal{E}$), et on notera $L_{\mathcal{E}}$ ou L, un représentant de $\mathbb{L}$. On vérifie immédiatement qu'un tel objet est nécessairement injectif (cf. [**47**, IV.10, prop. 1]), ce qui va nous permettre d'en faire un outil privilégié (car canonique) pour définir des données homotopiques dans $\mathcal{E}$. D'autre part, L est canoniquement munit d'une structure de segment séparant. En effet, il existe un unique morphisme $\lambda^0 : * \longrightarrow L$ ($*$ désignant l'objet final de $\mathcal{E}$) tel que pour tout objet X de $\mathcal{E}$, la bijection canonique

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(X, L) \xrightarrow{\sim} \{ \text{ sous-objets de } X \ \}$$

soit définie par l'application

$$X \longrightarrow L \longmapsto u^{-1}(\lambda^0(*)) = X \times_L * \ .$$

Par conséquent, le sous-objet vide de $*$ correspond à un unique morphisme $\lambda^1 : * \longrightarrow L$ tel que le carré suivant soit cartésien dans $\mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d, "\lambda^0"] \\ * \arrow[r, "\lambda^1"'] & L \end{tikzcd}$$

On en déduit aussitôt que le triplet $(L, \lambda^0, \lambda^1)$ est un segment séparant de $\mathcal{E}$, appelé le *segment de Lawvere* de $\mathcal{E}$. Ce dernier définit ainsi la *donnée homotopique de Lawvere* de $\mathcal{E}$, notée $\mathcal{L}$.

1.2.8. Une fois la notion de donnée homotopique définie, on peut définir celles d'*homotopie* et d'*équivalence d'homotopie* (cf. [**15**, définition 2.2]). Si $\mathcal{E}$ est un topos muni d'une donnée homotopique $\mathcal{I}$, on note $h_{\mathcal{I}}(\mathcal{E})$ la catégorie $\mathcal{E}$ quotientée par la relation d'équivalence engendrée par la relation de $\mathcal{I}$-homotopie.

Si $(\mathcal{I}, S)$ est une donnée homotopique sur un topos $\mathcal{E}$, on peut définir un petit ensemble $\Lambda_{\mathcal{I}}(\mathcal{M}, S)$ de monomorphismes de $\mathcal{E}$ (cf. [**15**, 2.11]), et on définit alors les *extensions anodines* comme les flèches obtenues comme un composé transifini d'images directes d'éléments de $\Lambda_{\mathcal{I}}(\mathcal{M}, S)$. La classe des extensions anonines peut en fait être définie comme la plus petite classe de flèches de $\mathcal{E}$ stable par images directes, compositions transfinies et rétractes, contenant S et les morphismes de la forme

$$X \otimes I \cup Y \otimes \{e\} \longrightarrow Y \otimes I \quad , \qquad e = 0, 1 \ ,$$

pour tout monomorphisme $X \longrightarrow Y$, telle que pour toute extension anodine $X \longrightarrow Y$, le morphisme

$$X \otimes I \cup Y \otimes \partial I \longrightarrow Y \otimes I$$

soit encore une extension anodine. Enfin, les *fibrations naïves* sont les morphismes vérifiant la propriété de relèvement à droite relativement aux extensions anodines (voir [**15**, 2.12]). Un faisceau X est dit *naïvement fibrant* si le morphisme de X vers l'objet final de $\mathcal{E}$ est une fibration naïve. On peut alors définir les *équivalences faibles associées à* $(\mathcal{I}, S)$: ce sont les flèches $f : K \longrightarrow L$ de $\mathcal{E}$ telles que pour tout objet naïvement fibrant X dans $\mathcal{E}$, l'application

$$f^* : \mathsf{Hom}_{h_{\mathcal{I}}(\mathcal{E})}(L, X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{h_{\mathcal{I}}(\mathcal{E})}(K, X)$$

soit bijective. On montre alors le théorème ci-dessous.

THÉORÈME 1.2.9. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, $(\mathcal{I}, S)$ une donnée homotopique sur $\mathcal{E}$. Alors $\mathcal{E}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles associées à $(\mathcal{I}, S)$. En outre, toute extension anodine est une cofibration triviale, et les objets fibrants sont exactement les objets naïvement fibrants.*

1.2.10. Par la suite, dans un topos $\mathcal{E}$, on désignera les monomorphismes de $\mathcal{E}$ comme des *cofibrations*, et on appellera *fibrations triviales* les morphismes de $\mathcal{E}$ qui vérifient la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations.

Si $\mathcal{W}$ désigne un ensemble de flèches de $\mathcal{E}$, on appellera *$\mathcal{W}$-équivalences* les éléments de $\mathcal{W}$, et *$\mathcal{W}$-cofibrations triviales* les cofibrations qui sont aussi des $\mathcal{W}$-équivalences. Si X est un objet de $\mathcal{E}$, on appellera *$\mathcal{W}$-cylindre* un cylindre

$$(IX, \partial^0_X, \partial^1_X, \sigma_X)$$

de X tel que σ_X soit une $\mathcal{W}$-équivalence.

DÉFINITION 1.2.11. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un *$\mathcal{E}$-localisateur*[1] est un ensemble $\mathcal{W}$ de flèches de $\mathcal{E}$ satisfaisant les axiomes de stabilité suivants.

- L1 Si dans un triangle commutatif de $\mathcal{E}$, deux flèches sont des $\mathcal{W}$-équivalences, alors il en est de même de la troisième.
- L2 Toutes les fibrations triviales sont des $\mathcal{W}$-équivalences.
- L3 Les $\mathcal{W}$-cofibrations triviales sont stables par par images directes et par compositions transfinies.

Si S est une partie de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{E}$, le *$\mathcal{E}$-localisateur engendré par S* est l'intersection de tous les $\mathcal{E}$-localisateurs contenant S. Il est noté $\mathcal{W}(S)$. Un $\mathcal{E}$-localisateur $\mathcal{W}$ est *accessible* s'il existe un petit ensemble S de flèches de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{W} = \mathcal{W}(S)$. Le *$\mathcal{E}$-localisateur minimal* est le $\mathcal{E}$-localisateur engendré par l'ensemble vide.

LEMME 1.2.12. *Soient $\mathcal{E}$ un topos et $\mathcal{W}$ un partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{E}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Toutes les fibrations triviales sont des $\mathcal{W}$-équivalences.*

(ii) *Pour tout objet X de $\mathcal{E}$, la projection $X \times L_{\mathcal{E}} \longrightarrow X$ est une $\mathcal{W}$-équivalence ($L_{\mathcal{E}}$ désignant l'objet de Lawvere de $\mathcal{E}$).*

(iii) *Tout objet de $\mathcal{E}$ admet un $\mathcal{W}$-cylindre.*

COROLLAIRE 1.2.13. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, et $\mathcal{W}$ une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{E}$, telle que les $\mathcal{W}$-cofibrations triviales soient stables par images directes et par compositions transfinies. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'ensemble $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{E}$-localisateur.*

(ii) *Pour tout objet X de $\mathcal{E}$, la projection $X \times L_{\mathcal{E}} \longrightarrow X$ est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

(iii) *Tout objet de $\mathcal{E}$ admet un $\mathcal{W}$-cylindre.*

[1] Si A est une petite catégorie, conformément à la terminologie de [**13**], on parlera parfois de A-localisateur au lieu de $\widehat{A}$-localisateur.

PROPOSITION 1.2.14. *Soit $\mathcal{E}$ un topos muni d'une donnée homotopique $(\mathcal{I}, S)$. On choisit un modèle cellulaire $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}$, et on note $\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$ le petit ensemble d'extensons anodines associé. Alors les équivalences faibles associées à $(\mathcal{I}, S)$ sont exactement les éléments du $\mathcal{E}$-localisateur engendré par $\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$.*

THÉORÈME 1.2.15. *Soit $\mathcal{E}$ un topos, et $\mathcal{W}$ une partie de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{E}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Si on note Cof l'ensemble des monomorphismes de $\mathcal{E}$, et $\mathsf{Fib} = r(\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W})$, alors $(\mathcal{E}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ est une catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant.*

(b) *L'ensemble $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{E}$-localisateur accessible.*

En particulier, $\mathcal{E}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments du $\mathcal{E}$-localisateur minimal.

COROLLAIRE 1.2.16. *Pour tout topos $\mathcal{E}$, tout $\mathcal{E}$-localisateur est fortement saturé. En particulier, tout $\mathcal{E}$-localisateur est stable par rétractes.*

LEMME 1.2.17. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, et $\mathcal{W}$ un $\mathcal{E}$-localisateur.*

(a) *On considère un diagramme commutatif dans $\mathcal{E}$*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[d, "f_1"'] & A_0 \arrow[l, "\alpha_1"'] \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_0"] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\ B_1 & B_0 \arrow[l, "\beta_1"] \arrow[r, "\beta_2"'] & B_2 \end{tikzcd} \quad ,$$

dans lequel α_1 et β_1 sont des monomorphismes, et f_0, f_1, f_2 sont des $\mathcal{W}$-équivalences. Alors la flèche canonique $A_1 \amalg_{A_0} A_2 \longrightarrow B_1 \amalg_{B_0} B_2$ est une $\mathcal{W}$-équivalence.

(b) *On se donne un petit ensemble bien ordonné λ, deux foncteurs $X, Y : \lambda \longrightarrow \widehat{A}$, et un morphisme de foncteurs $\phi : X \longrightarrow Y$. On suppose en outre que pour tout élément μ de λ, les flèches naturelles $\varinjlim_{\nu<\mu} X(\nu) \longrightarrow X(\mu)$ et $\varinjlim_{\nu<\mu} Y(\nu) \longrightarrow Y(\mu)$ sont des monomorphismes, $\phi(\mu) : X(\mu) \longrightarrow Y(\mu)$ étant une $\mathcal{W}$-équivalence. Alors $\varinjlim \phi : \varinjlim X \longrightarrow \varinjlim Y$ est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

(c) *Les $\mathcal{W}$-équivalences sont stables par petites sommes.*

PROPOSITION 1.2.18. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux topos, $F, G : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ deux foncteurs qui commutent aux petites limites inductives et qui respectent les monomorphismes. Alors pour tout morphisme de foncteurs α de F vers G, le plus petit $\mathcal{F}$-localisateur $\mathcal{W}$ tel que pour tout faisceau X sur $\mathcal{E}$, le morphisme $\alpha_X : FX \longrightarrow GX$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence, est accessible. Plus précisément, si $\mathcal{M}$ est un modèle cellulaire de $\mathcal{E}$, $\mathcal{W}$ est engendré par l'ensemble*

$$S = \{ \quad \alpha_T \quad | \quad X \longrightarrow Y \in \mathcal{M}, \quad T \in \{X, Y\} \quad \} \, .$$

COROLLAIRE 1.2.19. *Soit $\mathcal{E}$ un topos.*

(a) *Si S est un ensemble de flèches de $\mathcal{E}$, on note* $\mathsf{cart}(S)$ *l'ensemble des flèches de la forme*

$$s \times 1_Z : X \times Z \longrightarrow Y \times Z \quad , \quad s \in S \ , \ Z \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{E} \ .$$

Alors le plus petit $\mathcal{E}$-localisateur contenant $\mathsf{cart}(S)$ *est stable par produits finis. Si en outre S est un petit ensemble, il est aussi accessible.*

(b) *Si $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$ sont deux $\mathcal{E}$-localisateurs stables par produits finis, alors le $\mathcal{E}$-localisateur engendré par ceux-ci est stable par produits finis.*

(c) *Le $\mathcal{E}$-localisateur minimal est stable par produits finis.*

Proposition 1.2.20. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux topos, $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un foncteur, et $\mathcal{W}$ un $\mathcal{F}$-localisateur accessible. On suppose que les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(a) *Le foncteur ϕ commute aux petites limites inductives.*

(b) *Le foncteur ϕ respecte les monomorphismes, et pour toute paire d'inclusions $J \longrightarrow L$, $K \longrightarrow L$, la flèche canonique $\phi(J \cap K) \longrightarrow \phi(J) \cap \phi(K)$ est un isomorphisme.*

(c) *Il existe un cylindre fonctoriel $\mathcal{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ tel que pour tout faisceau X sur $\mathcal{E}$, le morphisme $\phi(X \otimes I) \longrightarrow \phi(X)$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence.*

Alors $\phi^{-1}\mathcal{W}$ est un $\mathcal{E}$-localisateur accessible.

Corollaire 1.2.21. *Soient $\mathcal{E}$ un topos et $\mathcal{W}$ un $\mathcal{E}$-localisateur accessible. Alors la structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathcal{E}$ associée à $\mathcal{W}$ par le théorème* 1.2.15 *est exponentielle*[2].

Corollaire 1.2.22. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. Toute intersection d'une petite famille de $\mathcal{E}$-localisateurs accessibles est accessible.*

Proposition 1.2.23. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. Il existe un cardinal α_0 tel que pour tout cardinal $\alpha \geq \alpha_0$, tout $\mathcal{E}$-localisateur soit stable par les limites inductives indexées par des ensembles ordonnés α-filtrants.*

Définition 1.2.24. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un $\mathcal{E}$-localisateur *propre* est un $\mathcal{E}$-localisateur accessible $\mathcal{W}$, tel que la structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathcal{E}$, dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$, soit propre.

Théorème 1.2.25. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, et S un ensemble de flèches de $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{W}$ le $\mathcal{E}$-localisateur engendré par S, et on suppose que celui-ci est accessible. Alors $\mathcal{W}$ est propre si et seulement si pour tout élément $f : X \longrightarrow Y$ de S, pour toute fibration de but fibrant $p : E \longrightarrow B$, et pour toute flèche $u : Y \longrightarrow B$, le morphisme $g : X \times_B E \longrightarrow Y \times_B E$, image réciproque de f par p, est une $\mathcal{W}$-équivalence. En particulier, le $\mathcal{E}$-localisateur minimal est propre.*

---

[2]La notion de catégorie de modèles fermée exponentielle est définie dans [**13**, chapitre 4]. Cela signifie que pour toute petite catégorie I, la catégorie des foncteurs définis sur I et à valeurs dans $\mathcal{E}$ admet deux structures de catégorie de modèles fermée (ici, à engendrement cofibrant) dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles de $\mathcal{E}$ argument par argument : l'une dont les fibrations sont les fibrations de $\mathcal{E}$ argument par argument, et l'autre dont les cofibrations sont les cofibrations de $\mathcal{E}$ argument par argument, *i.e.* les monomorphismes.

Corollaire 1.2.26. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. On considère un petit ensemble I, et une famille $\mathcal{W}_i$, $i \in I$ de $\mathcal{E}$-localisateurs propres. Alors le $\mathcal{E}$-localisateur engendré par les $\mathcal{W}_i$ est propre.*

Corollaire 1.2.27. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, et X_i, $i \in I$, une famille de faisceaux sur $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{W}$ le plus petit $\mathcal{E}$-localisateur contenant les projections $X_i \times Z \longrightarrow Z$ pour tout $i \in I$ et pour tout Z. Si $\mathcal{W}$ est accessible (pour cela, il suffit que I soit un petit ensemble), alors $\mathcal{W}$ est propre.*

CHAPITRE 2

Combinatoire locale

1. Points faibles des topos

DÉFINITION 2.1.1. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un *point faible de* $\mathcal{E}$ est un foncteur

$$p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}ns \ ,$$

exact à gauche (*i.e.* qui commute aux limites projectives finies) et respectant les épimorphismes.

LEMME 2.1.2. *Soient $\mathcal{E}$ un topos et p un point faible de $\mathcal{E}$. Pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{E}$, on a une bijection canonique*

$$\operatorname{Im} p(f) \simeq p(\operatorname{Im} f) \ .$$

DÉMONSTRATION. Le faisceau $\operatorname{Im} f$ est défini par l'existence d'une factorisation unique à isomorphisme canonique près de la forme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\ & \operatorname{Im} f \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd} \quad ,$$

où q est un épimorphisme, et j un monomorphisme. Le foncteur p induit donc un triangle commutatif d'ensembles

$$\begin{tikzcd} pX \arrow[rr, "pf"] \arrow[dr, "pq"'] & & pY \\ & p \operatorname{Im} f \arrow[ur, "pj"'] & \end{tikzcd} \quad ,$$

dans lequel pq est une surjection, et pj une injection. L'unicité d'une telle factorisation dans la catégorie des ensembles implique donc l'assertion. $\square$

LEMME 2.1.3. *Soient $\mathcal{E}$ un topos et p un point faible de $\mathcal{E}$. On considère un faisceau X sur $\mathcal{E}$, ainsi qu'une relation d'équivalence R sur X. Alors $p(R)$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $p(X)$, et on a une bijection canonique*

$$p(X)/p(R) \simeq p(X/R) \ .$$

Démonstration. Soit $q : X \longrightarrow X/R$ le morphisme canonique. On forme le carré cartésien ci-dessous dans $\mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "q"'] & X/R \end{tikzcd}$$

L'image du morphisme $(\pi_1, \pi_2) : Y \longrightarrow X \times X$ n'est autre que la relation R. En appliquant le foncteur p, on obtient ainsi un carré cartésien d'ensembles

$$\begin{tikzcd} p(Y) \arrow[r, "p(\pi_2)"] \arrow[d, "p(\pi_1)"'] & p(X) \arrow[d, "p(q)"] \\ p(X) \arrow[r, "p(q)"'] & p(X/R) \end{tikzcd} \quad ,$$

dont toutes les flèches sont des applications surjectives. Si R' désigne la relation d'équivalence sur $p(X)$ définie par $p(q)$, on a en vertu du lemme précédent les identifications suivantes :

$$\begin{aligned} R' &\simeq \operatorname{Im}(p(\pi_1), p(\pi_2)) \\ &\simeq \operatorname{Im} p(\pi_1, \pi_2) \\ &\simeq p(\operatorname{Im}(\pi_1, \pi_2)) \\ &\simeq p(R) \ . \end{aligned}$$

Comme $p(q)$ est une surjection, on a une bijection canonique $p(X)/R' \simeq p(X/R)$, ce qui achève la démonstration. □

Lemme 2.1.4. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. On considère deux faisceaux X et Y, ainsi que deux flèches u et v de X vers Y. Si l'image du morphisme*

$$(u, v) : X \longrightarrow Y \times Y$$

est une relation d'équivalence sur Y, alors pour tout point faible p de $\mathcal{E}$, l'application canonique

$$\operatorname{coker}(p(u), p(v)) \longrightarrow p(\operatorname{coker}(u, v))$$

est bijective.

Démonstration. Cela résulte aussitôt des lemmes 2.1.2 et 2.1.3. □

Définition 2.1.5. Soit C une catégorie, et soient $p_i : C \longrightarrow D_i$, $i \in I$, une famille de foncteurs de source C. On dit que la famille $(p_i)_i$ est *conservative* (resp. *teste les épimorphismes*, resp. *teste les monomorphismes*) si toute flèche f de C telle que pour tout $i \in I$, $p_i(f)$ soit un isomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un monomorphisme) est un isomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un monomorphisme). La famille $(p_i)_i$ est dite *fidèle* si le foncteur induit $C \longrightarrow \prod_i D_i$ est fidèle.

Exemple 2.1.6. Si $\mathcal{E}$ est un topos ayant suffisamment de points, la famille des foncteurs fibres de $\mathcal{E}$ est conservative.

PROPOSITION 2.1.7. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, et $p_i : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}ns$, $i \in I$, une famille de points faibles de $\mathcal{E}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La famille de foncteurs $(p_i)_i$ est conservative.*

(ii) *La famille de foncteurs $(p_i)_i$ teste les épimorphismes.*

(iii) *La famille de foncteurs $(p_i)_i$ est fidèle.*

En outre, si c'est le cas, la famille de foncteurs $(p_i)_i$ teste les monomorphismes.

DÉMONSTRATION. (i) $\Rightarrow$ (ii). Un morphisme de faisceaux $f : X \longrightarrow Y$ est un épimorphisme si et seulement si la flèche canonique $\operatorname{Im} f \longrightarrow Y$ est un isomorphisme. Cette implication est donc conséquence du lemme 2.1.2.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soient X et Y deux faisceaux, et u, v, deux flèches de X vers Y. Comme la flèche $\ker(u,v) \longrightarrow X$ est un monomorphisme, $u = v$ si et seulement si celle-ci est un épimorphisme. Cette implication résulte donc de l'exactitude à gauche des points faibles.

(iii) $\Rightarrow$ (i). La fidélité de la famille $(p_i)_i$ implique qu'un morphisme de faisceaux induit des bijections pour tout $i \in I$ si et seulement s'il est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.

Pour montrer la dernière assertion, il suffit de constater qu'une flèche $X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{E}$ est un monomorphisme si et seulement si la diagonale $X \longrightarrow X \times_Y X$ est un isomorphisme. $\square$

2.1.8. On fixe à présent un petit site (C, J). On note

$$a : \widehat{C} \longrightarrow \widetilde{C}$$

le foncteur faisceau associé, et

$$i : \widetilde{C} \longrightarrow \widehat{C}$$

son adjoint à droite, le foncteur d'oubli.

Si X est un préfaisceau sur C, et R un crible couvrant de X, on note

$$\Phi_X(R) = \coprod_{v \longrightarrow R\ ,\ v \in \mathsf{Ob}\, C} v \ \in \mathsf{Ob}\, \widehat{C}\ .$$

On a alors un morphisme de préfaisceaux canonique

$$q_R^X : \Phi_X(R) \longrightarrow X\ ,$$

lequel s'avère être couvrant (pour la topologie J) par construction. Si R' est second crible couvrant de X, tel que $R \subset R'$, on obtient un morphisme canonique au-dessus de X,

$$\Phi_X(R) \longrightarrow \Phi_X(R')\ .$$

On désigne par $J(X)$ l'ensemble des cribles couvrants de X, ordonné par l'inclusion. On a ainsi défini un foncteur

$$\Phi_X : J(X) \longrightarrow \widehat{C}\ ,$$

et partant, un foncteur

$$a\Phi_X : J(X) \longrightarrow \widetilde{C} \quad , \qquad R \longmapsto a\Phi_X(R)\ .$$

La catégorie opposée $J(X)^\circ$ étant filtrante, Φ_X est un pro-objet de $\widehat{C}$, et $a\Phi_X$, un pro-objet de $\widetilde{C}$.

Proposition 2.1.9. *Soit $p : X \longrightarrow Y$ un morphisme de préfaisceaux sur C. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La flèche $a(p)$ est un épimorphisme de faisceaux.*

(ii) *Pour tout objet U de C, tout crible couvrant R de U, et tout morphisme de préfaisceaux*
$$\tau : \Phi_U(R) \longrightarrow Y \ ,$$
il existe un crible couvrant $R' \subset R$ de U, et un morphisme
$$\sigma : \Phi_U(R') \longrightarrow X \ ,$$
tels que le carré ci-dessous commute dans $\widehat{C}$.
$$\begin{tikzcd} \Phi_U(R') \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ \Phi_U(R) \arrow[r, "\tau"'] & Y \end{tikzcd}$$

(iii) *Pour tout objet U de C, et toute section τ de Y au-dessus de U, il existe un crible couvrant R de U, ainsi qu'un morphisme*
$$\sigma : \Phi_U(R) \longrightarrow X \ ,$$
tels que le carré ci-dessous commute dans $\widehat{C}$.
$$\begin{tikzcd} \Phi_U(R) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "q_R^U"'] & X \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, "\tau"'] & Y \end{tikzcd}$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que $a(p)$ soit un épimorphisme, et considérons un morphisme $\sigma : \Phi_U(R) \longrightarrow Y$ comme dans l'énoncé (ii). Le morphisme p admet une factorisation de la forme
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & \operatorname{Im} p \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd} \qquad ,$$
π étant un épimorphisme, et j un monomorphisme. Le foncteur a étant exact, j est un morphisme bicouvrant (*i.e.* $a(j)$ est un isomorphisme), car $a(p)$ est un épimorphisme. Pour chaque $V \in \mathsf{Ob}\, C$, et chaque section s de R au-dessus de V, la flèche $\sigma : \Phi_U(R) \longrightarrow Y$, composée avec l'inclusion canonique $V \longrightarrow \Phi_U(R)$ induit une flèche
$$\sigma_s : V \longrightarrow Y \ .$$
On forme alors le carré cartésien suivant.
$$\begin{tikzcd} R_{V,s} \arrow[r] \arrow[d, "j_{V,s}"'] & \operatorname{Im} p \arrow[d, "j"] \\ V \arrow[r, "\sigma_s"'] & Y \end{tikzcd}$$

Le morphisme $j_{V,s}$ est un monomorphisme bicouvrant (grâce à l'exactitude de a), et donc $R_{V,s}$ est un crible couvrant de V. Soit R' le crible de U engendré par l'image de tous les cribles $R_{V,s}$. Alors R' est couvrant pour la topologie J, et par construction, il existe un carré commutatif de la forme ci-dessous dans $\widehat{C}$.

$$\begin{tikzcd} \Phi_U(R') \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d] & \operatorname{Im} p \arrow[d, "j"] \\ \Phi_U(R) \arrow[r, "\sigma"'] & Y \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\pi : X \longrightarrow \operatorname{Im} p$ étant un épimorphisme, il existe une flèche $\tau : \Phi_U(R') \longrightarrow X$ telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} \Phi_U(R') \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\sigma'"'] & & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & \operatorname{Im} p & \end{tikzcd}$$

Cela implique que τ rend le carré voulu commutatif.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Pour montrer cette implication, il suffit de constater que U est un crible couvrant de U, et que toute section $U \longrightarrow Y$ définit par composition avec le morphisme $q_U^U : \Phi_U(U) \longrightarrow U$, un morphisme $\Phi_U(U) \longrightarrow Y$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons la condition (iii) vérifiée. Pour chaque objet U de C, et chaque section $\tau : U \longrightarrow Y$, on choisit un crible couvrant $R_{U,\tau}$, ainsi qu'un morphisme

$$\sigma_{U,\tau} : \Phi_U(R_{U,\tau}) \longrightarrow X \ ,$$

tels que $p\,\sigma_{U,\tau} = \tau\, q^U_{R_{U,\tau}}$. On obtient ainsi un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \amalg_{\tau : U \longrightarrow Y} \Phi_U(R_{U,\tau}) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ \amalg_{\tau : U \longrightarrow Y} U \arrow[r, "t"'] & Y \end{tikzcd} ,$$

dans lequel les morphismes q et t sont couvrants (la flèche t est même un épimorphisme). Cela implique que p est couvrant, *i.e.* que $a(p)$ est un épimorphisme. □

2.1.10. Pour chaque objet U de C, on définit un foncteur

$$p_U : \widetilde{C} \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

par la formule

$$\begin{aligned} p_U(X) &= \big(\text{“}\varprojlim\text{”}\, a\Phi_U\big)(X) \\ &= \varinjlim \mathsf{Hom}_{\widehat{C}}(a\Phi_U, X) \\ &\simeq \varinjlim_{R \in J(U)^\circ} \mathsf{Hom}_{\widehat{C}}(\Phi_U(R), i(X)) \ . \end{aligned}$$

LEMME 2.1.11. *Pour tout objet U de C, le foncteur p_U est exact à gauche.*

DÉMONSTRATION. Le foncteur p_U est pro-représentable par construction, ce qui implique aussitôt l'assertion (les limites inductives filtrantes d'ensembles sont exactes). □

THÉORÈME 2.1.12. *L'ensemble des foncteurs du type*

$$p_U : \widetilde{C} \longrightarrow \mathcal{E}ns \quad , \qquad U \in \mathsf{Ob}\, C$$

forme une petite famille conservative de points faibles du topos des faisceaux sur le site (C, J).

DÉMONSTRATION. Cette famille est constituée de foncteurs exacts à gauche en vertu du lemme précédent. D'autre part, il résulte de la proposition 2.1.9 et de la construction même des foncteurs p_U que cette famille teste les épimorphismes. En particulier, on a bien défini de la sorte des points faibles de $\widetilde{C}$. L'assertion résulte enfin de la proposition 2.1.7. $\square$

COROLLAIRE 2.1.13. *Tout topos admet assez de points faibles (*i.e.*, la famille des points faibles d'un topos est conservative).*

COROLLAIRE 2.1.14. *Soient* $\mathcal{E}$ *un topos et* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme de* $\mathcal{E}$. *Pour que* f *soit un épimorphisme, il faut et il suffit que pour tout point faible* p *de* $\mathcal{E}$, $p(f)$ *soit une surjection.*

SCHOLIE 2.1.15. Le corollaire 2.1.13 est une conséquence de l'existence d'une localisation booléenne pour tout topos de Grothendieck [**47**, § IX.9, théorème 2]. Ce résultat établit en effet l'existence pour tout topos $\mathcal{E}$ d'un épimorphisme de topos

$$q : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{E}$$

(*i.e.* d'un morphisme de topos q tel que le foncteur image inverse q^* soit conservatif), dont la source est un topos booléen satisfaisant l'axiome du choix. Cela signifie en particulier que tout épimorphisme de $\mathcal{B}$ admet une section, et implique immédiatement que tout objet B de $\mathcal{B}$ est un point faible de $\mathcal{B}$ (*i.e.* que le foncteur $X \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(B, X)$ respecte les épimorphismes). Le foncteur q^* étant conservatif, on en déduit que la famille de points faibles

$$q_B : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}ns \quad , \qquad X \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(B, q^*X) \quad , \qquad B \in \mathsf{Ob}\, \mathcal{B}$$

est conservative (il suffit en fait de ne considérer que les éléments d'une famille génératrice de $\mathcal{B}$). Un exercice facile consiste à montrer qu'un topos $\mathcal{E}$ satisfait l'axiome du choix si et seulement si tous ses objets sont des points faibles. Le lecteur ferru de logique pourra compléter cette question par [**47**, Chap. VI, exercices 15 et 16], où il apprendra (peut-être) que tout topos satisfaisant l'axiome du choix est booléen.

LEMME 2.1.16. *Soient* $\mathcal{E}$ *un topos,* X *un faisceau sur* $\mathcal{E}$, *et* $R \subset X \times X$ *une relation sur* X. *Pour que* R *soit une relation d'équivalence sur* X, *il faut et il suffit que pour tout point faible* p *de* $\mathcal{E}$, $p(R)$ *soit une relation d'équivalence sur* $p(X)$.

DÉMONSTRATION. L'exactitude à gauche des points faibles montre que cette condition est nécessaire. Supposons que l'image de R par tout point faible soit une relation d'équivalence. On note i le morphisme d'inclusion de R dans le produit

$X \times X$. On forme le carré cartésien suivant dans $\mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd} X \times_{X\times X} R \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[d, "i"] \\ X \arrow[r, "(1_X,1_X)"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

La flèche verticale de gauche induit un isomorphisme pour tout point faible p (car $p(R)$ est une relation réflexive), ce qui montre que R est réflexive. Soit T l'automorphisme d'échange des facteurs de $X \times X$. On forme le carré cartésien ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} R \times_{X\times X} R \arrow[rr] \arrow[d] & & R \arrow[d, "i"] \\ R \arrow[r, "i"'] & X \times X \arrow[r, "T"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

Comme c'est le cas pour tout point faible, la flèche verticale de gauche est un isomorphisme, ce qui prouve que R est symétrique. En écrivant $X \times X \times X \simeq (X \times X) \times_X (X \times X)$, l'inclusion i définit un morphisme

$$j = (i, i) : R \times_X R \longrightarrow X \times X \times X \ .$$

Si $q : X \times X \times X \longrightarrow X \times X$ désigne la projection consistant à oublier le second facteur, on obtient un morphisme

$$\varphi = qj : R \times_X R \longrightarrow X \times X \ .$$

Comme R est une relation réflexive, on vérifie aussitôt que $R \subset \operatorname{Im}\varphi$. La relation R est transitive si et seulement si cette inclusion est un épimorphisme, ce qui est vérifié pour tout point faible. □

Proposition 2.1.17. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, X et Y deux faisceaux, et u, v, deux morphismes de X vers Y. On suppose que pour tout point faible p de $\mathcal{E}$, l'image de l'application $(p(u), p(v)) : p(X) \longrightarrow p(Y) \times p(Y)$ est une relation d'équivalence sur $p(Y)$. Alors l'image du morphisme $(u, v) : X \longrightarrow Y \times Y$ est une relation d'équivalence sur Y, et pour tout point faible p de $\mathcal{E}$, l'application canonique*

$$\operatorname{coker}(p(u), p(v)) \longrightarrow p(\operatorname{coker}(u, v))$$

est bijective.

Démonstration. Cela résulte immédiatement des lemmes 2.1.2, 2.1.3 et 2.1.16. □

2. Relèvement local

Notations 2.2.1. Soit $\mathcal{E}$ un topos. On désigne par $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{E}}$ le Hom interne de $\mathcal{E}$. Si X, Y et Z sont trois faisceaux sur $\mathcal{E}$, on a donc une bijection naturelle

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(X \times Y, Z) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{E}}(Y, Z)) \ .$$

On rappelle que $\mathbf{s}\mathcal{E}$ désigne le topos des faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{E}$. Le morphisme de topos

$$p_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{P}$$

de $\mathcal{E}$ vers le topos ponctuel (*i.e.* $\mathcal{P}$ est équivalent à la catégorie $\mathcal{E}ns$ des ensembles) induit naturellement un morphisme de topos

$$p_{\mathcal{E}} : \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \widehat{\Delta} \simeq \mathbf{s}\mathcal{P} \ .$$

Le foncteur image inverse

$$p_{\mathcal{E}}^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}$$

est défini par la formule $(p_{\mathcal{E}}^* X)_n = \amalg_{X_n} *$ (où $*$ est le faisceau final sur $\mathcal{E}$), pour $n \geq 0$. Si X est un ensemble simplicial, on notera parfois par abus encore X le faisceau $p_{\mathcal{E}}^* X$. Le foncteur image directe

$$p_{\mathcal{E}*} : \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \widehat{\Delta}$$

est le foncteur sections globales, et si X est un faisceau sur $\mathcal{E}$, on notera aussi

$$\Gamma(\mathcal{E}, X) = p_{\mathcal{E}*} X \ .$$

2.2.2. On fixe pour le moment un topos $\mathcal{E}$. Le foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}} : (\mathbf{s}\mathcal{E})^{\circ} \times \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E} \ ,$$

induit par l'évaluation en 0 un foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(?, ?)_0 : (\mathbf{s}\mathcal{E})^{\circ} \times \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \ .$$

On vérifie aussitôt que pour tout $n \geq 0$, et tout faisceau simplicial X, on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(\Delta_n, X)_0 \simeq X_n \ .$$

Il est d'autre part immédiat que pour tout ensemble simplicial K (resp. tout faisceau simplicial X), le foncteur

$$\mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \quad , \qquad X' \longmapsto \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(K, X')_0$$

$$(\text{resp. } (\widehat{\Delta})^{\circ} \longrightarrow \mathcal{E} \quad , \qquad K' \longmapsto \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(K', X)_0 \ )$$

commute aux petites limites projectives.

2.2.3. On rappelle qu'un ensemble simplicial K est de présentation finie s'il est 0-accessible, *i.e.* si le foncteur $\mathsf{Hom}_{\widehat{\Delta}}(K, ?)$ commute aux petites limites inductives filtrantes. Nous énonçons ci-dessous pour mémoire différentes caractérisation des ensembles simpliciaux de présentation finie.

PROPOSITION 2.2.4. *Soit K un ensemble simplicial. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'ensemble simplicial K est de présentation finie.*

(ii) *L'ensemble des simplexes non dégénérés de K est fini.*

(iii) *Il existe deux ensembles simpliciaux L et L', tous deux sommes finies de simplexes standard, et deux flèches u et v de L' vers L, tels que K s'identifie au conoyau de u et v.*

(iv) *Il existe une catégorie finie I, et un foncteur $F : I \longrightarrow \Delta$, tels que K soit isomorphe à la limite inductive de F dans $\widehat{\Delta}$.*

COROLLAIRE 2.2.5. *Les ensembles simpliciaux de présentation finie sont stables par limites inductives finies et par limites projectives finies.*

Proposition 2.2.6. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux topos, et $q : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ un foncteur exact à gauche. Pour tout faisceau simplicial X sur $\mathcal{E}$, et tout ensemble simplicial de présentation finie K, le morphisme canonique*

$$q\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K,X) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}'}(K,qX)$$

est un isomorphisme. En particulier, on a un isomorphisme canonique

$$q\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K,X)_0 \xrightarrow{\sim} \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}'}(K,qX)_0 \ .$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, l'ensemble simplicial $K \times \Delta_n$ est de présentation finie (2.2.5). L'identification

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K,X)_n \simeq \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K \times \Delta_n, X)_0$$

montre qu'il suffit de prouver la dernière assertion. Or en vertu de la proposition 2.2.4, il existe une catégorie finie I, et un foncteur $F : I \longrightarrow \Delta$, tels que $K \simeq \varinjlim F$ dans $\widehat{\Delta}$. On obtient de la sorte les isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} q\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K,X)_0 &\simeq q\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(\varinjlim F, X)_0 \\ &\simeq q \varinjlim \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(F,X)_0 \\ &\simeq \varinjlim q\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(F,X)_0 \\ &\simeq \varinjlim \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}'}(F,qX)_0 \\ &\simeq \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(\varinjlim F, qX)_0 \\ &\simeq q\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}'}(K,qX)_0 \ , \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 2.2.7. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. Pour tout point faible p de E, tout faisceau simplicial X sur $\mathcal{E}$, et tout ensemble simplicial de présentation finie K, on a un isomorphisme canonique*

$$p\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K,X) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}_{\widehat{\Delta}}(K,pX) \ .$$

En particulier, on a alors une bijection canonique

$$p\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K,X)_0 \simeq \mathsf{Hom}_{\widehat{\Delta}}(K,pX) \ .$$

2.2.8. On considère à présent un topos $\mathcal{E}$ fixé, ainsi qu'une *famille géométrique* S, c'est-à-dire une famille S de monomorphismes d'ensembles simpliciaux de présentation finie. Si $j : K \longrightarrow L$ est un élément de S, et $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme de faisceaux simpliciaux, on obtient un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L,X) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K,X) \arrow[d, "\varphi_*"] \\ \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L,Y) \arrow[r, "j^*"'] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K,Y) \end{tikzcd} \quad ,$$

ce qui définit une flèche

$$(\varphi_*, j^*) : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L,X) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L,Y) \times_{\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K,Y)} \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K,X) \ .$$

En évaluant en 0, on obtient ainsi un morphisme de faisceaux

$$(\varphi_*, j^*)_0 : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L,X)_0 \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L,Y)_0 \times_{\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K,Y)_0} \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K,X)_0 \ .$$

DÉFINITION 2.2.9. Un morphisme de faisceaux simpliciaux $\varphi : X \longrightarrow Y$ *vérifie la propriété de relèvement local à droite relativement à* S si pour tout élément j de S, le morphisme de faisceaux $(\varphi_*, j^*)_0$ est un épimorphisme.

EXEMPLE 2.2.10. Dans le cas où $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ est le topos ponctuel, un morphisme de $\mathbf{s}\mathcal{P} \simeq \widehat{\Delta}$ vérifie la propriété de relèvement local à droite relativement à S, si et seulement s'il vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à S.

NOTATIONS 2.2.11. On désigne par $r_{loc}(S)_{\mathcal{E}}$, ou encore, lorsque cela ne prête pas à confusion, $r_{loc}(S)$, la classe des morphismes de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ qui vérifient la propriété de relèvement local à droite relativement à S.

PROPOSITION 2.2.12. *Pour tout morphisme de topos $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$, on a l'inclusion*

$$f^* r_{loc}(S)_{\mathcal{F}} \subset r_{loc}(S)_{\mathcal{E}} \ .$$

DÉMONSTRATION. Le foncteur image inverse f^* étant exact à gauche, cela résulte de la définition de $r_{loc}(S)$ et de la proposition 2.2.6. □

LEMME 2.2.13. *Soit I une petite catégorie. On note $\mathcal{E}^I$ le topos des foncteurs de I dans $\mathcal{E}$. La classe $r_{loc}(S)_{\mathcal{E}^I}$ est formée des morphismes φ tels que pour tout objet i de I, le morphisme φ_i de faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{E}$ vérifie la propriété de relèvement local à droite relativement à S.*

DÉMONSTRATION. Un morphisme de $\mathcal{E}^I$ est un épimorphisme si et seulement si pour tout objet i de I, son évaluation en i est un épimorphisme dans $\mathcal{E}$. Les foncteurs d'évaluation étant en particulier exacts à gauche, l'assertion résulte donc de la proposition 2.2.6. □

PROPOSITION 2.2.14. *La classe $r_{loc}(S)$ est stable par petites limites inductives filtrantes.*

DÉMONSTRATION. Soit I une petite catégorie filtrante. Le foncteur

$$\varinjlim{}_I : \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E}$$

est exact à gauche et commute aux petites limites inductives. C'est donc l'image inverse d'un morphisme de topos de $\mathcal{E}$ vers $\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E})$. L'assertion résulte donc de la proposition 2.2.12 et du lemme ci-dessus. □

PROPOSITION 2.2.15. *Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme de faisceaux simpliciaux. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La flèche φ vérifie la propriété de relèvement local à droite relativement à S.*

(ii) *Pour tout point faible p de $\mathcal{E}$, le morphisme d'ensembles simpliciaux $p\varphi : pX \longrightarrow pY$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à S.*

(iii) *Pour tout faisceau U, tout élément j de S, et tout carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} U \times K \arrow[r, "a"] \arrow[d, "1_U \times j"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ U \times L \arrow[r, "b"'] & Y \end{tikzcd} \qquad ,$$

il existe un épimorphisme de faisceaux $\pi : U' \longrightarrow U$, ainsi qu'une flèche $\lambda : U' \times L \longrightarrow X$, tels que le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{tikzcd} U' \times K \arrow[r, "\pi \times 1_K"] \arrow[d, "1_{U'} \times j"'] & U \times K \arrow[r, "a"] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ U' \times L \arrow[r, "\pi \times 1_L"'] \arrow[urr, "\lambda"] & U \times L \arrow[r, "b"'] & Y \end{tikzcd}$$

Démonstration. L'équivalence entre les énoncés (i) et (ii) résulte des corollaires 2.1.13, 2.1.14 et 2.2.7, puisque dans la catégorie des ensembles simpliciaux, les notions de relèvement local à droite et de relèvement à droite coïncident (2.2.10). L'équivalence entre (i) et (iii) résulte de la proposition 2.1.9, une fois choisi un site adéquat pour $\mathcal{E}$. □

Corollaire 2.2.16. *Tout morphisme de faisceaux simpliciaux dont les restrictions à tout objet de $\mathcal{E}$ vérifient la propriété de relèvement à droite relativement à S vérifient la propriété de relèvement local à droite relativement à S.*

Démonstration. En effet, cela implique que la condition (iii) ci-dessus est satisfaite en prenant $U' = U$ et $\pi = 1_U$. □

Corollaire 2.2.17. *La classe $r_{loc}(S)$ est stable par composition, images réciproques, et rétractes. Elle est donc en particulier stable par produits finis, et elle contient les isomorphismes.*

Démonstration. Cela résulte aussitôt de la proposition 2.2.15, de l'exactitude à gauche des points faibles de $\mathcal{E}$, et des propriétés analogues de la classe des morphismes d'ensembles simpliciaux vérifiant la propriété de relèvement à droite relativement à S. □

2.2.18. On note $< S >$ la plus petite partie de $\mathsf{Fl}\,\widehat{\Delta}$ *saturée par opérations finies à gauche*, c'est-à-dire stable par composition, images directes, et rétractes dans la catégorie des ensembles simpliciaux de présentation finie (cf. 2.2.5). En particulier, $< S >$ est encore une famille géométrique. En outre, $< S >$ est stable par sommes finies, puisque toute somme finie peut être construite comme un composé fini d'images directes.

Proposition 2.2.19. *On a l'égalité $r_{loc}(S) = r_{loc}(< S >)$.*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence de la proposition 2.2.15 et de l'égalité $r(S) = r(< S >)$ dans la catégorie des ensembles simpliciaux. □

Lemme 2.2.20. *Soit K un ensemble simplicial de présentation finie. Alors le foncteur $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K, ?)_0$ commute aux petites limites inductives filtrantes. Si α est un cardinal s-adapté à $\mathcal{E}$ (*1.1.12*), et X un faisceau simplicial α-accessible sur $\mathcal{E}$, alors $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K, X)_0$ est un faisceau α-accessible sur $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Lorsque K est un simplexe standard, les deux assertions sont aussitôt vérifiées. Le cas général en résulte car en vertu de 2.2.4, K est une limite inductive finie de simplexes standard. □

2.2.21. On suppose à présent que S est une petite famille géométrique, et on fixe un cardinal α s-adapté à $\mathcal{E}$ tel que $|S| \leq \alpha$ (cette dernière condition est redondante lorsque S est dénombrable), ce qui est possible en vertu du lemme 1.1.13.

Si $q : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de faisceaux simpliciaux, et si X' est un sous-objet de X, on note qX' l'image de ce dernier par q dans Y. Le morphisme q restreint à X' induit alors un morphisme de faisceaux simpliciaux

$$q_{X'} : X' \longrightarrow qX' \ .$$

Pour chaque élément $j : K \longrightarrow L$ de S, on note

$$\Pi^q_j(X') = \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L, qX')_0 \times_{\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L,qX')_0} \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K, X')_0 \ .$$

On obtient de la sorte un morphisme de faisceaux (2.2.8) :

$$((q_{X'})_*, j^*)_0 : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L, X')_0 \longrightarrow \Pi^q_j(X') \ .$$

Lemme 2.2.22. *Soient $q : X \longrightarrow Y$ un morphisme de faisceaux simpliciaux vérifiant la propriété de relèvement local à droite relativement à S, et X' un sous-objet α-accessible de X. Alors il existe un sous-objet α-accessible X'' de X, contenant X', et pour chaque élément $j : K \longrightarrow L$ de S, un sous-objet T_j de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L, X'')_0$, ainsi qu'un épimorphisme*

$$p_j : T_j \longrightarrow \Pi^q_j(X') \ ,$$

tels que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L, X')_0 \arrow[r] \arrow[d, "((q_{X'})_*, j^*)_0"'] & T_j \arrow[r] \arrow[dl, "p_j"] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L, X'')_0 \arrow[d, "((q_{X''})_*, j^*)_0"] \\
\Pi^q_j(X') \arrow[rr] & & \Pi^q_j(X'')
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $j : K \longrightarrow L$ un élément de S fixé. On forme le carré cartésien suivant dans $\mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd}
Z_j \arrow[r, "u_j"] \arrow[d, "\pi_j"'] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L, X)_0 \arrow[d, "(q_*, j^*)"] \\
\Pi^q_j(X') \arrow[r, "v_j"'] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L, Y)_0 \times_{\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K,Y)_0} \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(K, X)_0
\end{tikzcd}$$

La flèche v_j étant un monomorphisme (en tant que limite projective de monomorphismes), il en est de même de u_j. Comme par hypothèse q vérifie la propriété de relèvement local à droite relativement à j, la flèche (q_*, j^*) est un épimorphisme, ce qui implique que π_j en est un aussi. D'autre part, il résulte du lemme 2.2.22 que le but de π_j est α-accessible. On a par ailleurs un monomorphisme canonique de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L, X')_0$ dans Z_j. Comme $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L, X')_0$ est en outre α-accessible (par une nouvelle application du lemme 2.2.22), il résulte du lemme 1.1.11 qu'il existe un sous-objet α-accessible T_j de Z_j, contenant $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(L, X')_0$, tel que la restriction p_j de π_j à T_j soit un épimorphisme. Vu que X est la réunion α-filtrante de ses sous-objets α-accessibles, le lemme 2.2.22 permet de montrer qu'il existe un sous-objet α-accessible X''_j de X, contenant X', tel que l'inclusion de T_j

dans $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(L,X)_0$ se factorise par $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(L,X''_j)_0$. On pose enfin $X'' = \cup_{j\in S} X''_j$. La seule difficulté apparente pour vérifier que X'' a toutes les propriétés requises consiste à montrer que celui-ci est α-accessible. Or on a supposé que α est s-adapté à $\mathcal{E}$, ce qui implique que les sous-objets α-accessibles de X sont stables par intersections et réunions finies. Il s'en suit que X'' est une réunion filtrante de sous-objets α-accessibles de X, indexée par un ensemble ordonné dont le cardinal est majoré par $\alpha|S| \leq \alpha$. On en déduit que X'' est α-accessible par [**13**, proposition 2.1.9]. □

PROPOSITION 2.2.23. *Soient $q : X \longrightarrow Y$ un morphisme de faisceaux simpliciaux vérifiant la propriété de relèvement local à droite relativement à S, et X' un sous-objet α-accessible de X. Alors il existe un sous-objet α-accessible X'' de X, contenant X', tel que le morphisme induit par q sur X'',*

$$q_{X''} : X'' \longrightarrow qX'' \ ,$$

vérifie encore la propriété de relèvement local à droite relativement à S. En outre, qX'' est un sous-objet α-accessible de Y.

DÉMONSTRATION. On pose $X''_0 = X'$. En itérant le lemme précédent, on construit une suite de sous-objets α-accessibles de X,

$$X''_0 \subset X''_1 \subset \ldots \subset X''_n \subset \ldots \ ,$$

et pour chaque élément $j : K \longrightarrow L$ de S, une suite de sous-objets $T_{j,n} \subset \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(L, X''_{n+1})_0$, ainsi que des épimorphismes

$$p_{j,n} : T_{j,n} \longrightarrow \Pi^q_j(X''_n) \ ,$$

tels que les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(L,X''_n)_0 \arrow[r] \arrow[d, "((q_{X''_n})_*, j^*)_0"'] & T_{j,n} \arrow[r] \arrow[dl, "p_{j,n}"] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(L,X''_{n+1})_0 \arrow[d, "((q_{X''_{n+1}})_*, j^*)_0"] \\
\Pi^q_j(X''_n) \arrow[rr] & & \Pi^q_j(X''_{n+1})
\end{tikzcd}$$

On pose $X'' = \cup_n X''_n$. On obtient alors en vertu des lemmes 2.2.20 et 2.2.22 les isomorphismes canoniques suivants.

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(L,X'')_0 \simeq \varinjlim_n \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(L,X''_n)_0 \simeq \varinjlim_n T_{j,n}$$

$$\Pi^q_j(X'') \simeq \varinjlim_n \Pi^q_j(X''_n)$$

Le morphisme canonique

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(L,X'')_0 \longrightarrow \Pi^q_j(X'')$$

est donc la limite inductive des épimorphismes $p_{j,n}$, et par suite, est lui même un épimorphisme. Il est ainsi établi que $q_{X''}$ vérifie la propriété de relèvement local à droite relativement à S. Le fait que X'' est α-accessible résulte immédiatement de [**13**, proposition 2.1.9]. Il reste donc à constater que qX'' est α-accessible. Comme α est en particulier adapté à $\mathbf{s}\mathcal{E}$, $X'' \times X''$ est α-accessible, et par suite, il en est de même de $X'' \times_Y X''$. L'assertion résulte donc du fait que qX'' est le conoyau des deux projections canoniques de $X'' \times_Y X''$ vers X''. □

Remarque 2.2.24. Si dans l'énoncé ci-dessus, on suppose en outre que q soit un épimorphisme de but α-accessible, on peut imposer que $qX'' = Y$. En effet, le lemme 1.1.11 implique que X' est contenu dans un sous-objet α-accessible X'_0 de X, tel que la restriction de q à X'_0 soit encore un épimorphisme. En appliquant la proposition précédente à X'_0, on obtient ainsi un sous-objet α-accessible X'' de X, contenant X'_0 (et donc X') tel que $X'' \longrightarrow qX''$ vérifie la propriété de relèvement local à droite relativement à S. Comme $X'_0 \longrightarrow Y$ est en outre un épimorphisme, on a bien l'égalité $qX'' = Y$.

3. Diagrammes plats, limites inductives locales

2.3.1. Soient $\mathcal{E}$ un topos et I une petite catégorie.

On rappelle qu'un foncteur $u : I \longrightarrow \mathcal{E}$ est *plat* si l'unique foncteur prolongeant u et commutant aux petite limites inductives $u_! : \widehat{I} \longrightarrow \mathcal{E}$ est exact (*i.e.* commute aux limites projectives finies). Autrement dit, la donnée d'un tel foncteur u est équivalente à celle d'un morphisme de topos de $\mathcal{E}$ vers $\widehat{I}$ dont le foncteur image inverse est $u_!$. On désigne par $\mathsf{Plat}(I, \mathcal{E})$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E})$ dont les objets sont les foncteurs plats. L'énoncé ci-dessous est immédiat.

Proposition 2.3.2. *Soient I une petite catégorie et $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphismes de topos. Le foncteur image inverse $\varphi^* : \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{F}) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E})$ respecte les foncteurs plats et induit de la sorte un foncteur*

$$\varphi^* : \mathsf{Plat}(I, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathsf{Plat}(I, \mathcal{E}) \ .$$

2.3.3. Soient F_0 la catégorie associée à l'ensemble ordonné $1 > 0 < 2$, et $F'_0 = \{1, 2\}$. On note $i_0 : F'_0 \longrightarrow F_0$ l'inclusion évidente. On note F_1 la catégorie engendrée par le graphe

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & 1 \arrow[r, "c"] & 2 \end{tikzcd}$$

avec les relations $ca = cb$, F'_1 la sous-catégorie pleine de F_1 dont les objets sont 0 et 1, et $i_1 : F'_1 \longrightarrow F_1$ l'inclusion. Il est remarquable que le nerf de i_0 et de i_1 sont des inclusions d'ensemble simpliciaux de présentation finie. Un petite catégorie I est filtrante si et seulement si le morphisme du nerf de I vers l'ensemble simplicial final vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux inclusions $i_{-1} : \varnothing \longrightarrow \Delta_0$, i_0 et i_1.

Soit C un site de définition de $\mathcal{E}$.

Un préfaisceau en catégories L sur C est *localement filtrant sur C* si le morphisme du nerf de L vers le faisceau final vérifie la propriété de relèvement local à droite relativement aux inclusions i_{-1}, i_0 et i_1. Autrement dit, L est localement filtrant sur C si et seulement si pour tout point faible p de $\mathcal{E}$, la catégorie paL est filtrante (a désignant le foncteur faisceau associé). Il est donc aussi immédiat que L est localement filtrant sur C si et seulement si aL est localement filtrant sur $\mathcal{E}$. Si on désigne encore par $p : L \longrightarrow C^\circ$ la cofibration associée à L, un exercice de traduction immédiat montre que L est localement filtrant si et seulement si L est une catégorie cofibrée localement filtrante au sens de [**36**] (voir aussi [**31**, exposé V]).

Un foncteur $u : I \longrightarrow C$ est *plat* si le foncteur composé

$$I \longrightarrow C \longrightarrow \widehat{C} \longrightarrow \widetilde{C} \simeq \mathcal{E}$$

est plat au sens ci-dessus.

PROPOSITION 2.3.4 (Deligne). *Soit L un préfaisceau en catégories sur C. Si L est localement filtrant sur C, on munit la catégorie fibrée $I = L^\circ$ sur C correspondante de la topologie de Grothendieck induite par la projection $u : I \longrightarrow C$ (*i.e.* une famille de morphismes de L est couvrante si son image dans C l'est). Alors u définit une équivalence de sites de C vers I. En particulier, le foncteur u est plat. On note*

$$\text{``}\varinjlim\text{''}_L : \underline{\mathsf{Hom}}(L, \mathcal{E}ns) \longrightarrow \mathcal{E}$$

le foncteur limite inductive locale, i.e. *l'extension de Kan à gauche de u dans $\mathcal{E}$, ou encore, de manière équivalente, le foncteur faisceau associé correspondant à la topologie sur $I = L^\circ$.*

DÉMONSTRATION. Voir [**31**, exposé V]. □

2.3.5. Le lien entre les catégories localement filtrantes et les foncteurs plats se fait comme suit. Soit $u : I \longrightarrow C$ un foncteur plat. On lui associe un préfaisceau en catégories $L = ?\backslash I$ sur C dont les fibres L_U sont les catégories $U\backslash I$. Autrement dit, si U est un objet de C, L_U est la catégorie dont les objets sont les couples (i, φ), i étant un objet de I, et φ une flèche de U vers $u(i)$ dans C. Une flèche de (i, φ) vers (j, ψ) est une flèche $k : i \longrightarrow j$ de I, telle que $u(k)\varphi = \psi$. Les foncteurs d'oubli $U\backslash I \longrightarrow I$ induisent un foncteur $q : L^\circ \longrightarrow I$, lequel se révèle être une cofibration à fibre contractiles (cf. par exemple l'énoncé dual de [**13**, proposition 1.3.2]). Par conséquent, le foncteur image inverse

$$q^* : \widehat{I} \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(L, \mathcal{E}ns)$$

est pleinement fidèle. Le morphisme de topos $q : \underline{\mathsf{Hom}}(L, \mathcal{E}ns) \longrightarrow \widehat{I}$ est donc en particulier surjectif au sens de [**47**].

PROPOSITION 2.3.6. *Le foncteur $u : I \longrightarrow C$ est plat si et seulement si le préfaisceau en catégories $?\backslash I$ est localement filtrant sur C.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte facilement de [**47**]. □

2.3.7. Soit $\pi : L^\circ \longrightarrow C$ la fibration structurale (*i.e.* $\pi = p^\circ$). Pour chaque objet U de C et chaque objet (i, φ) de L_U, on a par construction un morphisme

$$\varphi : \pi(i, \varphi) = U \longrightarrow u(i) = uq(i, \varphi) \ ,$$

ce qui définit un morphisme de foncteurs $\alpha : \pi \longrightarrow uq$. On en déduit un morphisme de foncteurs entre les extensions de Kan à gauche correspondantes $\pi_! \longrightarrow u_! q_!$, d'où un morphisme composé de $\pi_! q^*$ vers $u_!$.

$$\pi_! q^* \longrightarrow u_! q_! q^* \longrightarrow u_!$$

LEMME 2.3.8. *Le morphisme $\pi_! q^* \longrightarrow u_!$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Comme π est une cofibration, pour tout foncteur D de L vers $\mathcal{E}ns$ et tout objet U de C, $(\pi_! D)(U)$ est la limite inductive $\varinjlim_{L_U} D|_{L_U}$. Si F est un préfaisceau sur I, $(\pi_! q^* F)(U)$ est donc la limite inductive $\varinjlim_{U\backslash I} F|_{U\backslash I}$, laquelle est par définition la valeur en U de $u_! F$ (cf. [**46**]). $\square$

Proposition 2.3.9. *Le foncteur image inverse $\widehat{I} \longrightarrow \mathcal{E}$ correspondant à u est canoniquement isomorphe au composé du foncteur image inverse*

$$q^* : \widehat{I} \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(L, \mathcal{E}ns)$$

et du foncteur limite inductive locale

$$\text{“}\varinjlim\text{”}_L : \underline{\mathsf{Hom}}(L, \mathcal{E}ns) \longrightarrow \mathcal{E}\ .$$

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la proposition 2.3.6 et du lemme 2.3.8. $\square$

2.3.10. Soit I une petite catégorie. Si F est un préfaisceau sur I à valeur dans le topos $\mathcal{E}$, on lui associe un préfaisceau en catégories I/F sur $\mathcal{E}$ par

$$U \longmapsto I/F(U)\ .$$

Un *ind-objet local indexé par I* est un préfaisceau F sur I à valeurs dans $\mathcal{E}$ tel que I/F soit localement filtrant (*i.e.* tel que pour tout point faible p de $\mathcal{E}$, pF soit un ind-objet d'ensembles indexé par I). On peut voir aussi les ind-objets locaux indexés par I comme les faisceaux sur $\mathcal{E}$ à valeurs dans la catégorie des ind-objets indexés par I en un sens adéquat. On note $\mathsf{Indloc}(I, \mathcal{E})$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{E})$ formée des ind-objets locaux.

Exemple 2.3.11. Si $\mathcal{E}$ est le topos ponctuel (*i.e.* la catégorie des ensembles), un ind-objet local indexé par I est simplement un ind-objet indexé par I au sens usuel. Plus généralement, si L est une catégorie, on a

$$\mathsf{Indloc}(I, \underline{\mathsf{Hom}}(L, \mathcal{E}ns)) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(L, \mathsf{Ind}(I))\ .$$

Proposition 2.3.12. *Soient I une petite catégorie et $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de topos. Le foncteur image inverse φ^* induit un foncteur*

$$\varphi^* : \mathsf{Indloc}(I, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathsf{Indloc}(I, \mathcal{E})\ .$$

Démonstration. Le composé de tout point faible de $\mathcal{E}$ avec φ^* est un point faible de $\mathcal{F}$. On en déduit aussitôt que le φ^* respecte la structure d'ind-objet local. $\square$

Proposition 2.3.13. *Un préfaisceau F sur I à valeurs dans $\mathcal{E}$ est un ind-objet local indexé par I si et seulement s'il est une limite inductive locale de préfaisceaux représentables sur I,* i.e. *si et seulement s'il existe un préfaisceau en catégories localement filtrant L sur $\mathcal{E}$, et un foncteur $F' : L \longrightarrow I$ tels que $F \simeq$ “$\varinjlim$”$_L F'$.*

Démonstration. Tout préfaisceau représentable sur I est un ind-objet indexé par I, et donc tout préfaisceau sur L à valeurs dans I est un ind-objet local indexé par I dans le topos $\underline{\mathsf{Hom}}(L, \mathcal{E}ns)$. Cela montre que c'est une condition suffisante. Réciproquement, si F est un ind-objet local indexé par I, on considère le préfaisceau en catégories localement filtrant I/F sur $\mathcal{E}$. On désigne par L la catégorie cofibrée sur $\mathcal{E}^\circ$ correspondante, et par $\pi : L^\circ \longrightarrow \mathcal{E}$ le foncteur structural. Un objet de la catégorie L est un triplet (U, i, φ), où U est faisceau sur $\mathcal{E}$, i, un objet de I, et $\varphi : i \longrightarrow F(U)$ un morphisme de $\mathcal{E}$ (i étant vu comme le faisceau constant associé au préfaisceau d'ensembles sur I représenté par i). On définit un foncteur F' de L vers I par

$$(U, i, \varphi) \longmapsto i \ .$$

Les morphismes φ définissent un morphisme canonique $F' \longrightarrow \pi^* F$ dans la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}(L, \widehat{I})$. Pour conclure, il suffit de vérifier que ce dernier est bicouvrant pour la topologie sur L° induite par π, c'est-à-dire que pour tout objet (U, i, φ) de L°, le morphisme

$$\varphi : i = F'(U, i, \varphi) \longrightarrow (\pi^* F)(U, i, \varphi) = F(U)$$

est bicouvrant dans $\underline{\mathsf{Hom}}(L, \mathcal{E}ns)$. Or cela résulte de la traduction immédiate du fait que I/F est localement filtrant. □

Exemple 2.3.14. Soit Ab_f la catégorie des groupes abéliens de présentation finie. Alors la catégorie des ind-objets (d'ensembles) indexés par Ab_f est canoniquement équivalente à la catégorie des groupes abéliens. Si $\mathcal{E}$ est un topos, la catégorie $\mathsf{Indloc}(Ab_f, \mathcal{E})$ est canoniquement équivalente à la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur $\mathcal{E}$. En particulier, tout faisceau en groupes abéliens sur $\mathcal{E}$ est une limite inductive locale de groupes abéliens de présentation finie.

2.3.15. Soient $\mathcal{E}$ un topos et I une petite catégorie. Un foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{E}$ est *relativement plat* si le foncteur induit

$$F : I \longrightarrow \mathcal{E}/\varinjlim F$$

est plat. On désigne par $\mathsf{Relplat}(I, \mathcal{E})$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E})$ dont les objets sont les foncteurs relativement plats.

Proposition 2.3.16. *Soient I une petite catégorie et $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphismes de topos. Le foncteur image inverse $\varphi^* : \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{F}) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E})$ respecte les foncteurs relativement plats et induit de la sorte un foncteur*

$$\varphi^* : \mathsf{Relplat}(I, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathsf{Relplat}(I, \mathcal{E}) \ .$$

Démonstration. Cela résulte aussitôt du fait que le foncteur image inverse φ^* commute aux petites limites inductives et de la proposition 2.3.2. □

Proposition 2.3.17. *La notion de foncteur relativement plat est locale. Autrement dit, si $\mathcal{E}$ est un topos, I une petite catégorie, et $F : I \longrightarrow \mathcal{E}$ un foncteur, pour que F soit relativement plat, il faut et il suffit qu'il existe une famille génératrice $\mathcal{U}$ de $\mathcal{E}$ telle que pour tout élément U de $\mathcal{U}$, le foncteur induit*

$$F_U : I \longrightarrow \mathcal{E}/U \quad , \qquad i \longmapsto F(i) \times U$$

soit relativement plat.

Démonstration. Si F est relativement plat, alors pour tout faisceau U sur $\mathcal{E}$, le fonceur F_U est relativement plat : cela résulte aussitôt de la proposition précédente appliquée au morphisme de topos $\mathcal{E}/U \longrightarrow \mathcal{E}$. Réciproquement, supposons qu'il existe une famille génératrice $\mathcal{U}$ de $\mathcal{E}$ satisfaisant l'hypothèse décrite dans l'énoncé. En vertu de la proposition 2.3.6, il suffit de vérifier que $?\backslash I$ est localement filtrant sur $\mathcal{E}/\varinjlim F$. Or on sait par hypothèse que $?\backslash I$ est localement filtrant sur $\mathcal{E}/(\varinjlim F \times U)$ pour tout élément U de $\mathcal{U}$, ce qui implique aussitôt l'assertion, puisque la famille des projections $\varinjlim F \times U \longrightarrow \varinjlim F$ recouvre $\varinjlim F$. $\square$

Corollaire 2.3.18. *La notion de foncteur plat est locale.*

CHAPITRE 3

Du local au global

1. Localisateurs de descente

3.1.1. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un morphisme de faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{E}$ est un *hyper-recouvrement* s'il vérifie la propriété de relèvement local à droite relativement aux inclusions de bords

$$\partial\,\Delta_n \longrightarrow \Delta_n \quad , \qquad n \geq 0 \; .$$

On note $\mathsf{HR}(\mathcal{E})$ l'ensemble des hyper-recouvrements de $\mathbf{s}\mathcal{E}$. Le *$\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur de descente* est le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur engendré par $\mathsf{HR}(\mathcal{E})$. On appelle *équivalences de descente* les éléments de ce $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur. Si α est un cardinal, on note $\mathsf{HR}_\alpha(\mathcal{E})$ l'ensemble des hyper-recouvrements dont la source et le but sont α-accessibles.

LEMME 3.1.2. *Les hyper-recouvrements sont stables par composition, images réciproques, rétractes, et petites limites inductives filtrantes. En particulier, les hyper-recouvrements sont stables par produits finis, et toute identité est un hyper-recouvrement.*

DÉMONSTRATION. C'est une spécialisation de la proposition 2.2.14 et du corollaire 2.2.17. □

LEMME 3.1.3. *Tout hyper-recouvrement est un épimorphisme.*

DÉMONSTRATION. Soit $q : X \longrightarrow Y$ un morphisme de faisceaux simpliciaux. En vertu de la proposition 2.1.9, demander que q soit un épimorphisme revient à demander qu'il vérifie la propriété de relèvement local à droite relativement aux morphismes $\varnothing \longrightarrow \Delta_n$, $n \geq 0$. L'assertion résulte donc des propositions 2.2.15 et 2.2.19, ainsi que du fait que les flèches $\varnothing \longrightarrow \Delta_n$ sont contenues dans la partie de $\mathsf{Fl}\,\widehat{\Delta}$ stable par opérations finies à gauche, engendrée par les inclusions de bords. □

REMARQUE 3.1.4. Une autre démonstration du lemme ci-dessus consiste à utiliser les points faibles de $\mathcal{E}$ et le fait que les fibrations triviales d'ensembles simpliciaux sont des épimorphismes (puisqu'elles admettent des sections).

THÉORÈME 3.1.5. *Le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur de descente est propre et stable par produits finis.*

DÉMONSTRATION. Soit α un cardinal s-adapté à $\mathcal{E}$ tel que tout $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur soit stable par les limites inductives indexées par des ensembles ordonnés α-filtrants (ce qui existe en vertu de 1.2.23 et de 1.1.13). On va montrer que le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur de descente est engendré par $\mathsf{HR}_\alpha(\mathcal{E})$, ce qui prouvera qu'il est accessible en vertu de 1.1.7, (ii). Pour cela, il suffit de montrer que tout hyper-recouvrement est une limite inductive indexée par un ensemble ordonné α-filtrant d'éléments de $\mathsf{HR}_\alpha(\mathcal{E})$. Soit $q : X \longrightarrow Y$ un hyper-recouvrement. On appelle *sous-hyper-recouvrement de* q (sous-entendu α-accessible), la donné d'un sous-objet α-accessible X' de X tel que la restriction de q à X' induise un hyper-recouvrement de but α-accessible

$$q_{X'} : X' \longrightarrow qX' \ .$$

On note I l'ensemble des sous-hyper-recouvrements de q, muni de l'ordre induit par les inclusions de sous-objets de X. L'ensemble ordonné I est α-filtrant : en effet, l'ensemble ordonné des sous-objets α-accessibles de X est lui-même α-filtrant (puisque α est adapté à $\mathbf{s}\mathcal{E}$ par hypothèse), et donc l'assertion est conséquence de la proposition 2.2.23. On a ainsi un foncteur

$$\Phi : I \longrightarrow \mathsf{Fl}\,\mathbf{s}\mathcal{E} \quad , \qquad X' \longmapsto q_{X'} \ ,$$

tel que $\varinjlim \Phi = q$: il résulte d'une nouvelle application de la proposition 2.2.23 que les sous-hyper-recouvrements de q forment un diagramme cofinal dans l'ensemble ordonné des sous-objets α-accessibles de X, et comme les hyper-recouvrements sont des épimorphismes (3.1.3), cela implique l'assertion. Le fait que le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur de descente soit propre et stable par produits finis résulte enfin du lemme 3.1.2, du théorème 1.2.25, et du corollaire 1.2.19. □

Remarque 3.1.6. Le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur de descente est la théorie homotopique interne correspondant au Δ-localisateur minimal.

Définition 3.1.7. Soit $\mathcal{W}$ un Δ-localisateur. Le *$\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur de $\mathcal{W}$-descente* est le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur engendré par le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur de descente et par les morphismes de la forme

$$1_X \times j : X \times K \longrightarrow X \times L \quad , \quad X \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{E} \quad , \quad j : K \longrightarrow L \in \mathcal{W} \ .$$

Il est noté $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$. On appelle *équivalences de $\mathcal{W}$-descente* les éléments de $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$. On désigne enfin par $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\ \mathbf{s}\mathcal{E}$ la localisation de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ par les équivalences de $\mathcal{W}$-descente.

Lemme 3.1.8. *Soit $\mathcal{W}$ un Δ-localisateur engendré par une partie S de $\mathsf{Fl}\,\widehat{\Delta}$. Alors le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur de $\mathcal{W}$-descente est engendré par les équivalences de descente et par les flèches de la forme*

$$1_X \times j : X \times K \longrightarrow X \times L \quad , \quad X \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{E} \quad , \quad j : K \longrightarrow L \in S \ .$$

Démonstration. Soit $\mathcal{W}_S$ le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur engendré par les flèche décrites dans l'énoncé. Il est immédiat que $\mathcal{W}_S \subset \mathcal{W}^{\mathcal{E}}$. Soit X un faisceau sur $\mathcal{E}$. On note

$$\varpi_X : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}$$

le foncteur $K \longmapsto X \times K$. Montrons que $\mathcal{W}' = \varpi_X^{-1}\mathcal{W}_S$ est un Δ-localisateur. Comme les limites inductives sont universelles dans $\mathcal{E}$, et comme les monomorphismes sont stables par produits, le seul aspect non trivial à vérifier est le fait que toute fibration triviale d'ensemble simpliciaux est dans $\mathcal{W}'$. Or il résulte aussitôt de la proposition 2.2.12 que si q est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux (*i.e.* un hyper-recouvrement), alors $p_{\mathcal{E}}^{*}q$ est un hyper-recouvrement dans $\mathbf{s}\mathcal{E}$, ce qui implique l'assertion, puisque les hyper-recouvrements sont stables par produits finis. Comme $S \subset \mathcal{W}'$, on obtient l'inclusion $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$. Cette propriété étant vérifiée pour tout faisceau X, cela implique le lemme. □

PROPOSITION 3.1.9. *Si $\mathcal{W}$ est un Δ-localisateur accessible, alors $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$ est un $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur accessible.*

DÉMONSTRATION. On rappelle que tout $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur engendré par une petite famille de $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateurs accessibles est lui-même accessible. Soit S un petit ensemble de flèches de $\widehat{\Delta}$ qui engendre $\mathcal{W}$. La proposition 1.2.18, appliquée aux foncteurs $X \longmapsto X \times K$ et $X \longmapsto X \times L$ pour $K \longrightarrow L \in S$, montre que le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur engendré par les flèches de la forme

$$1_X \times j : X \times K \longrightarrow X \times L \quad , \quad X \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{E} \quad , \quad j : K \longrightarrow L \in S$$

est accessible. La proposition en résulte grâce au théorème 3.1.5 et au lemme ci-dessus. □

3.1.10. Sous les hypothèses de la proposition ci-dessus, on appelle *fibrations de $\mathcal{W}$-descente* les fibrations de la structure de catégorie de modèles fermée induite sur la catégorie des faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{E}$.

LEMME 3.1.11. *Soient $\mathcal{W}$ un Δ-localisateur, et $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de topos. On note encore par abus $\varphi : \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{F}$ le morphisme de topos induit au niveau des faisceaux simpliciaux. Alors le foncteur image inverse définit une inclusion*

$$\varphi^*\mathcal{W}^{\mathcal{F}} \subset \mathcal{W}^{\mathcal{E}} \ .$$

DÉMONSTRATION. Il résulte aussitôt du corollaire 2.2.16 que toute fibration triviale de $\mathbf{s}\mathcal{F}$ est un hyper-recouvrement, et donc il résulte de la proposition 2.2.12 que la partie $\mathcal{W}' = \varphi^{*-1}\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$ de $\mathsf{Fl}\,\mathbf{s}\mathcal{F}$ est un $\mathbf{s}\mathcal{F}$-localisateur qui contient les hyper-recouvrements. D'autre part, si X est un faisceau sur $\mathcal{F}$, et si j est une $\mathcal{W}$-équivalence (en particulier, un morphisme d'ensembles simpliciaux), on a un isomorphisme canonique $\varphi^*(1_X \times j) \simeq 1_{\varphi^*X} \times j$. On en déduit immédiatement que $\mathcal{W}'$ contient $\mathcal{W}^{\mathcal{F}}$. □

PROPOSITION 3.1.12. *Soient $\mathcal{W}$ un Δ-localisateur accessible, et $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de topos. Le couple de foncteurs adjoints*

$$\varphi^* : \mathbf{s}\mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E} \qquad \varphi_* : \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{F}$$

est une adjonction de Quillen pour les structures de catégorie de modèles fermée définies par les équivalences de $\mathcal{W}$-descente.

DÉMONSTRATION. En vertu du lemme précédent, le foncteur φ^* respecte les équivalences faibles, et il est clair qu'il respecte les cofibrations (*i.e.* les monomorphismes), puisqu'il est exact à gauche. □

LEMME 3.1.13. *Soit $\mathcal{W}$ un Δ-localisateur. Pour toute équivalence de $\mathcal{W}$-descente f de $\mathbf{s}\mathcal{E}$, il existe un Δ-localisateur accessible $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$ tel que f soit une équivalence de $\mathcal{W}'$-descente.*

DÉMONSTRATION. Le Δ-localisateur $\mathcal{W}$ est la réunion filtrante des Δ-localisateurs accessibles $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$. Cela implique que $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$ est la réunion filtrante des $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateurs ${\mathcal{W}'}^{\mathcal{E}}$. On en déduit que la localisation de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ par $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$ est la limite inductive filtrante des localisations de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ par les $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateurs ${\mathcal{W}'}^{\mathcal{E}}$. L'assertion en résulte grâce à la forte saturation des $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateurs. □

Proposition 3.1.14. *Soient $\mathcal{W}$ un Δ-localisateur, et I une petite catégorie. On note $\mathcal{E}^I$ le topos des foncteurs de I dans $\mathcal{E}$. Les équivalences de $\mathcal{W}$-descente de $\mathbf{s}\mathcal{E}^I$ sont les $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$-équivalences argument par argument.*

Démonstration. Pour chaque objet i de I, le foncteur d'évaluation en i,

$$i^* : \mathcal{E}^I \longrightarrow \mathcal{E} \ ,$$

est le foncteur image inverse d'un morphisme de topos. Le lemme 3.1.11 implique donc que toute équivalence de $\mathcal{W}$-descente de $\mathbf{s}\mathcal{E}^I$ est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente argument par argument. Pour montrer l'inclusion inverse, on peut supposer que $\mathcal{W}$ est accessible, en vertu du lemme précédent. On procèdera en plusieurs étapes.

3.1.14.1. *Soit $q : X \longrightarrow Y$ une fibration de $\mathcal{W}$-descente dans $\mathbf{s}\mathcal{E}^I$. Alors pour tout objet i de I, le morphisme de faisceaux simpliciaux $q_i : X_i \longrightarrow Y_i$ est une fibration de $\mathcal{W}$-descente dans $\mathbf{s}\mathcal{E}$.*

Pour établir cette assertion, il suffit de montrer que pour tout objet i de I, le foncteur

$$i_! : \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}^I \ ,$$

adjoint à gauche du foncteur d'évaluation i^*, envoie les cofibrations triviales sur des cofibrations triviales. Posons $\mathcal{W}' = i_!^{-1}\mathcal{W}^{\mathcal{E}^I}$. On ainsi défini un $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur qui contient les hyper-recouvrements. En effet, pour tout objet j de I, $j^*i_!$ est isomorphe au foncteur $1_{\mathbf{s}\mathcal{E}} \times \mathsf{Hom}_I(i,j)$ (l'ensemble $\mathsf{Hom}_I(i,j)$ étant vu comme un faisceau constant). Cela implique que $i_!$ respecte les monomorphismes. Comme il commute aux petite limites inductives, et vu que toute fibration triviale est un hyper-recouvrement, il suffit de montrer qu'il respecte les hyper-recouvrements, ce qui résulte du fait que ces derniers sont stables par produits finis et du lemme 2.2.13. D'autre part, si j est une $\mathcal{W}$-équivalence, alors pour tout faisceau X sur $\mathcal{E}$, on a un isomorphisme $i_!(1_X \times j) \simeq 1_{i_!X} \times j$, ce qui prouve que $\mathcal{W}^{\mathcal{E}} \subset \mathcal{W}'$.

3.1.14.2. *Soit $q : X \longrightarrow Y$ une fibration de $\mathcal{W}$-descente dans $\mathcal{E}^I$. Si q est en outre une $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$-équivalence argument par argument, alors pout tout objet i de I, $q_i : X_i \longrightarrow Y_i$ est un hyper-recouvrement.*

En vertu de 3.1.14.1, ces conditions impliquent que pour tout objet i de I, q_i est une fibration triviale. Il suffit donc de constater que toute fibration triviale est un hyper-recouvrement, ce qui est immédiat.

3.1.14.3. *Soit $q : X \longrightarrow Y$ une fibration de $\mathcal{W}$-descente dans $\mathcal{E}^I$. Si q est en outre une $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$-équivalence argument par argument, alors q est un hyper-recouvrement.*

Cela résulte aussitôt de 3.1.14.2 et du lemme 2.2.13.

3.1.14.4. *Toute $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$-équivalence argument par argument est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente dans $\mathbf{s}\mathcal{E}^I$.*

Soit f une $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$-équivalence argument par argument. Elle admet une factorisation de la forme $f = qj$, où j est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente, et q une fibration de $\mathcal{W}$-descente. Comme toute équivalence de $\mathcal{W}$-descente est une $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$-équivalence argument par argument, il en est de même de q, et il suffit de montrer que q est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente. Or cela résulte immédiatement de 3.1.14.3. □

Corollaire 3.1.15. *Pour tout* Δ*-localisateur* $\mathcal{W}$*, les équivalences de* $\mathcal{W}$*-descente sont stables par petites limites inductives filtrantes.*

Démonstration. Soit I une petite catégorie filtrante. En vertu du lemme 3.1.13, le foncteur

$$\varinjlim_I : \mathbf{s}\mathcal{E}^I \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}$$

respecte les équivalences de $\mathcal{W}$-descente. La proposition ci-dessus implique donc ce corollaire. □

Lemme 3.1.16. *Si* $\mathcal{M}$ *est un modèle cellulaire de* $\mathcal{E}$*, alors les morphismes*

$$X \times \varDelta_n \cup Y \times \partial\, \varDelta_n \longrightarrow Y \times \varDelta_n \quad , \quad X \longrightarrow Y \in \mathcal{M} \quad , \quad n \geq 0 \ ,$$

forment un modèle cellulaire de $\mathbf{s}\mathcal{E}$*.*

Démonstration. Cela s'établit en suivant les mêmes arguments que dans la preuve de [**13**, lemme 3.3.2], exercice que nous laissons au lecteur. □

Proposition 3.1.17. *Soit* $\mathcal{W}$ *un* Δ*-localisateur stable par produits finis. Alors les équivalences de* $\mathcal{W}$*-descente sont stables par produits finis.*

Démonstration. Soit $K \longrightarrow K'$ une $\mathcal{W}$-équivalence. Si L est un ensemble simplicial, et X un faisceau sur $\mathcal{E}$, alors le morphisme induit

$$X \times L \times K \longrightarrow X \times L \times K'$$

est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente. On en déduit que pour tout $n \geq 0$, et toute inclusion $X \longrightarrow Y$ de faisceaux sur $\mathcal{E}$, les morphismes

$$Y \times \varDelta_n \times K \longrightarrow Y \times \varDelta_n \times K'$$

$$(X \times \varDelta_n \cup Y \times \partial\, \varDelta_n) \times K \longrightarrow (X \times \varDelta_n \cup Y \times \partial\, \varDelta_n) \times K'$$

sont des équivalences de $\mathcal{W}$-descente. En vertu du lemme ci-dessus et de la proposition 1.2.18, $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$ est engendré par les morphismes de la forme

$$1_X \times j : X \times K \longrightarrow X \times L \quad , \qquad X \in \mathsf{Ob}\, \mathbf{s}\mathcal{E} \quad , \quad j : K \longrightarrow L \in \mathcal{W} \ .$$

Le corollaire 1.2.19 prouve donc l'assertion. □

3.1.18. On considère à présent un petit site (C, J), on note $\widetilde{C}$ la catégorie des faisceaux sur celui-ci,

$$a : \widehat{C} \longrightarrow \widetilde{C}$$

le foncteur faisceau associé, et

$$i : \widetilde{C} \longrightarrow \widehat{C}$$

le foncteur d'oubli. Ces derniers induisent un couple de foncteurs adjoints,

$$a : \mathbf{s}\widehat{C} \longrightarrow \mathbf{s}\widetilde{C} \quad \text{et} \quad i : \mathbf{s}\widetilde{C} \longrightarrow \mathbf{s}\widehat{C} \ .$$

On a en outre un isomorphisme de catégories $\mathbf{s}\widehat{C} \simeq \widehat{C \times \Delta}$. On dit qu'un morphisme de préfaisceaux simpliciaux sur C est un J*-hyper-recouvrement* si son image par le foncteur a est un hyper-recouvrement dans $\mathbf{s}\widetilde{C}$.

Proposition 3.1.19. *Soit $\mathcal{W}$ un Δ-localisateur. Les équivalences de $\mathcal{W}$-descente de $\widehat{C \times \Delta}$ sont les $\mathcal{W}$-équivalences argument par argument.*

Démonstration. Il s'agit d'une spécialisation de la proposition 3.1.14 dans la cas où $\mathcal{E}$ est le topos ponctuel, en posant $C^{\circ} = I$. □

Corollaire 3.1.20. *Si $\mathcal{W}$ est un Δ-localisateur propre, les équivalences de $\mathcal{W}$-descente de $\mathbf{s}\widehat{C}$ forment un $\mathbf{s}\widehat{C}$-localisateur propre.*

Démonstration. Cela résulte de [**13**, proposition 2.4.16] et de la proposition 3.1.19. □

3.1.21. Soit $\mathcal{W}$ un Δ-localisateur. Le *$\mathbf{s}\widehat{C}$-localisateur de $(\mathcal{W}, J)$-descente* est le $\mathbf{s}\widehat{C}$-localisateur engendré par les J-hyper-recouvrements et par les morphismes de la forme

$$1_X \times j : X \times K \longrightarrow X \times L \quad , \quad X \in \mathsf{Ob}\,\widehat{C} \quad , \quad j : K \longrightarrow L \in \mathcal{W} \ .$$

On le note $\mathcal{W}^C_J$. On appelle *équivalences de $(\mathcal{W}, J)$-descente* les éléments de ce $\mathbf{s}\widehat{C}$-localisateur, et on désigne par $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W},J}\,\mathbf{s}\widehat{C}$ la localisation de $\mathbf{s}\widehat{C}$ par les équivalences de $(\mathcal{W}, J)$-descente.

Proposition 3.1.22. *Soit $\mathcal{W}$ un Δ-localisateur. On a les égalités*

$$a^{-1}\mathcal{W}^{\widetilde{C}} = \mathcal{W}^C_J \quad et \quad i^{-1}\mathcal{W}^C_J = \mathcal{W}^{\widetilde{C}} \ .$$

En particulier, les foncteurs a et i induisent deux équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre

$$a : \mathsf{Ho}_{\mathcal{W},J}\,\mathbf{s}\widehat{C} \longrightarrow \mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{s}\widetilde{C} \qquad et \qquad i : \mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{s}\widetilde{C} \longrightarrow \mathsf{Ho}_{\mathcal{W},J}\,\mathbf{s}\widehat{C} \ .$$

En outre, si $\mathcal{W}$ est accessible (resp. propre), alors $\mathcal{W}^C_J$ l'est aussi.

Démonstration. En vertu du lemme 3.1.11, $a^{-1}\mathcal{W}^{\widetilde{C}}$ est un $\mathbf{s}\widehat{C}$-localisateur qui contient les équivalences de $\mathcal{W}$-descente. Il est par ailleurs immédiat qu'il contient les J-hyper-recouvrements, et donc les équivalences de $(\mathcal{W}, J)$-descente. D'autre part, tout morphisme bicouvrant pour la topologie J est un J-hyper-recouvrement. En particulier, pour tout préfaisceau simplicial X sur C, le morphisme $X \longrightarrow iaX$ est une équivalences de $(\mathcal{W}, J)$-descente. Posons $\mathcal{W}' = i^{-1}\mathcal{W}^C_J$. On a ainsi défini un $\mathbf{s}\widetilde{C}$-localisateur. En effet, la vérification de l'axiome L1 est immédiate, et comme le foncteur a respecte les cofibrations, son adjoint à droite respecte les fibrations triviales, ce qui implique que $\mathcal{W}'$ vérifie l'axiome L2. Comme le morphisme de foncteurs $1_{\mathbf{s}\widehat{C}} \longrightarrow ia$ est une $\mathcal{W}^C_J$-équivalence naturelle, le foncteur i commute aux petites limites inductives à équivalences faibles près (en un sens que nous laissons au lecteur le soin de préciser), et comme il respecte les monomorphismes, cela prouve l'axiome L3. Il est en outre évident que $\mathcal{W}'$ contient les hyper-recouvrements et les flèches de la forme

$$1_X \times j : X \times K \longrightarrow X \times L \quad , \quad X \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{E} \quad , \quad j : K \longrightarrow L \in \mathcal{W} \ ,$$

autrement dit, qu'il contient les équivalences de $\mathcal{W}$-descente. On en déduit sans peine qu'on a bien les identités annoncées : $a^{-1}\mathcal{W}^{\widetilde{C}} = \mathcal{W}^C_J$ et $i^{-1}\mathcal{W}^C_J = \mathcal{W}^{\widetilde{C}}$.

Supposons à présent que $\mathcal{W}$ soit accessible. Alors en vertu de 3.1.9, $\mathcal{W}^{\widetilde{C}}$ est accessible, et il résulte de la proposition 1.2.20 que $a^{-1}\mathcal{W}^{\widetilde{C}}$ est accessible.

Supposons enfin que $\mathcal{W}$ soit propre. Alors en vertu de ce qui précède, $\mathcal{W}^C_J$ est accessible. En outre, $\mathcal{W}^C_J$ est engendré par $\mathcal{W}^{\widehat{C}}$, lequel est propre en vertu du corollaire 3.1.20, et par les J-hyper-recouvrements, qui sont stables par images réciproques (car c'est le cas des hyper-recouvrements, et car le foncteur a est en particulier exact à gauche). Comme toute fibration au sens de $\mathcal{W}^C_J$ est une fibration au sens de $\mathcal{W}^{\widehat{C}}$, le théorème 1.2.25 implique bien que $\mathcal{W}^C_J$ est propre. □

Corollaire 3.1.23. *Soit $\mathcal{W}$ un Δ-localisateur propre. Alors pour tout topos $\mathcal{E}$, les équivalences de $\mathcal{W}$-descente forment un $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur propre.*

Démonstration. Soit (C, J) un petit site tel que $\mathcal{E}$ s'identifie à la catégorie $\widetilde{C}$ des faisceaux sur C pour la topologie J. On sait que $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$ est accessible (3.1.9) et que $\mathcal{W}^C_J$ est propre. On vérifie facilement grâce à la proposition ci-dessus qu'un morphisme de faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{E}$ est une équivalence faible (resp. une fibration) si et seulement si son image dans $\mathbf{s}\widehat{C}$ en est une. Comme le foncteur d'oubli $\mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\widehat{C}$ commute en particulier aux produits fibrés, cela implique l'assertion. □

Théorème 3.1.24. *Soient $\mathcal{W}$ un Δ-localisateur test, et $\mathcal{E}$ un topos. Le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur de $\mathcal{W}$-descente est stable par produits finis et par petites limites inductives filtrantes. Si en outre $\mathcal{W}$ est accessible (resp. propre), alors il en est de même de $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$.*

Démonstration. La catégorie des simplexes est une catégorie test stricte pour tout localisateur fondamental (cf. [**13**, 5.5.5]). Autrement dit, tout Δ-localisateur test est stable par produits finis. La stabilité de $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$ par produits finis résulte donc de la proposition 3.1.17. La stabilité par petites limites inductives filtrantes est une spécialisation du corollaire 3.1.15. En vertu de la proposition 3.1.9 (resp. du corollaire 3.1.23), si en outre $\mathcal{W}$ est accessible (resp. propre), alors il en est de même de $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$. □

Scholie 3.1.25. Voici une seconde preuve du fait que si $\mathcal{W}$ est un Δ-localisateur test propre, alors $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$ est propre, sans recours à un choix de site. En vertu de [**13**, théorèmes 5.1.10 et 5.2.21], il existe une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles simpliciaux telle que $\mathcal{W}$ soit le Δ-localisateur engendré par les morphismes de la forme

$$K \longrightarrow \mathit{\Delta}_0 = * \quad , \quad K \in \mathcal{F} \ .$$

Vu que $\mathcal{W}$ est stable par produits finis, le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur de $\mathcal{W}$-descente est engendré par les hyper-recouvrements et par les projections

$$X \times K \longrightarrow X \quad , \quad X \in \mathsf{Ob}\,\mathbf{s}\mathcal{E} \quad , \quad K \in \mathcal{F} \ .$$

Comme on sait par ailleurs que $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$ est accessible, l'assertion résulte ainsi d'une application directe du théorème 1.2.25.

Corollaire 3.1.26 (Joyal). *Pour tout topos $\mathcal{E}$, la catégorie des faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{E}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée propre à engendrement cofibrant, dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente.*

Remarque 3.1.27. On verra plus loin que les équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente sont exactement les morphismes de faisceaux simpliciaux induisant des isomorphismes entre les faisceaux d'homotopie. Autrement dit, on retrouve ainsi la notion de quasi-isomorphisme définie par Illusie dans [**36**, chapitre I, § 2.2.1].

2. Algèbre homotopique locale

3.2.1. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un morphisme de faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{E}$ est une *fibration locale* s'il vérifie la propriété de relèvement local à droite relativement aux extensions anodines de la forme

$$\partial\,\Delta_n \times \Delta_1 \cup \Delta_n \times \{\varepsilon\} \longrightarrow \Delta_n \times \Delta_1 \quad , \qquad n \geq 0 \ , \ \varepsilon = 0, 1 \ .$$

Un faisceau simplicial X sur $\mathcal{E}$ est *localement fibrant* si le morphisme de X vers le faisceau final est une fibration locale. On note $\mathbf{s}\mathcal{E}_{loc}$ la *catégorie de Brown associée à* $\mathcal{E}$, sous-catégorie pleine de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ formée des faisceaux simpliciaux localement fibrants.

Lemme 3.2.2. *Les fibrations locales sont stables par composition, images réciproques, rétractes, et petites limites inductives filtrantes. En particulier, elles sont stables par produits finis.*

Démonstration. Cela résulte de 2.2.17 et 2.2.14. □

Lemme 3.2.3. *Un morphisme de faisceaux simpliciaux est une fibration locale si et seulement si son image par tout point faible est une fibration de Kan.*

Démonstration. C'est une spécialisation de la proposition 2.2.15. □

Corollaire 3.2.4. *Tout hyper-recouvrement est une fibration locale.*

Lemme 3.2.5. *Soit $p : X \longrightarrow Y$ une fibration locale. Alors pour tout monomorphisme d'ensembles simpliciaux de présentation finie $j : K \longrightarrow L$, le morphisme*

$$(p_*, j^*) : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(L, X) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(L, Y) \times_{\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(K,Y)} \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(K, X)$$

est une fibration locale. Si en outre p est un hyper-recouvrement (resp. j est une extension anodine), alors (p_*, j^*) est un hyper-recouvrement.

Démonstration. Dans le cas où $\mathcal{E}$ est le topos ponctuel, la première assertion est bien connue (cf. [**25**, § VI.4.3]). Le cas général en résulte en vertu du corollaire 2.2.7 et du lemme 3.2.3. La seconde relève du même type de méthodes. □

Définition 3.2.6 (K.S. Brown [**8**]). Une *catégorie d'objets fibrants* est une catégorie $\mathcal{C}$, munie de deux classes de flèches $\mathcal{W}$ et Fib, vérifiant les axiomes suivants (on appelle respectivement *équivalences faibles* les éléments de $\mathcal{W}$, *fibrations* ceux de Fib, et *fibrations triviales* ceux de $\mathsf{Fib} \cap \mathcal{W}$).

F1 Tout isomorphisme est une équivalence faible, et si dans un triangle commutatif de $\mathcal{C}$, deux flèches parmis les trois sont des équivalences faibles, il en est de même de la dernière.

F2 Tout isomorphisme est une fibration. Les fibrations sont stables par composition.

F3 Les fibrations sont quarrables, et stables par images réciproques. Les fibrations triviales sont stables par images réciproques.

F4 Toute flèche f de $\mathcal{C}$ admet une factorisation de la forme $f = qj$, où j est une équivalence faible, et où q est une fibration.

F5 La catégorie $\mathcal{C}$ admet un objet final $*$, et pour tout objet X de $\mathcal{C}$, la flèche $X \longrightarrow *$ est une fibration.

Exemple 3.2.7. La sous-catégorie pleine de $\widehat{\Delta}$ formée des complexes de Kan admet une structure de catégorie d'objets fibrants, dont les équivalences faibles sont les ∞-équivalences, et dont les fibrations sont les fibrations de Kan. Cela résulte du fait général que si une catégorie $\mathcal{C}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée, la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée des objets fibrants admet une structure de catégorie d'objets fibrants, dont les équivalences faibles et les fibrations sont celles de $\mathcal{C}$.

3.2.8. On appelle *équivalence locale* un morphisme de faisceaux simpliciaux localement fibrants dont l'image dans $\widehat{\Delta}$ par tout point faible est une ∞-équivalence.

Théorème 3.2.9. *La catégorie de Brown associée au topos $\mathcal{E}$ admet une structure de catégorie d'objets fibrants, dont les les équivalences faibles sont les équivalences locales, et dont les fibrations sont les fibrations locales. En outre, les fibrations triviales sont exactement les hyper-recouvrements.*

Démonstration. L'axiome F1 est évident. Les axiomes F2 et F3 résultent du lemme 3.2.2 et 3.1.2, et l'axiome F5 est vérifié par définition de la catégorie de Brown. Il est d'autre part immédiat qu'une fibration locale est une équivalence locale si et seulement si c'est un hyper-recouvrement, car une fibration de Kan est une ∞-équivalence si et seulement si c'est une fibration triviale. Il reste donc à montrer l'existence de la factorisation de toute flèche en une équivalence locale suivie d'une fibration locale. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de faisceaux simpliciaux localement fibrants. L'inclusion

$$\partial\, \Delta_1 = \Delta_0 \amalg \Delta_0 \longrightarrow \Delta_1$$

induit en vertu du lemme 3.2.5 une fibration locale entre faisceaux simpliciaux localements fibrants

$$(d^0, d^1) : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(\Delta_1, Y) \longrightarrow Y \times Y \ ,$$

ainsi que deux hyper-recouvrements

$$d^\varepsilon : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(\Delta_1, Y) \longrightarrow Y \quad , \quad \varepsilon = 0, 1 \ .$$

On forme le carré cartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} X \times_Y \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(\Delta_1, Y) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "r"'] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{s}\mathcal{E}}(\Delta_1, Y) \arrow[d, "d^0"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Le morphisme r est un hyper-recouvrement, et donc en particulier une équivalence locale. On définit un morphisme

$$j : X \longrightarrow X \times_Y \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(\varDelta_1, Y)$$

par $j = (1_X, sf)$, où

$$s : Y \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(\varDelta_1, Y)$$

est le morphisme induit par la flèche $\sigma_0^0 : \varDelta_1 \longrightarrow \varDelta_0$. On obtient ainsi une factorisation $f = qj$, où $q = d^1 p$, et on vérifie que r est une rétraction de j, ce qui implique que j est une équivalence locale.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j"] & & Y \\
& X \times_Y \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(\varDelta_1, Y) \arrow[ul, bend left, "r"] \arrow[ur, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

On a en outre le carré cartésien suivant.

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(\varDelta_1, Y) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "{(r,q)}"'] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(\varDelta_1, Y) \arrow[d, "{(d^0,d^1)}"] \\
X \times Y \arrow[r, "f \times 1_Y"'] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

Cela montre que le morphisme (r, q) est une fibration locale. D'autre part, la seconde projection $pr_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ est une fibration locale, et donc la relation $q = pr_2(r, q)$ implique que q est une fibration locale, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 3.2.10. *Soit $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de topos. Alors le foncteur image inverse de φ induit un foncteur*

$$\varphi^* : \mathbf{s}\mathcal{F}_{loc} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}_{loc}$$

qui respecte les équivalences locales et les fibrations locales.

Démonstration. En vertu de la proposition 2.2.12, le foncteur $\varphi^* : \mathbf{s}\mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}$ respecte les fibrations locales et les hyper-recouvrements. Le lemme de factorisation de Ken Brown [**8**, § I.1] implique aussitôt qu'il respecte aussi les équivalences locales. □

Corollaire 3.2.11. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. La catégorie de Brown associée à $\mathcal{E}$ admet des petites limites inductives filtrantes. En outre, les équivalences locales, les fibrations locales et les hyper-recouvrements sont stables par petites limites inductives filtrantes dans $\mathbf{s}\mathcal{E}_{loc}$.*

Démonstration. Cela résulte de la proposition précédente, du lemme 2.2.13 et de la proposition 2.2.14. □

3.2.12. Le foncteur $\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}$, qui à un faisceau X associe le faisceau simplicial constant de valeur X, admet un adjoint à gauche $\pi_0 : \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. Si X est un faisceau simplicial, $\pi_0 X$ est le conoyau des flèches $d^\varepsilon : X_1 \longrightarrow X_0$, $\varepsilon = 0, 1$. On peut encore le voir comme le faisceau associé au préfaisceau sur $\mathcal{E}$ défini par $U \longmapsto \pi_0(X(U)) = \pi_0 \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(U, X)$.

Lemme 3.2.13. *Soit X un faisceau simplicial localement fibrant. Pout tout point faible p de $\mathcal{E}$, l'application canonique $\pi_0 pX \longrightarrow p\pi_0 X$ est bijective.*

Démonstration. Soit R l'image de la flèche

$$(d^0, d^1) : X_1 \longrightarrow X_0 \times X_0 \ .$$

Pour tout point faible p de $\mathcal{E}$, pX est un complexe de Kan, et en vertu du lemme 2.1.2, pR est l'image de l'application $(d^0, d^1) : pX_1 \longrightarrow pX_0 \times pX_0$. Par conséquent, pR est une relation d'équivalence (cf. [**25**, § IV.5.2]). L'assertion résulte donc de la proposition 2.1.17. □

Corollaire 3.2.14. *La restriction du foncteur π_0 à $\mathbf{s}\mathcal{E}_{loc}$ commute aux produits finis et envoie les équivalences locales sur des isomorphismes.*

Démonstration. L'assertion est bien connue dans le cas du topos ponctuel. Le cas général en résulte grâce au lemme ci-dessus, car les points faibles de $\mathcal{E}$ forment une famille conservative de foncteurs exacts à gauche. □

3.2.15. Soient X un faisceau simplicial localement fibrant, et x une section globale de X. On forme le carré cartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} \Omega(X,x) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(\Delta_1, X) \arrow[d, "(d^0,d^1)"] \\ * \arrow[r, "(x,x)"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

La section globale x de X induit une section globale encore notée x de $\Omega(X,x)$. Comme (d^0, d^1) est une fibration locale, $\Omega(X,x)$ est encore un faisceau localement fibrant. En itérant cette construction, on obtient des faisceaux localement fibrants

$$\Omega^n(X,x) = \Omega(\Omega^{n-1}(X,x), x) \quad , \quad n \geq 1 \ .$$

On dit que $\Omega^n(X,x)$ est le *n-ème faisceau de lacets de X autour de x*. On pose alors

$$\pi_n(X,x) = \pi_0 \Omega^n(X,x) \ .$$

On peut montrer grâce à la structure de catégorie d'objets fibrants sur $\mathbf{s}\mathcal{E}_{loc}$ que pour $n \geq 1$, $\Omega^n(X,x)$ est canoniquement muni d'une structure de groupes dans la catégorie homotopique associée (cf. [**8**, § I.4, théorème 3]). Le corollaire ci-dessus implique donc que $\pi_n(X,x)$ est un groupe pour tout $n \geq 1$. Un argument standard montre que $\pi_n(X,x)$ est un groupe abélien pour $n \geq 2$.

Lemme 3.2.16. *Soient $\varphi : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ un morphisme de topos et X un faisceau simplicial localement fibrant sur $\mathcal{E}$. Pour toute section globale x de X, et tout $n \geq 1$, on a un isomorphisme canonique*

$$\varphi^* \pi_n(X,x) \simeq \pi_n(\varphi^* X, \varphi^* x) \ .$$

Démonstration. Cela résulte du fait que le foncteur image inverse φ^* est exact et que la construction des π_n n'utilise que des limites inductives et projectives finies. □

3.2.17. Considérons à nouveau un faisceau simplicial localement fibrant X sur $\mathcal{E}$. Si U est un faisceau sur $\mathcal{E}$, et si $x : U \longrightarrow X$ est une section de X au-dessus de U, on peut considérer la restriction $X|_U$ de X sur U (*i.e.* le faisceau simplicial sur $\mathcal{E}/U$ défini par $X|_U = (X \times U, pr_2 : X \times U \longrightarrow U))$, et voir x comme une section globale de $X|_U$. Pour chaque $n \geq 1$, on a donc un faisceau en groupes $\pi_n(X|_U, x)$ sur $\mathcal{E}/U$. Le lemme ci-dessus implique en particulier que pour chaque morphisme de faisceaux $U' \longrightarrow U$ on a des carrés cartésiens de faisceaux sur $\mathcal{E}$ pour $n \geq 1$,

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X|_{U'}, x|_{U'}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_n(X|_U, x) \arrow[d] \\ U' \arrow[r] & U \end{tikzcd} .$$

Or on a un morphisme canonique $i_X : X_0 \longrightarrow X$, ce qui permet de poser pour chaque $n \geq 1$:

$$\pi_n(X) = \pi_n(X|_{X_0}, i_X) \ .$$

On remarque que se donner un faisceau U et une section x de X au-dessus de U revient à se donner une section (encore notée par abus x) de X_0 au-dessus de U. En vertu de ce qui précède, on obtient un carré cartésien dans $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X|_U, x) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_n(X) \arrow[d] \\ U \arrow[r, "x"'] & X_0 \end{tikzcd} .$$

La construction du faisceau $\pi_n(X)$ est fonctorielle en X. Ainsi, pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de faisceaux simpliciaux localement fibrants sur $\mathcal{E}$, on obtient pour chaque $n \geq 1$, un morphisme de faisceaux sur $\mathcal{E}$,

$$\pi_n(f) : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y) \ .$$

LEMME 3.2.18. *Soit X un faisceau simplicial localement fibrant. Pour tout $n \geq 1$, et tout point faible p de $\mathcal{E}$, on a un isomorphisme canonique au-dessus de pX_0,*

$$p\pi_n(X) \simeq \pi_n(pX) \ .$$

En particulier, si x est une section globale de X, on a un isomorphisme de groupes canonique

$$p\pi_n(X, x) \simeq \pi_n(pX, px) \ .$$

DÉMONSTRATION. Notons $\Omega^n(X)$ le faisceau simplicial sur $\mathcal{E}$, image du faisceau de lacets $\Omega^n(X|_{X_0}, i_X)$ par le foncteur d'oubli de $\mathbf{s}\mathcal{E}/X_0$ vers $\mathbf{s}\mathcal{E}$. Pour $n \geq 1$, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \Omega^n(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Hom}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(\Delta_1, \Omega^{n-1}(X)) \arrow[d, "{(d^0,d^1)}"] \\ X_0 \arrow[r] & \Omega^{n-1}(X) \times \Omega^{n-1}(X) \end{tikzcd}$$

dont toutes les flèches verticales sont des fibrations locales (3.2.5). Or tout faisceau sur $\mathcal{E}$, vu comme comme un faisceau simplicial constant, est localement fibrant, ce qui implique que $\Omega^n(X)$ est localement fibrant. En outre, le faisceau $\pi_n(X)$ est par définition le faisceau $\pi_0\Omega^n(X)$. Considérons à présent un point faible p de $\mathcal{E}$. L'exactitude à gauche de p et le corollaire 2.2.7 montrent qu'on a un isomorphisme $p\Omega^n(X) \simeq \Omega^n(pX)$. La proposition résulte par conséquent du lemme 3.2.13. $\square$

LEMME 3.2.19. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant des produits fibrés. On considère le carré commutatif suivant dans $\mathcal{C}$.*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "x"] \arrow[d, "u'"'] & X \arrow[d, "u"] \\ Y' \arrow[r, "y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) *Ce carré est cartésien.*

(ii) *Pour tout objet U de $\mathcal{C}$, et toute flèche $v : U \longrightarrow Y'$, le morphisme induit*

$$U \times_{Y'} X' \longrightarrow U \times_X Y$$

est un isomorphisme.

La démonstration est laissée au lecteur.

THÉORÈME 3.2.20. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de faisceaux simpliciaux localement fibrants sur un topos $\mathcal{E}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le morphisme f est une équivalence locale.*

(ii) *Le morphisme f induit un isomorphisme de faisceaux*

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y) \ ,$$

et pour chaque entier $n \geq 1$, un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X) \arrow[r, "\pi_n(f)"] \arrow[d] & \pi_n(Y) \arrow[d] \\ X_0 \arrow[r, "f_0"'] & Y_0 \end{tikzcd} \quad .$$

(iii) *Le morphisme f induit un isomorphisme de faisceaux*

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y) \ ,$$

et pour tout faisceau U sur $\mathcal{E}$, toute section x de X au-dessus de U, tout entier $n \geq 1$, un isomorphisme de faisceaux en groupes sur $\mathcal{E}/U$

$$\pi_n(f,x) : \pi_n(X|_U, x) \xrightarrow{\sim} \pi_n(Y|_U, f(x)) \ .$$

DÉMONSTRATION. L'équivalence entre les énoncés (ii) et (iii) résulte du lemme ci-dessus et des considérations faites au numéro 3.2.17. Cela permet de voir par ailleurs que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes dans le cas du topos ponctuel, car (i) et (iii) sont alors trivialement équivalentes. Les lemmes 3.2.13 et 3.2.18 établissent donc l'équivalence entre (i) et (ii) en général. $\square$

Définition 3.2.21. Un Δ-localisateur test $\mathcal{W}$ est *géométrique* s'il est engendré par une famille géométrique (2.2.8) et s'il est non trivial (*i.e.* si le localisateur fondamental correspondant est non trivial au sens de [**13**, § 7.2.1].

Exemple 3.2.22. Pour tout n, $0 \leq n \leq \infty$, les n-équivalences simpliciales forment un Δ-localisateur test géométrique.

Remarque 3.2.23. Tout Δ-localisateur test géométrique est accessible, car la catégorie des ensembles simpliciaux de présentation finie est essentiellement petite.

Lemme 3.2.24. *Soient $\mathcal{E}$ un topos et $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$ deux $\mathcal{E}$-localisateurs accessibles.*

(i) *Pour qu'un faisceau $\mathcal{W}$-fibrant sur $\mathcal{E}$ soit $\mathcal{W}'$-fibrant, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe dans $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{s}\mathcal{E}$ à un faisceau $\mathcal{W}'$-fibrant.*

(ii) *Un morphisme entre faisceaux $\mathcal{W}'$-fibrants est une $\mathcal{W}'$-fibration si et seulement si c'est une $\mathcal{W}$-fibration.*

Démonstration. (i) Soient X un faisceau $\mathcal{W}$-fibrant, et X' un faisceau $\mathcal{W}'$-fibrant. Si X et X' sont isomorphes dans $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{s}\mathcal{E}$, alors il existe une $\mathcal{W}$-équivalence $u : X \longrightarrow X'$ (en fait c'est une équivalence d'homotopie). On peut factoriser u en une $\mathcal{W}$-cofibration triviale $j : X \longrightarrow X''$, suivie d'une $\mathcal{W}$-fibration $q : X'' \longrightarrow X'$. Le morphisme q est dans ce cas une fibration triviale, et donc en particulier une $\mathcal{W}'$-fibration, ce qui fait de X'' un faisceau $\mathcal{W}'$-fibrant. Or le lemme du rétracte montre que X est un rétracte de X'', ce qui montre que X est aussi $\mathcal{W}$-fibrant.

(ii) Soit $q : X \longrightarrow Y$ un morphisme entre faisceaux $\mathcal{W}'$-fibrants. Supposons que q est une $\mathcal{W}$-fibration. On choisit une factorisation de q en une $\mathcal{W}'$-cofibration triviale $i : X \longrightarrow Z$ suivie d'une $\mathcal{W}'$-fibration $p : Z \longrightarrow Y$. Comme X et Y sont $\mathcal{W}'$-fibrant, i est une équivalence d'homotopie, et donc est aussi une $\mathcal{W}$-équivalence. Il s'en suit que q est un rétracte de p, ce qui montre que q est une $\mathcal{W}'$-fibration. La réciproque est immédiate. □

3.2.25. Soit $\mathcal{W}$ un Δ-localisateur test géométrique. Il existe un petit ensemble S de monomorphismes entre ensembles simpliciaux de présentation finie, tel que $\mathcal{W}$ soit le Δ-localisateur engendré par S. Comme les projections de la forme $X \times \mathit{\Delta}_1 \longrightarrow X$ sont des $\mathcal{W}$-équivalences, on peut considérer que si $\mathit{\Delta}_1$ désigne le cylindre fonctoriel défini par le segment séparant $\mathit{\Delta}_1$, $\mathcal{W}$ est la classe d'équivalences faibles associée à la donnée homotopique $(\mathit{\Delta}_1, S)$ (cf. [**13**, proposition 2.3.2 et lemme 2.3.3]). Soit $J = \Lambda_{\mathit{\Delta}_1}(S, \mathcal{M})$ le petit ensemble de flèche qui engendre les extensions anodines associé (cf. [**13**, 2.2.11]), $\mathcal{M}$ désignant le modèle cellulaire standard de $\widehat{\Delta}$ [**13**, 3.1.2]. Il résulte du corollaire 2.2.5 que J est une famille géométrique, et en vertu de [**13**, proposition 2.2.29], un ensemble simplicial X est $\mathcal{W}$-fibrant si et seulement si la flèche $X \longrightarrow *$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à J. En vertu de l'énoncé (ii) du lemme ci-dessus, un morphisme d'ensembles simpliciaux $\mathcal{W}$-fibrants est une $\mathcal{W}$-fibration si et seulement si c'est une fibration de Kan.

Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un faisceau simplicial X sur $\mathcal{E}$ est *localement $\mathcal{W}$-fibrant* si le morphisme de X vers le faisceau final vérifie la propriété de relèvement local à droite relativement à J. On remarque aussitôt grâce à la proposition 2.2.15 qu' un faisceau simplicial X est localement $\mathcal{W}$-fibrant si et seulement si pour tout point faible p, pX est $\mathcal{W}$-fibrant dans $\widehat{\Delta}$. En particulier, cette notion ne dépend pas du choix de l'ensemble S. D'autre part, pour tout hyper-recouvrement $X \longrightarrow Y$, si Y est localement $\mathcal{W}$-fibrant, il en est de même de X (car tout hyper-recouvrement vérifie la propriété de relèvement local à droite relativement à J). On note $\mathbf{s}\mathcal{E}_{\mathcal{W},loc}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ formée des faisceaux simpliciaux localement $\mathcal{W}$-fibrants.

Proposition 3.2.26. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de faisceaux simpliciaux localement $\mathcal{W}$-fibrants. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le morphisme f est une équivalence locale.*

(ii) *Pour tout point faible p de $\mathcal{E}$, pf est une Δ_1-équivalence d'homotopie.*

(iii) *Pour tout point faible p de $\mathcal{E}$, pf est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

Démonstration. Soit p un point faible de $\mathcal{E}$. Alors pX et pY sont des ensembles simpliciaux $\mathcal{W}$-fibrants. Par conséquent, pf est une $\mathcal{W}$-équivalence si et seulement si c'est une Δ_1-équivalence d'homotopie. Cela prouve l'équivalence entre (ii) et (iii). Comme tout ensemble simplicial $\mathcal{W}$-fibrant est en particulier un complexe de Kan, cela prouve aussi l'équivalence entre (i) et (ii). □

Théorème 3.2.27. *La catégorie $\mathbf{s}\mathcal{E}_{\mathcal{W},loc}$ est une catégorie d'objets fibrants, avec pour équivalences faibles les équivalences locales, et pour fibrations, les fibrations locales.*

Démonstration. Montrons que les fibrations locales sont quarrables dans $\mathbf{s}\mathcal{E}_{\mathcal{W},loc}$. Soient $q : X \longrightarrow Y$ une fibration locale de source et de but localement $\mathcal{W}$-fibrants, et $Y' \longrightarrow Y$ un morphisme de faisceaux simpliciaux localement $\mathcal{W}$-fibrants. On forme le carré cartésien suivant dans $\mathbf{s}\mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "q'"'] & X \arrow[d, "q"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Pour tout point faible p de $\mathcal{E}$, pq est une fibration de Kan de source et de but $\mathcal{W}$-fibrants, et donc en vertu du lemme 3.2.24, une $\mathcal{W}$-fibration. Comme p est en outre exact à gauche, on en déduit que pq' est une $\mathcal{W}$-fibration. L'ensemble simplicial pY' étant $\mathcal{W}$-fibrant, il en est donc de même de pX'. Cela implique que q' est une fibration locale de source et de but localement $\mathcal{W}$-fibrants.

Comme dans le cas du théorème 3.2.9, le seul aspect non trivial restant à vérifier est l'axiome de factorisation F4. Soit f un morphisme de faisceaux simpliciaux localement $\mathcal{W}$-fibrants. Comme f est en particulier une flèche de $\mathbf{s}\mathcal{E}_{loc}$, elle admet une factorisation de la forme $f = qj$, où q est une fibration locale, et où j est une section d'un hyper-recouvrement r (cela résulte de la construction explicite faite dans la preuve de 3.2.9, ou bien du lemme général [**8**, § I.1]). En particulier, le but de j (source de r) est localement $\mathcal{W}$-fibrant, ce qui prouve que cela définit une factorisation adéquate de f. □

Proposition 3.2.28. *Soit $\varphi : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ un morphisme de topos. Le foncteur image inverse φ^* induit un foncteur*

$$\varphi^* : \mathbf{s}\mathcal{E}_{\mathcal{W},loc} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}'_{\mathcal{W},loc}$$

qui respecte les fibrations locales et les hyper-recouvrements (et par suite les équivalences locale).

Démonstration. Le foncteur φ^* respecte les faisceaux simpliciaux localement $\mathcal{W}$-fibrants (2.2.12). La proposition 3.2.10 permet ainsi de conclure. □

Corollaire 3.2.29. *La catégorie $\mathbf{s}\mathcal{E}_{\mathcal{W},loc}$ est stable par petites limites inductives filtrantes. En outre, les fibrations locales, les hyper-recouvrements et les équivalences locales sont stables par petites limites inductives filtrantes dans $\mathbf{s}\mathcal{E}_{\mathcal{W},loc}$.*

Proposition 3.2.30. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. Toute équivalence locale entre faisceaux simpiciaux localement fibrants est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente.*

Démonstration. Tout hyper-recouvrement est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente. L'assertion en résulte, puisque toute équivalence locale entre faisceaux simpliciaux localement fibrants f admet une factorisation de la forme $f = qj$ où j est une section d'un hyper-recouvrement et où q est un hyper-recouvrement. □

3.2.31. Soit $\mathcal{E}$ un topos. On définit un foncteur

$$\mathrm{Ex} : \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}$$

par $(\mathrm{Ex}\, X)_n = \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(\mathrm{Sd}\,\Delta_n, X)$, $X \in \mathsf{Ob}\,\mathbf{s}\mathcal{E}$, $n \geq 0$ (voir [**13**, § 3.1.12]). Les morphismes naturels $\mathrm{Sd}\,\Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ induisent un morphisme de foncteurs

$$\beta : 1_{\mathbf{s}\mathcal{E}} \longrightarrow \mathrm{Ex} \ .$$

En procédant comme en [**13**, § 3.1.17], on obtient ainsi une suite de morphismes de foncteurs

$$1_{\mathbf{s}\mathcal{E}} \longrightarrow \mathrm{Ex} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Ex}^n \longrightarrow \mathrm{Ex}^{n+1} \longrightarrow \cdots \ .$$

En passant à la limite inductive, cela définit un foncteur

$$\mathrm{Ex}^\infty : \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E} \ ,$$

et un morphisme de foncteurs

$$\beta^\infty : 1_{\mathbf{s}\mathcal{E}} \longrightarrow \mathrm{Ex}^\infty \ .$$

Lemme 3.2.32. *Soit $q : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ un fonteur exact à gauche entre deux topos. Pour tout faisceau simplicial X sur $\mathcal{E}$, on a un isomorphisme canonique $q\,\mathrm{Ex}\,X \simeq \mathrm{Ex}\,qX$.*

Démonstration. Cela revient à vérifier que pour tout entier $n \geq 0$, on a un isomorphisme $q(\mathrm{Ex}\,X)_n \simeq (\mathrm{Ex}\,qX)_n$. Or $\mathrm{Sd}\,\Delta_n$ est le nerf d'un ensemble ordonné fini, et donc il résulte de [**25**, § II.5.4] que c'est un ensemble simplicial de présentation finie. La proposition 2.2.6 achève ainsi la démonstration. □

Corollaire 3.2.33. *Soit $\varphi : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ un morphisme de topos. Pour tout faisceau simplicial X sur $\mathcal{E}$, on a des isomorphismes canoniques*

$$\varphi^*\,\mathrm{Ex}\,X \simeq \mathrm{Ex}\,\varphi^* X \quad \text{et} \quad \varphi^*\,\mathrm{Ex}^\infty X \simeq \mathrm{Ex}^\infty \varphi^* X \ .$$

DÉMONSTRATION. Le premier isomorphisme est un cas particulier du lemme précédent. Le second est conséquence du premier, car φ^* commute aux petites limites inductives. □

LEMME 3.2.34. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. Le foncteur $\mathrm{Ex}^\infty : \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}$ respecte les fibrations locales et les hyper-recouvrements, et pour tout faisceau localement fibrant X, le morphisme $X \longrightarrow \mathrm{Ex}^\infty X$ est un équivalence locale. En outre, pour tout Δ-localisateur test géométrique $\mathcal{W}$, Ex^∞ respecte les faisceaux simpliciaux localement $\mathcal{W}$-fibrants.*

DÉMONSTRATION. Soit q un hyper-recouvrement (resp. une fibration locale). Alors pour tout point faible p de $\mathcal{E}$, pq est une fibration triviale (resp. une fibration de Kan), et donc comme le foncteur Sd respecte les monomorphismes (resp. en vertu de [**13**, corollaire 3.1.16]), il en est de même de $\mathrm{Ex}\, pq \simeq p\, \mathrm{Ex}\, q$ (3.2.32). Cela prouve que $\mathrm{Ex}\, q$ est un hyper-recouvrement (resp. une fibration locale). De la même manière, en utilisant cette fois [**13**, proposition 3.3.14], on montre que pour tout faisceau localement fibrant X, $X \longrightarrow \mathrm{Ex}\, X$ est une équivalence locale. Considérons à présent un Δ-localisateur test géométrique $\mathcal{W}$, ainsi qu'un faisceau simplicial localement $\mathcal{W}$-fibrant X. Alors pour tout point faible p de $\mathcal{E}$, $\mathrm{Ex}\, pX \simeq p\, \mathrm{Ex}\, X$ est un complexe de Kan qui a le même type d'homotopie que l'ensemble simplicial $\mathcal{W}$-fibrant pX. En vertu du lemme 3.2.24, $p\, \mathrm{Ex}\, X$ est par conséquent $\mathcal{W}$-fibrant. Cela montre que $\mathrm{Ex}\, X$ est localement $\mathcal{W}$-fibrant. Le lemme résulte à présent du corollaire 3.2.29. □

LEMME 3.2.35. *Pour tout faisceau simplicial X, $\mathrm{Ex}^\infty X$ est un faisceau localement fibrant, et le morphisme $X \longrightarrow \mathrm{Ex}^\infty X$ une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente.*

DÉMONSTRATION. Soit (C, J) un petit site. On adopte les notations de 1.1.1. Si X est un faisceau simplicial sur C, alors le morphisme $iX \longrightarrow \mathrm{Ex}^\infty iX$ est une ∞-équivalence argument par argument dont le but est un préfaisceau en complexes de Kan. En vertu de la proposition 3.1.19, il s'agit ainsi d'une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente de but localement fibrant. Le lemme 3.1.11 montre donc que l'image de ce morphisme par le foncteur faisceau associé a est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente. La pleine fidélité de i, la proposition 2.2.12, et le lemme 3.2.33 impliquent que $X \simeq aiX \longrightarrow a\, \mathrm{Ex}^\infty iX \simeq \mathrm{Ex}^\infty X$ est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente de but localement fibrant. □

LEMME 3.2.36. *Pour tout faisceau simplicial X, le morphisme $X \longrightarrow \mathrm{Ex}^\infty X$ induit un isomorphisme $\pi_0 X \simeq \pi_0\, \mathrm{Ex}^\infty X$.*

DÉMONSTRATION. Les préfaisceaux sur $\mathcal{E}$,

$$U \longmapsto \pi_0\, \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(U, X) \quad \text{et} \quad U \longmapsto \pi_0\, \mathrm{Ex}^\infty\, \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(U, X)$$

sont canoniquement isomorphes. Il en est par conséquent de même des faisceaux associés. □

PROPOSITION 3.2.37. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. Si $X \longrightarrow Y$ est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente dans $\mathbf{s}\mathcal{E}$, alors elle induit un isomorphisme $\pi_0(X) \simeq \pi_0(Y)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{W}$ la partie de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ formée des flèches induisant un isomorphisme après application du foncteur π_0. Alors $\mathcal{W}$ est un $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur.

L'axiome L1 est trivialement vérifié, et l'axiome L3 résulte du fait que le foncteur π_0 commute aux petites limites inductives. L'axiome L2 est quant à lui conséquence du fait que $\mathcal{W}$ contient les projections $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$, et du lemme 1.2.12. Il suffit donc d'établir que $\mathcal{W}$ contient tous les hyper-recouvrements. Si q est un hyper-recouvrement, en vertu du lemme 3.2.34, il en est de même de $\mathrm{Ex}^\infty q$, et le lemme 3.2.36 montre qu'il suffit de vérifier que ce dernier est dans $\mathcal{W}'$. Or cela résulte du lemme 3.2.35 et du corollaire 3.2.14. □

Corollaire 3.2.38. *Soient $\mathcal{W}$ un Δ-localisateur test géométrique, et $\mathcal{E}$ un topos. Alors toute équivalence de $\mathcal{W}$-descente induit un isomorphisme de faisceaux après application du foncteur π_0.*

Démonstration. Soit $\mathcal{W}'$ la partie de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ formée des flèches induisant un isomorphisme après application du foncteur π_0. On a vu dans la preuve de la proposition précédente que $\mathcal{W}'$ est un $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur qui contient les équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente. Or comme $\mathcal{W}$ est non trivial, il est immédiat que $\mathcal{W}'$ contient aussi les flèches de la forme

$$1_X \times j : X \times K \longrightarrow X \times L \quad , \quad X \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{E} \quad , \quad j : K \longrightarrow L \in \mathcal{W} \ ,$$

ce qui achève la démonstration en vertu de 3.1.8. □

Théorème 3.2.39. *Soient $\mathcal{W}$ un Δ-localisateur test géométrique propre, et $\mathcal{E}$ un topos. On considère un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de faisceaux simpliciaux localement $\mathcal{W}$-fibrants sur $\mathcal{E}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le morphisme f est une équivalence locale.*

(ii) *Le morphisme f est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente.*

(iii) *Le morphisme f est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente.*

Démonstration. L'implication (i) ⇒ (ii) résulte de la proposition 3.2.30, et l'implication (ii) ⇒ (iii) est triviale. La dernière implication se montre en plusieurs étapes. On suppose à présent que la condition (iii) est vérifiée.

3.2.39.1. *Pour tout objet U de $\mathcal{E}$, $X|_U \longrightarrow Y|_U$ est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente dans $\mathbf{s}\mathcal{E}/U$.*

Cela résulte aussitôt du fait que les équivalences de $\mathcal{W}$-descente sont stables par produits finis (3.1.17), ou bien encore du lemme 3.1.11.

3.2.39.2. *Soit T un faisceau simplicial fibrant au sens de la $\mathcal{W}$-descente sur $\mathcal{E}$. Alors pour toute cofibration $u : A \longrightarrow B$ de $\mathbf{s}\mathcal{E}$, le morphisme induit*

$$u^* : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(B,T) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(A,T)$$

est une fibration de $\mathcal{W}$-descente. Si en outre u est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente, alors u^* est une fibration triviale.

Cela résulte d'arguments d'adjonction standard et du fait que le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur de $\mathcal{W}$-descente est stable par produits finis.

3.2.39.3. *Soit X un faisceau simplicial localement $\mathcal{W}$-fibrant. Si le morphisme $X \longrightarrow *$ est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente, alors c'est une équivalence locale.*

Si T est un faisceau simplicial, on note $T^{\Delta_1} = \underline{\mathsf{Hom}}_{s\mathcal{E}}(\Delta_1, T)$. On sait que $\pi_0(X)$ est le faisceau final. Soient U un faisceau sur $\mathcal{E}$, et x une section de X au-dessus de U. Alors $X|_U$ est localement $\mathcal{W}$-fibrant, et la flèche $X|_U \longrightarrow U$ est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente. On factorise x en une $\mathcal{W}$-cofibration triviale $i : U \longrightarrow A$ suivie d'une fibration de $\mathcal{W}$-descente $p : A \longrightarrow X|_U$. Alors A est un faisceau simplicial injectif sur $\mathcal{E}/U$. Formons les carrés cartésiens ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
\Omega(X|_U, x) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "q"'] & \Omega' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "r"] & X|_U{}^{\Delta_1} \arrow[d, "(d^0,d^1)"] \\
U \arrow[r, "(i,i)"'] & A \times_U A \arrow[r, "p\times p"'] & X|_U \times_U X|_U
\end{tikzcd}$$

Vu que $\mathcal{W}$ est propre, $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$ l'est aussi (3.1.24), et comme $p \times_U p$ est une fibration de $\mathcal{W}$-descente, v est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente. D'autre part, $i \times_U i$ est une équivalence locale (au-dessus de U), et comme r est une fibration locale, u est une équivalence locale. Or la flèche d^0 et les projections $X|_U \times_U X|_U \longrightarrow X|_U$ sont des équivalences de $\mathcal{W}$-descente, ce qui implique qu'il en est de même de (d^0, d^1). On en déduit par propreté que r est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente. Par conséquent, il en en est de même de q. En itérant cette opération, on en déduit que pour tout entier $n \geq 1$, $\Omega^n(X|_U, x) \longrightarrow *$ est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente. En particulier, $\pi_n(X|_U, x)$ est isomorphe à U dans $\mathcal{E}$ pour tout entier $n \geq 1$ (3.2.38). Le théorème 3.2.20 permet donc de conclure.

3.2.39.4. *Si Y est fibrant au sens de la $\mathcal{W}$-descente, alors pour toute section globale x de X, le morphisme*

$$\Omega(X, x) \longrightarrow \Omega(Y, y) \quad , \qquad y = f(x)$$

est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente dont la source est localement $\mathcal{W}$-fibrante, et le but fibrant au sens de la $\mathcal{W}$-descente.

On commence par former les deux carrés cartésiens suivants.

$$\begin{tikzcd}
P(X,x) \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & X^{\Delta_1} \arrow[d, "(d^0,d^1)"] \\
X \arrow[r] \arrow[d] & X \times X \arrow[d, "pr_1"] \\
* \arrow[r, "x"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P(Y,y) \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Y^{\Delta_1} \arrow[d, "(d^0,d^1)"] \\
Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \times Y \arrow[d, "pr_1"] \\
* \arrow[r, "y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

On remarque aussitôt grâce à 3.2.39.2 et à la stabilité des fibrations de $\mathcal{W}$-descente par images réciproques que v est une fibration de $\mathcal{W}$-descente. Désignons par P' le produit fibré de $P(Y, y)$ et de X au-dessus de Y. Comme Comme $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$ est propre (théorème 3.1.24), le morphisme $P' \longrightarrow P(Y, y)$ est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente, et donc il en est de même du morphisme induit $P(X, x) \longrightarrow P$. Il résulte par conséquent de 3.2.39.3 que $P' \longrightarrow *$ est une équivalence locale. D'autre part, $\Omega(X, x)$ (resp. $\Omega(Y, y)$) est la fibre de u (resp. de v) au-dessus de x (resp. de v). Si on note Ω' la fibre de la projection de P' sur X au-dessus de x, il résulte de [**8**, §I.4, lemme 3] (appliqué à la variante pointée de la structure de catégorie d'objets fibrants 3.2.9) que le morphisme $\Omega(X,x) \longrightarrow \Omega'$ est une équivalence locale. Or le morphisme $\Omega' \longrightarrow \Omega(Y,y)$ est un isomorphisme. La proposition 3.2.30 implique donc que le morphisme canonique $\Omega(X,x) \longrightarrow \Omega(Y,y)$ est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente. Pour voir que $\Omega(Y,y)$ est fibrant au sens de la $\mathcal{W}$-descente, il suffit enfin de rappeler que v est une fibration de $\mathcal{W}$-descente.

3.2.39.5. *Si Y est fibrant au sens de la $\mathcal{W}$-descente, alors f est une équivalence locale.*

On sait que $\pi_0(f)$ est un isomorphisme. Soient U un objet de $\mathcal{E}$, et $x : U \longrightarrow X$ une section de X au-dessus de U. On sait que $f|_U$ est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente (3.2.39.1). Il est d'autre part immédiat que $X|_U$ est localement $\mathcal{W}$-fibrant et que $Y|_U$ est fibrant au sens de la $\mathcal{W}$-descente. En vertu de 3.2.39.4, pour tout entier $n \geq 1$, le morphisme de faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{E}/U$,

$$\Omega^n(X|_U, x) \longrightarrow \Omega^n(Y|_U, y) \quad , \qquad y = f(x) \ ,$$

est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente. Il résulte donc du corollaire 3.2.38 que

$$\pi_n(X|_U, x) \longrightarrow \pi_n(Y|_U, y)$$

est un isomorphisme. L'assertion résulte à présent du théorème 3.2.20.

3.2.39.6. *Le morphisme f est une équivalence locale.*

On choisit une équivalence de $\mathcal{W}$-descente de but fibrant au sens de la $\mathcal{W}$-descente, $j : Y \longrightarrow Y'$. En vertu de 3.2.39.5, j et jf sont des équivalences locales. Il en est donc de même de f. $\square$

3.2.40. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Pour tout faisceau simplicial X sur $\mathcal{E}$, comme $\operatorname{Sd} \Delta_0 \simeq \Delta_0$, on a des isomorphismes canoniques $X_0 \simeq (\operatorname{Ex} X)_0 \simeq (\operatorname{Ex}^\infty X)_0$. Si en outre X est localement fibrant, le morphisme $X \longrightarrow \operatorname{Ex}^\infty X$ est une équivalence locale, et $\operatorname{Ex}^\infty X$ est encore localement fibrant (3.2.34), ce qui implique que $\pi_0(X) \simeq \pi_0(\operatorname{Ex}^\infty X)$ et qu'on a des isomorphismes canoniques au-dessus de X_0, $\pi_n(X) \simeq \pi_n(\operatorname{Ex}^\infty X)$ pour $n \geq 1$ (3.2.20). Si X est un faisceau simplicial quelconque, on définit pour $n \geq 1$ son *n-ème faisceau d'homotopie* par la formule abusive $\pi_n(X) = \pi_n(\operatorname{Ex}^\infty X)$. Il s'agit d'un faisceau sur X_0, et ce qui précède montre que dans le cas où X est localement fibrant, on en revient à un objet connu.

Corollaire 3.2.41. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. On considère un morphisme de faisceaux simpliciaux $f : X \longrightarrow Y$ sur $\mathcal{E}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le morphisme f est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente.*

(ii) *Le morphisme $\operatorname{Ex}^\infty f$ est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente.*

(iii) *Le morphisme $\operatorname{Ex}^\infty f$ est une équivalence locale.*

(iv) *Le morphisme f induit un isomorphisme*

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y) \ ,$$

et pour tout entier $n \geq 1$, un carré cartésien

$$
\begin{tikzcd}
\pi_n(X) \arrow[r, "\pi_n(f)"] \arrow[d] & \pi_n(Y) \arrow[d] \\
X_0 \arrow[r, "f_0"'] & Y_0
\end{tikzcd} \quad .
$$

DÉMONSTRATION. L'équivalence entre (i) et (ii) résulte du lemme 3.2.35, et celle entre (ii) et (iii) du théorème 3.2.39 (puisque $\mathcal{W}_\infty$ est propre). Le théorème 3.2.20 achève donc la démonstration. □

SCHOLIE 3.2.42. L'hypothèse de propreté sur $\mathcal{W}$ est en fait inutile dans l'énoncé du théorème 3.2.39 (mais nous n'utiliserons pas par la suite l'énoncé général). Une possibilité de démonstration consiste à passer par les localisations booléennes. Considérons un topos booléen $\mathcal{B}$ satisfaisant l'axiome du choix (*i.e.* tel que tout épimorphisme admette une section). Alors les objets de $\mathcal{B}$ forment une famille conservative de points faibles de $\mathcal{B}$ (2.1.15). On en déduit facilement que si S est une famille géométrique, un morphisme de faisceaux simpliciaux $q : X \longrightarrow Y$ sur $\mathcal{B}$ vérifie la propriété de relèvement local à droite relativement à S si et seulement s'il existe une famille génératrice $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}$ telle que pour tout $B \in \mathcal{F}$, $X(B) \longrightarrow Y(B)$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à S. Cela équivaut encore à demander que q vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux morphismes de la forme

$$1_B \times j : B \times K \longrightarrow B \times L \quad , \qquad j \in S \ , \ B \in \mathcal{F} \ .$$

On peut prendre pour famille génératrice $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-objets de l'objet final de $\mathcal{B}$. On vérifie alors que les morphismes de la forme

$$\varnothing \longrightarrow B \quad , \qquad \text{pour tous } B \subset *$$

forment une un modèle cellulaire de $\mathcal{B}$. Il résulte donc ce qui précède et du lemme 3.1.16 que les hyper-recouvrements de $\mathbf{s}\mathcal{B}$ sont simplement les fibrations triviales. Plus généralement, si $\mathcal{W}$ est un Δ-localisateur géométrique, un faisceau simplicial X sur $\mathcal{B}$ est localement $\mathcal{W}$-fibrant si et seulement s'il est fibrant au sens de la $\mathcal{W}$-descente (cela a déjà été remarqué par Rezk [**56**] dans le cas de $\mathcal{W}_\infty$). Cela implique que l'énoncé du théorème 3.2.39 est trivialement vérifié dans ce cas : les équivalences de $\mathcal{W}$-descente entre faisceaux simpliciaux fibrants sont simplement les $\mathit{\Delta}_1$-équivalences d'homotopie.

Considérons à présent un topos $\mathcal{E}$, et un épimorphisme de topos $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{E}$ dont la source est un topos booléen satisfaisant l'axiome du choix (cf. 2.1.15). Si q est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente entre faisceaux simpliciaux localement $\mathcal{W}$-fibrants (pour un Δ-localisateur géométrique $\mathcal{W}$), alors il en est de même de $\varphi^* q$ (3.1.11). D'après de qui précède, $\varphi^* q$ est une équivalence locale. La caractérisation des équivalences locales en terme de faisceaux d'homotopie (3.2.20) et le fait que le foncteur image inverse φ^* est conservatif et commute à la formation des faisceaux d'homotopie (d'après 3.2.16 et 3.2.33) impliquent alors que q est une équivalence locale.

3.2.43. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Pour chaque faisceau simplicial localement fibrant X sur $\mathcal{E}$, on note $\pi\mathsf{HR}(X)$ le catégorie dont les objets sont les hyper-recouvrements de but X, et dont les morphismes sont les classes d'homotopie de morphismes au-dessus de X. Cette catégorie est cofiltrante (cela résulte de [**8**, § I.2, proposition 2 et remarque 2]). Si X et Y sont deux faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{E}$, on note $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes entre X et Y.

Corollaire 3.2.44. *Pour tous faisceaux simpliciaux localement fibrants X et Y sur $\mathcal{E}$, on a une bijection canonique*

$$\varinjlim_{X' \longrightarrow X \in \pi\mathsf{HR}(X)^\circ} [X', Y] \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}_\infty} \mathbf{s}\mathcal{E}}(X, Y) \ .$$

Démonstration. Le corollaire 3.2.41 implique que l'inclusion $\mathbf{s}\mathcal{E}_{loc} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}$ induit une équivalence de catégories entre les catégories localisées (par les équivalences locales et par les équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente respectivement), un quasi-inverse pouvant être construit par exemple grâce au foncteur Ex^∞ (3.2.35). L'assertion résulte donc du théorème 3.2.6, et de [**8**, § I.2, théorème 1 et remarque 2]. □

Corollaire 3.2.45. *Le foncteur canonique $\mathcal{E} \longrightarrow \mathsf{Ho}_{\mathcal{W}_\infty} \mathbf{s}\mathcal{E}$ est pleinement fidèle.*

Remarque 3.2.46. Le corollaire 3.2.44 reste valide si on remplace $\mathcal{W}_\infty$ par un Δ-localisateur géométrique (propre), et si on suppose que X et Y sont localement $\mathcal{W}$-fibrants.

3. Localisateurs réguliers

Théorème 3.3.1. *Soit (C, J) un petit site. Le $\mathbf{s}\widehat{C}$-localisateur de $(\mathcal{W}_\infty, J)$-descente (*3.1.21*) est engendré par les $\mathcal{W}_\infty$-équivalences étagées et par les J-hyper-recouvrements de la forme*

$$X \longrightarrow U \quad , \qquad U \in \mathsf{Ob}\, C \ .$$

Démonstration. Soit $\mathcal{W}$ le $\mathbf{s}\widehat{C}$-localisateur engendré par les $\mathcal{W}_\infty$-équivalences étagées et par les J-hyper-recouvrements de la forme $X \longrightarrow U$, $U \in \mathsf{Ob}\, C$. Il est évident que toute $\mathcal{W}$-équivalence est une équivalence de $(\mathcal{W}_\infty, J)$-descente. D'autre part, il résulte de [**13**, proposition 4.4.24] que $\mathcal{W}$ est régulier. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $\mathbf{s}\widehat{C}$. En procédant à des factorisations adéquates, on peut choisir un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & Y' \end{tikzcd}$$

dans lequel i et j sont des $\mathcal{W}_\infty$-équivalences étagées, X' et Y' sont des préfaisceaux en complexes de Kan sur C, et q une fibration de Kan argument par argument. On remarque que les conditions suivantes sont équivalentes (3.2.9 et 3.2.41).

(a) Le morphisme f est une équivalence de $(\mathcal{W}_\infty, J)$-descente.

(b) Le morphisme q est une équivalence de $(\mathcal{W}_\infty, J)$-descente.

(c) Le morphisme q est un J-hyper-recouvrement.

Supposons à présent que q soit un J-hyper-recouvrement, et considérons un objet U de C, un entier $n \geq 0$, et un morphisme $s : U \times \Delta_n \longrightarrow Y'$. L'inclusion $\{0\} \longrightarrow \Delta_n$ est un rétracte par déformation fort (pour la Δ_1-homotopie), et par conséquent, si on forme les carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
(U \times \{0\}) \times_{Y'} X' \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "q_0"'] & (U \times \Delta_n) \times_{Y'} X' \arrow[r] \arrow[d, "q_n"'] & X' \arrow[d, "q"] \\
U \times \{0\} \arrow[r] & U \times \Delta_n \arrow[r, "s"'] & Y'
\end{tikzcd} ,$$

il résulte de [**13**, lemme 2.4.10] que le morphisme i_0 est une $\mathcal{W}_\infty$-équivalence étagée. Or q_0 est un J-hyper-recouvrement, et comme $U \simeq U \times \{0\}$ est un objet de C, q_0 est une $\mathcal{W}$-équivalence. On en déduit que q_n est aussi une $\mathcal{W}$-équivalence. En vertu de [**13**, corollaire 4.4.31], le morphisme q est donc une $\mathcal{W}$-équivalence, ce qui prouve le théorème. $\square$

3.3.2. On note Asph la sous-catégorie pleine de $\widehat{\Delta}$ dont les objets sont les ensembles simpliciaux de présentation finie $\mathcal{W}_\infty$-asphériques. L'inclusion pleine i : $\mathsf{Asph} \longrightarrow \widehat{\Delta}$ se prolonge en un foncteur commutant aux petites limites inductives

$$i_! : \widehat{\mathsf{Asph}} \longrightarrow \widehat{\Delta} \ .$$

Ce dernier est pleinement fidèle sur la sous-catégorie des ind-objets indexés par Asph. Pour le voir, on considère la sous-catégorie pleine Prf de $\widehat{\Delta}$ dont les objets sont les ensembles simpliciaux de présentation finie, et $j : \mathsf{Prf} \longrightarrow \widehat{\Delta}$ le foncteur d'inclusion. L'extension de Kan à gauche de j

$$j_! : \widehat{\mathsf{Prf}} \longrightarrow \widehat{\Delta}$$

induit une équivalence de catégories entre la catégorie des ind-objets indexés par Prf et la catégorie des ensembles simpliciaux (cela résulte du fait que l'adjoint à droite de $j_!$ commute aux petites limites inductives filtrantes). Pour conclure, il suffit donc de constater que l'inclusion k de Asph dans Prf induit un foncteur pleinement fidèle

$$k_! : \widehat{\mathsf{Asph}} \longrightarrow \widehat{\mathsf{Prf}} \ ,$$

ce qui résulte formellement de la pleine fidélité de k.

Plus généralement, si $\mathcal{E}$ est un topos, on obtient un foncteur pleinement fidèle

$$i_! : \mathsf{Indloc}(\mathsf{Asph}, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{s}\mathcal{E} \ .$$

Un faisceau simplicial X sera dit *localement asphérique* s'il est dans l'image essentielle de ce foncteur, ou de manière équivalente, s'il est un ind-objet local indexé par Asph, c'est-à-dire encore une limite inductive locale d'ensembles simpliciaux asphériques et de présentation finie (cf. 2.3.13).

LEMME 3.3.3. *Pour tout complexe de Kan contractile X, la catégorie Asph/X est filtrante.*

Démonstration. Vu que X est en particulier contractile, il est non vide, et l'inclusion canonique $\Delta/X \longrightarrow \mathsf{Asph}/X$ montre donc que Asph/X est non vide. Pour montrer les autres axiomes, on va utiliser la construction suivante. Soit K un ensemble simplicial. On note K_+ l'ensemble simplicial $K \amalg \varDelta_0$, pointé par $\varDelta_0$. On définit le *cône de* K par $C(K) = K_+ \wedge \varDelta_1$. Comme $\varDelta_1$ est contractile, il est clair que $C(K)$ est asphérique. D'autre part, $S^0 = \varDelta_{0+}$ s'identifie canoniquement au bord de $\varDelta_1$, et par conséquent, l'inclusion canonique $S^0 \longrightarrow \varDelta_1$ induit un monomorphisme $K_+ \simeq K_+ \wedge S^0 \longrightarrow K_+ \wedge \varDelta_1$. L'inclusion canonique de K dans K_+ induit de la sorte un monomorphisme naturel $i_K : K \longrightarrow C(K)$. Il est remarquable que si K est un ensemble simplicial de présentation finie, alors il en est de même de son cône. Considérons à présent deux ensembles simpliciaux asphériques de présentation finie K et K', ainsi que deux morphismes $u : K \longrightarrow X$ et $u' : K' \longrightarrow X$. La flèche $i_{K \amalg K'}$ étant un monomorphisme, il existe un morphisme $v : C(K \amalg K') \longrightarrow X$ tel que $v i_{K \amalg K'} = (u, u')$. De même, si K est un ensemble simplicial de présentation finie, $u : K \longrightarrow X$ un morphisme d'ensemble simpliciaux, pour tout ensemble simplicial asphérique de présentation finie K', et toutes flèches v et v' de K' vers K telles que $uv = uv'$, si L désigne le coégalisateur de v et v', il existe un morphisme $w : C(L) \longrightarrow X$ tel que $w i_L$ soit la flèche canonique de L vers X induite par u. Cela prouve le lemme. $\square$

Théorème 3.3.4. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. Tout hyper-recouvrement X de $\mathcal{E}$ (plus précisément du faisceau final sur $\mathcal{E}$) est localement asphérique.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que le préfaisceau en catégories Asph/X est localement filtrant. Or on vérifie immédiatement que pour tout point faible p de $\mathcal{E}$, $p(\mathsf{Asph}/X) \simeq \mathsf{Asph}/p(X)$, ce qui permet d'invoquer le lemme ci-dessus. $\square$

Remarque 3.3.5. On peut aussi montrer de manière analogue que si I est un faisceau en catégories localement filtrant sur $\mathcal{E}$, alors son nerf est un faisceau simplicial localement asphérique. En fait, on peut montrer que c'est un limite inductive locale d'ensembles ordonnés finis admettant un élément maximal (exercice laissé au lecteur).

3.3.6. On énonce aux deux prochains numéros l'analogue de [**13**, propositions 4.1.30 et 4.1.27], dont les démonstrations restent inchangées dans le cadre des $\mathcal{E}$-localisateurs.

Proposition 3.3.7. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, et $\mathcal{W}$ un $\mathcal{E}$-localisateur. On considère le triangle commutatif suivant dans $\mathcal{C}at$.*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & J \arrow[dl, "w"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

On rappelle que si C est une petite catégorie, on note p_C le foncteur de C vers la catégorie ponctuelle. Si j est un objet de J, on note de la même manière $j : e \longrightarrow J$ le foncteur de la catégorie ponctuelle e vers J correspondant, et $\xi(u, j)$ désigne le foncteur d'oubli canonique de I/j vers I.

1. *Le foncteur*
$$u^* : \mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\ \mathrm{s}\mathcal{E}^J \longrightarrow \mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\ \mathrm{s}\mathcal{E}^I$$
admet un adjoint à gauche
$$\mathsf{L}u_! : \mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\ \mathrm{s}\mathcal{E}^I \longrightarrow \mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\ \mathrm{s}\mathcal{E}^J\ ,$$
et ce dernier est le foncteur dérivé à gauche du foncteur
$$u_! : \mathcal{E}^I \longrightarrow \mathcal{E}^J\ .$$
Lorsque J est la catégorie ponctuelle, on note parfois $\mathsf{L}\varinjlim_I$, ou plus simplement $\mathsf{L}\varinjlim$, le foncteur $\mathsf{L}p_{I!}$.
2. *Pour tout objet j de J, on a un isomorphisme de foncteurs canonique dans $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\ \mathrm{s}\mathcal{E}$*
$$j^*\,\mathsf{L}u_! \simeq \mathsf{L}p_{I/j\,!}\,\xi(u,j)^*\ .$$
3. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*
   (a) *Pour tout objet s de S, le morphisme $\mathsf{L}p_{I/s\,!}\,p^*_{I/s} \longrightarrow \mathsf{L}p_{J/s\,!}\,p^*_{J/s}$, induit par $u/s : I/s \longrightarrow J/s$, est un isomorphisme dans $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\ \mathrm{s}\mathcal{E}$.*
   (b) *Le morphisme canonique $\mathsf{L}v_!\,p^*_I \longrightarrow \mathsf{L}w_!\,p^*_J$ est un isomorphisme.*
4. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*
   (a) *Pour tout objet s de S, le morphisme $\mathsf{L}p_{s\backslash I\,!}\,p^*_{s\backslash I} \longrightarrow \mathsf{L}p_{s\backslash J\,!}\,p^*_{s\backslash J}$, induit par $s\backslash u : s\backslash I \longrightarrow s\backslash J$, est un isomorphisme dans $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\ \mathrm{s}\mathcal{E}$.*
   (b) *Le morphisme canonique $\mathsf{L}p_{I!}\,v^* \longrightarrow \mathsf{L}p_{J!}\,w^*$ est un isomorphisme.*

PROPOSITION 3.3.8. *On considère deux topos $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, un $\mathcal{E}$-localisateur $\mathcal{W}$, un $\mathcal{F}$-localisateur $\mathcal{W}'$, et un foncteur $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ qui commute aux petites limites inductives, respecte les monomorphismes, et envoie les $\mathcal{W}$-équivalences sur des $\mathcal{W}'$-équivalences. Alors pour chaque petite catégorie I, φ induit un foncteur*
$$\varphi : \mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathcal{E}^I \longrightarrow \mathsf{Ho}_{\mathcal{W}'}\,\mathcal{F}^I\ ,$$
et pour tout foncteur $u : I \longrightarrow J$ entre petites catégories, il existe un isomorphisme canonique
$$\mathsf{L}u_!\,\varphi \xrightarrow{\ \sim\ } \varphi\,\mathsf{L}u_!\ .$$

THÉORÈME 3.3.9. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. On considère un $\mathrm{s}\mathcal{E}$-localisateur $\mathcal{W}$. On suppose que pour tout faisceau simplicial X, la projection $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Toute équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

(ii) *Il existe une petite famille génératrice $\mathcal{U}$ de $\mathcal{E}$ telle que pour tout élément U de $\mathcal{U}$, tout hyper-recouvrement de U soit une $\mathcal{W}$-équivalence.*

(iii) *Pour toute petite catégorie C, pour tout faisceau X sur $\mathcal{E}$, et tout morphisme de topos $\varphi : \mathcal{E}/X \longrightarrow \widehat{C}$, le foncteur image inverse*
$$\varphi^* : \mathrm{s}\widehat{C} \longrightarrow \mathrm{s}\mathcal{E}/X$$
envoie les $\mathcal{W}_\infty$-équivalences étagées sur des $\mathcal{W}$-équivalences.

(iv) *Pour toute petite catégorie I, tout foncteur relativement plat $F : I \longrightarrow \mathcal{E}$, la flèche canonique $\mathsf{L}\varinjlim F \longrightarrow \varinjlim F$ est un isomorphisme dans $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{s}\mathcal{E}$.*

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Cela résulte du théorème 3.3.1 et de la proposition 3.1.22.
(i) $\Rightarrow$ (iii). Il s'agit d'une spécialisation du lemme 3.1.11.
(iii) $\Rightarrow$ (iv). Soient I une petite catégorie, et $F : I \longrightarrow \mathcal{E}$ un foncteur plat. Pour tout faisceau X sur $\mathcal{E}$, le foncteur d'oubli canonique

$$\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{s}\mathcal{E}/X \longrightarrow \mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{s}\mathcal{E}$$

commute aux colimites homotopiques (3.3.8). Quitte à remplacer $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}/\varinjlim F$, on peut donc supposer que F est plat. Soit $h : I \longrightarrow \widehat{I}$ le plongement de Yoneda. On sait que $\varinjlim h$ est le préfaisceau final sur I et que le morphisme canonique

$$\mathsf{L}\varinjlim h \longrightarrow \varinjlim h$$

est un isomorphisme dans $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{s}\widehat{I}$. En effet, il résulte de [**13**, proposition 4.4.24] que la colimite homotopique du plongement de Yoneda

$$h' : I \times \Delta \longrightarrow \widehat{I \times \Delta}$$

est l'objet final de $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{s}\widehat{I}$. Comme tous les simplexes Δ_n sont contractiles, ce foncteur est isomorphe dans $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{s}\widehat{I}$ au foncteur q^*h, q désignant la projection de $I \times \Delta$ sur I. Comme Δ est asphérique, le foncteur q est coasphérique (cf. [**13**, 1.1.8]), et donc il résulte du numéro 4 de la proposition 3.3.7 que le morphisme

$$\mathsf{L}\varinjlim q^*h \longrightarrow \mathsf{L}\varinjlim h$$

est un isomorphisme dans $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{s}\widehat{I}$. On en déduit bien des isomorphismes

$$\mathsf{L}\varinjlim h' \simeq \mathsf{L}\varinjlim q^*h \simeq \mathsf{L}\varinjlim h\ ,$$

ce qui prouve l'assertion. Comme le foncteur

$$F_! : \widehat{I} \longrightarrow \mathcal{E}$$

est le foncteur image inverse d'un morphisme de topos, une nouvelle application de la proposition 3.3.8 montre que le foncteur

$$F_! : \mathsf{Ho}_{\mathcal{W}^{\widehat{I}}_{\infty}}\,\mathbf{s}\widehat{I} \longrightarrow \mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{s}\mathcal{E}$$

commute aux petites colimites homotopiques. Comme il respecte aussi les équivalences faibles, on en déduit des isomorphismes canoniques dans $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{s}\mathcal{E}$:

$$F_!\varinjlim h \simeq F_!\mathsf{L}\varinjlim h \simeq \mathsf{L}\varinjlim F_!h \simeq \mathsf{L}\varinjlim F$$

Le foncteur $F_!$ étant exact, il envoie en particulier le préfaisceau final sur I sur le faisceau final sur $\mathcal{E}$, ce qui achève la démonstration de cette implication.
(iv) $\Rightarrow$ (ii). Pour montrer cette implication, comme pour tout faisceau X sur $\mathcal{E}$, le foncteur d'oubli $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{s}\mathcal{E}/X \longrightarrow \mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{s}\mathcal{E}$ commute aux colimites homotopiques (3.3.8), il suffit de vérifier qu'en admettant (iii), tout hyper-recouvrement du faisceau final sur $\mathcal{E}$ est $\mathcal{W}$-asphérique. Or cela résulte du théorème 3.3.4, et des propositions 2.3.13 et 2.3.4. $\square$

DÉFINITION 3.3.10. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un $\mathcal{E}$-localisateur $\mathcal{W}$ est *régulier* si pour toute petite catégorie I et tout foncteur relativement plat $F : I \longrightarrow \mathcal{E}$, le morphisme canonique $\mathsf{L}\varinjlim F \longrightarrow \varinjlim F$ est un isomorphisme dans $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathcal{E}$.

REMARQUE 3.3.11. Tout $\mathcal{E}$-localisateur contenant un $\mathcal{E}$-localisateur régulier est lui-même régulier. En effet, la proposition 3.3.8 appliquée à l'identité de $\mathcal{E}$ montre que la construction des colimites homotopiques ne dépend pas des $\mathcal{E}$-localisateurs. Si $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{E}$-localisateur, la *complétion réglière de* $\mathcal{W}$ est le plus petit localisateur régulier contenant $\mathcal{W}$, *i.e.* le $\mathcal{E}$-localisateur engendré par $\mathcal{W}$ et par les flèches de la forme $\mathsf{L}\varinjlim F \longrightarrow \varinjlim F$ pour tout foncteur relativement plat F à valeurs dans $\mathcal{E}$.

3.3.12. Soient $\mathcal{E}$ un topos, et $\mathcal{W}$ un $\mathcal{E}$-localisateur. La *complétion simpliciale de* $\mathcal{W}$ est le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$ engendré par $\mathcal{W}^{\Delta^\circ}$ et par les projections de la forme $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$, X parcourant l'ensemble des faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{E}$.

PROPOSITION 3.3.13. *Le foncteur canonique* $\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}$ *induit une équivalence de catégories homotopiques* $\mathsf{Ho}_{\mathcal{W}}\,\mathcal{E} \simeq \mathsf{Ho}_{\mathcal{W}_\Delta}\,\mathbf{s}\mathcal{E}$. *En particulier, un morphisme de* $\mathcal{E}$ *est une* $\mathcal{W}$*-équivalence si et seulement si son image dans* $\mathcal{E}$ *est une* $\mathcal{W}_\Delta$*-équivalence. En outre, pour que* $\mathcal{W}$ *soit accessible (resp. propre), il faut et il suffit que* $\mathcal{W}_\Delta$ *le soit.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte de considérations parfaitement analogues à celles développées pour démontrer [**13**, corollaire 3.3.21], à ceci près que pour avoir tous les outils nécessaires aux constructions décrites dans [**13**, § 3.3], il faut justifier l'existence de *résolutions cosimpliciales* au sens de [**13**, définition 3.3.7]. Or il s'agit ici simplement d'un *frame cosimplicial* du faisceau final au sens de [**35**, définition 5.2.7]. □

LEMME 3.3.14. *Un* $\mathcal{E}$*-localisateur est régulier si et seulement si sa complétion complétion simpliciale contient les équivalences de* $\mathcal{W}_\infty$*-descente.*

DÉMONSTRATION. Il résulte aussitôt de la proposition 3.3.8 appliquée au foncteur canonique $\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}$ et de la proposition précédente que la complétion simpliciale d'un $\mathcal{E}$-localisateur vérifie la condition (iv) du théorème 3.3.9 si et seulement si le dit $\mathcal{E}$-localisateur est régulier. □

3.3.15. Ce lemme montre que lorsque $\mathcal{E}$ est une catégorie de préfaisceaux sur une petite catégorie A, les notions de $\mathcal{E}$-localisateur régulier et de A-localisateur régulier au sens de [**13**, définition 4.4.4] coïncident (cf. [**13**, théorème 4.4.25]).

PROPOSITION 3.3.16. *Les équivalences de* $\mathcal{W}_\infty$*-descente forment le* $\mathbf{s}\mathcal{E}$*-localisateur régulier engendré par les projections de la forme* $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$, $X \in \mathsf{Ob}\,\mathbf{s}\mathcal{E}$.

DÉMONSTRATION. En procédant de manière analogue à la preuve de [**13**, proposition 3.3.20], on vérifie qu'un morphisme de faisceaux bisimpliciaux est dans la complétion simpliciale des équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente si et seulement si sa diagonale est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente. (voir aussi au besoin [**13**, corollaire 3.3.12]). Le même argument montre aussi que si $X \longrightarrow Y$ est un morphisme de faisceaux simpliciaux tel que pour tout entier $n \geq 0$, $X_{\bullet,n} \longrightarrow Y_{\bullet,n}$ est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente, alors sa diagonale est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente. Il résulte donc du lemme 3.3.14 que les équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente forment un $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur régulier. La réciproque résulte d'un calcul similaire à celui explicité dans la preuve du théorème 3.3.9. □

THÉORÈME 3.3.17. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un $\mathcal{E}$-localisateur est régulier si et seulement si sa complétion simpliciale l'est.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'une conséquence directe de la proposition ci-dessus et du lemme 3.3.14. □

COROLLAIRE 3.3.18. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. Le $\mathcal{E}$-localisateur régulier minimal est propre et stable par produits finis.*

DÉMONSTRATION. La complétion simpliciale du $\mathcal{E}$-localisateur régulier minimal est le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur engendré par les équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente et par la complétion simpliciale du $\mathcal{E}$-localisateur minimal. Les équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente et le $\mathcal{E}$-localisateur minimal étant des localisateurs propres et stables par produits finis (cf. 3.1.24, 1.2.19 (c) et 1.2.25), la proposition 3.3.13, le théorème 1.2.25 et le corollaire 1.2.19 impliquent l'assertion. □

COROLLAIRE 3.3.19. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. La complétion régulière d'un $\mathcal{E}$-localisateur accessible (resp. propre) est accessible (resp. propre).*

DÉMONSTRATION. Cela résulte aussitôt du théorème 1.2.25 et de la proposition 3.3.13. □

COROLLAIRE 3.3.20. *Pour tout topos $\mathcal{E}$, tout $\mathcal{E}$-localisateur régulier est stable par petites limites inductives filtrantes.*

DÉMONSTRATION. Les équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente étant stables par petites limites inductives filtrantes (3.1.15), pour tout diagramme filtrant de faisceaux simpliciaux F sur $\mathcal{E}$, le morphisme canonique $\mathsf{L}\varinjlim F \longrightarrow \varinjlim F$ est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente. Par conséquent, tout $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur contenant les équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente est stable par petites limites inductives filtrantes. L'assertion résulte donc de la proposition 3.3.13 et du lemme 3.3.14. □

EXEMPLE 3.3.21. Soit G un groupe fini. La catégorie $\mathbf{s}\widehat{G}$ des G-ensembles simpliciaux (à droite) admet une structure de catégorie de modèles fermée propre à engendrement cofibrant dont les cofibrations sont les monomorphismes, et les équivalences faibles, les flèches $X \longrightarrow Y$ telles que pour tout sous-groupe H de G, le morphisme d'ensembles simpliciaux $X^H \longrightarrow Y^H$ soit une $\mathcal{W}_\infty$-équivalence. En vertu du théorème 1.2.15, les équivalences faibles de cette structure forme un $\mathbf{s}\widehat{G}$-localisateur propre $\mathcal{W}$. Il est par ailleurs évident que pour tout objet X de $\mathbf{s}\widehat{G}$, la projection $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$ est dans $\mathcal{W}$. Mais si G n'est pas trivial, $\mathcal{W}$ n'est pas régulier : en effet, le plus petit $\mathbf{s}\widehat{G}$-localisateur régulier contenant les équivalences d'homotopie simpliciales est en vertu de 3.3.14 formé des flèches qui sont des $\mathcal{W}_\infty$-équivalences après oubli de l'action de G. Or il est facile de trouver un G-ensemble simplicial sans points fixes dont le type d'homotopie est trivial après oubli de l'action de G (par exemple le groupoïde simplement connexe associé à l'ensemble sous-jacent à G, muni de l'action par translations à droite).

4. Descente homotopique

3.4.1. On fixe pour la suite un Δ-localisateur test $\mathcal{W}$, un topos $\mathcal{E}$, ainsi qu'une petite *catégorie génératrice* C de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ telle que $\mathsf{Ob}\, C$ forme une famille génératrice de $\mathcal{E}$. Si X est un faisceau sur $\mathcal{E}$, et R un crible couvrant de X (*i.e.* un crible de $\mathcal{E}/X$, couvrant pour la toplogie canonique), on note C/R la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}/X$ dont les objets sont les flèches de la forme $v : U \longrightarrow X$, telles que $U \in \mathsf{Ob}\, C$, et $v \in R$. On a un foncteur évident

$$\phi_X^{C,R} : C/R \longrightarrow \mathcal{E} \ ,$$

et un morphisme évident

$$\varinjlim \phi_X^{C,R} \longrightarrow X \ ,$$

lequel s'avère être un isomorphisme. Dans le cas où R est le crible trivial (*i.e.* lorsque $R = X$), on note plus simplement $\phi_X^C = \phi_X^{C,R}$. Le foncteur ϕ_X^C est alors appelé le *diagramme de descente de X le long de C.*

Proposition 3.4.2. *Pour tout faisceau X sur $\mathcal{E}$, le morphisme canonique*

$$\mathsf{L}\varinjlim \phi_X^{C,R} \longrightarrow X$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Le foncteur $\phi_X^{C,R}$ étant par définition relativement plat, il s'agit d'une spécialisation du critère (v) du théorème 3.3.9. □

Corollaire 3.4.3. *Si $\varphi : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ est un morphisme de topos, alors pour tout faisceau X sur $\mathcal{E}$, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathsf{L}\varinjlim \varphi^* \phi_X^{C,R} \longrightarrow \varphi^* X$$

Démonstration. En vertu du lemme 3.1.11 et de la proposition 3.3.8, on a un isomorphisme canonique

$$\mathsf{L}\varinjlim \varphi^* \phi_X^{C,R} \simeq \varphi^* \mathsf{L}\varinjlim \phi_X^{C,R} \ .$$

L'assertion résulte donc de la proposition précédente par fonctorialité. □

3.4.4. On suppose à présent que le Δ-localisateur $\mathcal{W}$ est accessible.

Soit $\mathcal{E}$ un topos. On note $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$ la *catégorie dérivée de $\mathcal{E}$*, localisation de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ par les équivalences de $\mathcal{W}$-descente. Si $\mathcal{P}$ est le topos ponctuel, $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{P}) = \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$ est la catégorie homotopique, localisée de la catégorie des ensembles simpliciaux par les $\mathcal{W}$-équivalences. Si $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$, on écrit plus simplement $\mathsf{Hot}(\mathcal{E}) = \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}_\infty}(\mathcal{E})$.

Si $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ est un morphisme de topos, le foncteur image inverse $\varphi^* : \mathbf{s}\mathcal{E}' \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}$ respecte les équivalences de $\mathcal{W}$-descente (3.1.11), et induit donc un foncteur image inverse, encore noté

$$\varphi^* : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}') \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) \ ,$$

lequel admet en vertu de 3.1.12 un adjoint à droite, appelé le *foncteur image directe homotopique*,

$$\mathsf{R}\varphi_* : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}') \ .$$

En particulier, si $p_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{P}$ est le morphisme vers le topos ponctuel, on note $X \longmapsto \Gamma(\mathcal{E}, X)$ le foncteur image directe $p_{\mathcal{E}*}$. On obtient de la sorte un foncteur *sections globales homotopiques*

$$\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, ?) = \mathsf{R}p_{\mathcal{E}*} : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}} \quad , \qquad X \longmapsto \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, X) \ .$$

Si X est un faisceau simplicial sur $\mathcal{E}$, on dit que $\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, X)$ est la *cohomologie de $\mathcal{E}$ à coefficients dans X*.

Lemme 3.4.5. *Soient $\mathcal{E} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}' \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{E}''$ deux morphismes composables de topos. Alors on a un isomorphisme canonique dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}'')$*

$$\mathsf{R}\varphi'_*\, \mathsf{R}\varphi_* \simeq \mathsf{R}(\varphi'\, \varphi)_* \ .$$

Démonstration. Cet isomorphisme correspond par transposition à l'isomorphisme évident $\varphi^*\, {\varphi'}^* \simeq (\varphi'\, \varphi)^*$ □

Lemme 3.4.6. *Soient $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$ deux Δ-localisateurs accessibles, et $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ un morphisme de topos. Le diagramme suivant commute à isomorphisme de foncteurs canonique près (les flèches horizontales sont les adjoints à droite des foncteurs de localisation).*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}'}(\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{R}\varphi_*"'] & \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) \arrow[d, "\mathsf{R}\varphi_*"] \\
\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}'}(\mathcal{E}') \arrow[r] & \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}')
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Comme les foncteurs images inverses respectent les équivalences de $\mathcal{W}$-descente et de $\mathcal{W}'$-descente, on a le carré commutatif ci-dessous, où cette fois les flèches horizontales sont les foncteurs de localisation.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}') \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^*"'] & \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}'}(\mathcal{E}') \arrow[d, "\varphi^*"] \\
\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}'}(\mathcal{E})
\end{tikzcd}$$

Le carré de l'énoncé s'obtient à partir de celui-ci par transposition, ce qui prouve le lemme. □

3.4.7. Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux topos, on note $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ le produit de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ dans la 2-catégorie des topos. Autrement dit, on a deux projections canoniques

$$p : \mathcal{E} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \quad \text{et} \quad q : \mathcal{E} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

telles que pour tout topos $\mathcal{X}$, le foncteur

$$\mathsf{Homtop}(\mathcal{X}, \mathcal{E} \times \mathcal{F}) \longrightarrow \mathsf{Homtop}(\mathcal{X}, \mathcal{E}) \times \mathsf{Homtop}(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \ ,$$

défini par $\varphi \longmapsto (p\varphi, q\varphi)$, soit une équivalence de catégories (ce qui définit $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ à équivalence canonique de topos près). Si C est une petite catégorie, et si $\mathcal{F} = \widehat{C}$, le topos $\mathcal{E} \times \widehat{C}$ est simplement la catégorie des préfaisceaux sur C à valeurs dans $\mathcal{E}$. L'image inverse de la projection p est alors le foncteur qui associe à tout faisceau

X sur $\mathcal{E}$ le préfaisceau constant de valeur X. Le foncteur image directe q_* est donc le foncteur limite projective

$$\varprojlim : \mathcal{E} \times \widehat{C} = \underline{\mathsf{Hom}}(C^\circ, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E} \ .$$

On a en outre un Hom enrichi en faisceaux sur $\mathcal{E}$,

$$\mathsf{Hom}^{\mathcal{E}}_{\widehat{C}}(?,?) : \underline{\mathsf{Hom}}(C^\circ, \mathcal{E})^\circ \times \underline{\mathsf{Hom}}(C^\circ, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E} \ .$$

Si X et Y sont deux préfaisceaux sur C à valeurs dans $\mathcal{E}$, alors $\mathsf{Hom}^{\mathcal{E}}_{\widehat{C}}(X,Y)$ est le faisceau sur $\mathcal{E}$ défini par

$$\mathsf{Hom}^{\mathcal{E}}_{\widehat{C}}(X,Y) = \varprojlim_{C^\circ} \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{E}\times\widehat{C}}(X,Y) \ .$$

Plus généralement, si (C,J) est un petit site identifiant $\mathcal{F}$ à la catégorie des faisceaux sur C, $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ est la catégorie des faisceaux sur C à valeurs dans $\mathcal{E}$, c'est-à-dire des préfaisceaux X sur C à valeur dans $\mathcal{E}$ tels que pour tout objet U de C et tout crible couvrant R de U, la flèche canonique

$$\mathsf{Hom}^{\mathcal{E}}_{\widehat{C}}(U,X) \longrightarrow \mathsf{Hom}^{\mathcal{E}}_{\widehat{C}}(R,X)$$

soit un isomorphisme dans $\mathcal{E}$. Le foncteur image directe q^* est alors le foncteur qui associe à tout faisceau X sur $\mathcal{E}$, le faisceau associé au préfaisceau constant de valeur X. On note par abus encore $q_*X = \Gamma(\mathcal{E}, X)$ l'image directe par q d'un faisceau X sur $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$. Cette notation est justifiée par le fait que si X est un faisceau sur $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$, q_*X est le faisceau sur $\mathcal{F}$

$$U \longmapsto \Gamma(\mathcal{E}, X(U)) \ .$$

Pour en revenir aux préoccupations du paragraphe précédent, on obtient de la sorte un foncteur

$$\mathsf{R}q_* = \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, ?) : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E} \times \mathcal{F}) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{F}) \quad , \qquad X \longmapsto \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, X) \ .$$

Pour tout faisceau simplicial X sur $\mathcal{E}\times\mathcal{F}$, on a donc des isomorphismes canoniques dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$ (d'après le lemme 3.4.5)

$$\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, \mathsf{R}\Gamma(F, X)) \simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E} \times \mathcal{F}, X) \simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{F}, \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, X)) \ .$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{F}$ est une catégorie de préfaisceaux sur une petite catégorie C, on a vu que $\mathcal{E} \times \widehat{C}$ est équivalent au topos des préfaisceaux sur C à valeurs dans $\mathcal{E}$, et que le foncteur image directe $\mathcal{E} \times \widehat{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ correspondant à la projection canonique de $\mathcal{E} \times \widehat{C}$ vers $\mathcal{E}$ est le foncteur limite projective. En outre, en vertu de la proposition 3.1.14, les équivalences de $\mathcal{W}$-descente dans $\mathbf{s}(\mathcal{E} \times \widehat{C})$ sont alors simplement les équivalences de $\mathcal{W}$-descente dans $\mathbf{s}\mathcal{E}$ argument par argument. Le foncteur

$$\mathsf{R}\Gamma(\widehat{C}, ?) : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E} \times \widehat{C}) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$$

est donc dans ce cas le foncteur limite homotopique $\mathsf{R}\varprojlim_{C^\circ}$. Pour tout préfaisceau X sur C, à valeurs dans la catégorie des faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{E}$, on a donc des isomorphismes canoniques dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$,

$$\mathsf{R}\varprojlim_{C^\circ} \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, X) \simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E} \times \widehat{C}, X) \simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, \mathsf{R}\varprojlim_{C^\circ} X) \ .$$

3.4.8. Soit I une petite catégorie. Un *topos fibré sur I* est une catégorie fibrée sur I,

$$p : \mathcal{X} \longrightarrow I$$

dont les fibres sont des topos, et dont les foncteurs images inverses (au sens de la structure fibrée), relatifs aux morphismes $u : i \longrightarrow j$ de I, sont des foncteurs $\mathcal{X}_u^* : \mathcal{X}_j \longrightarrow \mathcal{X}_i$ images inverses de morphismes de topos $\mathcal{X}_u : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{X}_i$ (on rappelle que $\mathcal{X}_i$ désigne la fibre de $\mathcal{X}$ au-dessus de i). Nous renvoyons à [**31**, exposé VI, § 7] et à [**37**, chapitre VI, § 5] pour un développement complet sur cette notion. La donnée d'un topos fibré sur I est équivalente à celle d'un pseudo-foncteur de la catégorie I à valeur dans la 2-catégorie des topos. Autrement dit, $\mathcal{X}$ est déterminé par la donnée pour tout objet i de I, d'un topos $\mathcal{X}_i$, pour tout morphisme $u : i \longrightarrow j$ de I, d'un morphisme de topos $\mathcal{X}_u : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{X}_j$, et pour tous morphismes composables de I, $u : i \longrightarrow j$, $v : j \longrightarrow k$, d'un isomorphisme de transitivité $\mathcal{X}_{u,v} : \mathcal{X}_v\mathcal{X}_u \longrightarrow \mathcal{X}_{vu}$, le tout vérifiant des relations de cocycles évidentes (cf. [**28**, exposé VI, 7.4]). Dans la pratique, nous négligerons les isomorphismes de transitivité (en supposant que ce sont des identités). Pour alléger les notations, on notera $u : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{X}_j$ au lieu de $\mathcal{X}_u$ le morphisme de topos associé à une flèche $u : i \longrightarrow j$ de I.

Si $\mathcal{X}$ est un topos fibré sur I, on lui associe la catégorie suivante, notée $\mathsf{Top}(\mathcal{X})$. Un objet X de $\mathsf{Top}(\mathcal{X})$ est la donnée pour tout objet i de I, d'un faisceau X_i sur $\mathcal{X}_i$, et pour chaque flèche $u : i \longrightarrow j$ de I, d'un morphisme $X_u : u^*X_j \longrightarrow X_i$, de telle manière que pour tout objet i de I, $X_{1_i} = 1_{X_i}$, et pour toute paire de morphisme composables $u : i \longrightarrow j$ et $v : j \longrightarrow k$ de I, l'équation suivante soit vérifiée : $X_{vu} = X_u u^* X_v$. Un morphisme f de X vers Y dans $\mathsf{Top}(\mathcal{X})$ est la donnée pour tout objet i de I, d'un morphisme de faisceaux $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$, telle que pour toute flèche $u : i \longrightarrow j$ de I, le carré suivant commute.

$$\begin{tikzcd} u^*X_j \arrow[r, "X_u"] \arrow[d, "u^*f_j"'] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\ u^*Y_j \arrow[r, "Y_u"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

Pour chaque objet i de I, on définit un *foncteur d'évaluation en i*,

$$i^* : \mathsf{Top}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{X}_i$$

par $i^*X = X_i$. On vérifie sans difficultés que la catégorie $\mathsf{Top}(\mathcal{X})$ admet des petites limites inductives et des limites projectives, et que les foncteurs i^* y commutent. En outre, les foncteurs i^* forment une famille conservative de foncteurs. En fait, la catégorie $\mathsf{Top}(\mathcal{X})$ est un topos, et les foncteurs i^* sont les foncteurs images inverses de morphismes de topos

$$i : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathsf{Top}(\mathcal{X}) \ .$$

On définit enfin la projection canonique

$$\theta_{\mathcal{X}} : \mathsf{Top}(\mathcal{X}) \longrightarrow \widehat{I} \ ,$$

comme le morphisme de topos dont le foncteur image inverse est défini par $i^*\theta_{\mathcal{X}}^* X = X_i$ (X_i désignant le faisceau associé à l'ensemble X_i sur $\mathcal{X}_i$).

Suivant [**31**, VI 7], on appelle $\mathsf{Top}(\mathcal{X})$ le *topos total* associé au topos fibré $\mathcal{X}$.

Exemple 3.4.9. On définit un (2-)foncteur de la catégorie $\mathcal{C}at$ vers la catégorie des topos, en associant à chaque petite catégorie A, le topos $\widehat{A}$, et à chaque foncteur $u : A \longrightarrow B$, un morphisme de topos $u : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$, dont l'image inverse est le foncteur $X \longmapsto X \circ u$.

Soient I une petite catégorie, et $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur. On lui associe un topos fibré sur I, noté $\widehat{F}$, dont les fibres sont les catégories de préfaisceau $\widehat{F_i}$, $i \in I$. D'autre part, on a la catégorie cofibrée associée à F, $\int F$, et un morphisme structural $\theta_F : \int F \longrightarrow I$, ce qui induit un morphisme de topos

$$\theta_F : \widehat{\textstyle\int F} \longrightarrow \widehat{I} \ .$$

Une vérification purement soritale montre que $\widehat{\int F} = \mathsf{Top}(\widehat{F})$ et que $\theta_F = \theta_{\widehat{F}}$.

Exemple 3.4.10. Soit I une petite catégorie. Si $\mathcal{E}$ est un topos, et si on note $\mathcal{E}_I$ le foncteur constant sur I, qui à chaque objet i de I, associe le topos $\mathcal{E}$, alors le topos total $\mathsf{Top}(\mathcal{E}_I) = \mathcal{E} \times \widehat{I}$ est le topos des préfaisceaux sur I à valeurs dans $\mathcal{E}$.

Exemple 3.4.11. Soit $\mathcal{E}$ un topos. On définit un foncteur de $\mathcal{E}$ dans la catégorie des topos par $X \longmapsto \mathcal{E}/X$. Si X est un faisceau sur $\mathcal{E}$, on note par abus encore X le topos $\mathcal{E}/X$. Si I est une petite catégorie, et $\Phi : I \longrightarrow \mathcal{E}$ un foncteur, on lui associe ainsi un topos fibré $\mathcal{E}/\Phi$, dont les fibres sont les topos $\mathcal{E}/\Phi_i$, $i \in I$, et encore noté par abus Φ. On a donc son topos total associé $\mathsf{Top}(\Phi)$, et la projection canonique $\theta_\Phi : \mathsf{Top}(\Phi) \longrightarrow \widehat{I}$.

En outre, on a dans ce cas un morphisme canonique

$$K_\Phi : \mathsf{Top}(\Phi) \longrightarrow \varinjlim \Phi \ ,$$

dont le foncteur image inverse

$$K_\Phi^* : \varinjlim \Phi \longrightarrow \mathsf{Top}(\Phi)$$

est défini comme suit. Soit $X \longrightarrow \varinjlim \Phi$ un faisceau sur $\mathcal{E}$, au-dessus de $\varinjlim \Phi$. Pour chaque objet i de I, on a un morphisme canonique de Φ_i vers $\varinjlim \Phi$, ce qui permet de former le carré cartésien suivant.

$$\begin{tikzcd}
(K_\Phi^* X)_i \arrow[r] \arrow[d] & \Phi_i \arrow[d] \\
X \arrow[r] & \varinjlim \Phi
\end{tikzcd}$$

Pour chaque flèche $u : i \longrightarrow j$ de I, le morphisme $u^*(K_\Phi^* X)_j \longrightarrow (K_\Phi^* X)_i$ est simplement l'identité.

3.4.12. Soient I une petite catégorie, et $\mathcal{X}$ un topos fibré sur I. Si i est un objet de I, on a vu qu'on a un morphisme de topos $i : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathsf{Top}(\mathcal{X})$. Le foncteur image inverse i^* admet en outre un adjoint à gauche

$$i_! : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathsf{Top}(\mathcal{X}) \ ,$$

défini comme suit. Soit X un faisceau sur $\mathcal{X}_i$. Pour $j \in \mathsf{Ob}\, I$, on pose

$$(i_! X)_j = \textstyle\coprod_{u:j \longrightarrow i} u^* X \ ,$$

et si $v : k \longrightarrow j$ est une flèche de I, le morphisme

$$v^*(i_! X)_j \longrightarrow (i_! X)_k$$

est induit par les morphismes canoniques, définis pour chaque $u : j \longrightarrow i$,

$$v^*(u^* X) = (uv)^* X \longrightarrow \textstyle\coprod_{w:k \longrightarrow i} w^* X \ .$$

Proposition 3.4.13. *Soient I une petite catégorie, et $\mathcal{X}$ un topos fibré sur I. Un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathsf{sTop}(\mathcal{X})$ est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente si et seulement si pour tout objet i de I, $i^* f$ est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente dans $\mathrm{s}\mathcal{X}_i$.*

Démonstration. La preuve du cas particulier qu'est la proposition 3.1.14 peut être suivie mot pour mot (grâce à l'explicitation des foncteurs $i_!$ pour montrer l'analogue de 3.1.14.1). Nous laissons le lecteur scrupuleux la rédiger dans ce cadre. □

Remarque 3.4.14. Dans le cas où $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$, la proposition ci-dessus résulte aussitôt de la caractérisation des équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente en termes de faisceaux d'homotopie (cf. théorème 3.2.41 (iv)), et du fait que les foncteurs images inverses i^* forment une famille conservative, puisque la formation des faisceaux d'homotopie commute aux foncteurs images inverses.

Corollaire 3.4.15. *Soient I une petite catégorie, et $\mathcal{X}$ un topos fibré sur I. La famille de foncteurs*

$$i^* : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathsf{Top}(\mathcal{X})) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X}_i) \quad , \qquad i \in I \ ,$$

est conservative.

Démonstration. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche de $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathsf{Top}(\mathcal{X}))$. On peut supposer que X et Y sont des faisceaux simpliciaux fibrants au sens de la $\mathcal{W}$-descente sur $\mathsf{Top}(\mathcal{X})$. Mais alors f est une classe d'homotopie de morphismes de faisceaux simpliciaux. La proposition ci-dessus permet ainsi de conclure par forte saturation. □

3.4.16. Soient I une petite catégorie et $\mathcal{X}$ un topos fibré sur I. Pour chaque objet i de I, on a un carré essentiellement commutatif de topos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_i \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p_{\mathcal{X}_i}"'] & \mathsf{Top}(\mathcal{X}) \arrow[d, "\theta_{\mathcal{X}}"] \\ \mathcal{P} \arrow[r, "i"'] & \widehat{I} \end{tikzcd} \quad .$$

En passant aux foncteurs images inverses, on obtient le diagramme de catégories ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_i & \mathsf{Top}(\mathcal{X}) \arrow[l, "i^*"'] \\
\mathcal{P} \arrow[u, "p^*_{\mathcal{X}_i}"] & \widehat{I} \arrow[l, "i^*"] \arrow[u, "\theta^*_{\mathcal{X}}"']
\end{tikzcd}$$

On obtient ensuite un 2-diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_i \arrow[d, "p_{\mathcal{X}_i *}"'] & \mathsf{Top}(\mathcal{X}) \arrow[l, "i^*"'] \arrow[d, "\theta_{\mathcal{X}*}"] \arrow[dl, phantom, "\alpha \,\Nwarrow"] \\
\mathcal{P} & \widehat{I} \arrow[l, "i^*"]
\end{tikzcd}$$

comme suit. On a un morphisme d'adjonction $\theta^*_{\mathcal{X}}\theta_{\mathcal{X}*} \longrightarrow 1_{\mathsf{Top}(\mathcal{X})}$, d'où un morphisme de foncteurs

$$i^*\theta^*_{\mathcal{X}}\theta_{\mathcal{X}*} = (\theta_{\mathcal{X}}i)^*\theta_{\mathcal{X}*} = (ip_{\mathcal{X}_i})^*\theta_{\mathcal{X}*} = p^*_{\mathcal{X}_i}i^*\theta_{\mathcal{X}*} \longrightarrow i^* \ .$$

Par adjonction, on obtient bien un morphisme de foncteurs

$$\alpha : i^*\theta_{\mathcal{X}*} \longrightarrow p_{\mathcal{X}_i *}i^* \ .$$

LEMME 3.4.17. *Le morphisme de foncteurs* $\alpha : i^*\theta_{\mathcal{X}*} \longrightarrow p_{\mathcal{X}_i *}i^*$ *est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Les foncteurs i^* admettent des adjoints à gauche $i_!$. Le morphisme α définit donc par transposition un morphisme de foncteurs β : $i_!p^*_{\mathcal{X}_i} \longrightarrow \theta^*_{\mathcal{X}}i_!$. Il suffit de montrer que ce dernier est un isomorphisme. Comme les foncteurs incriminés commutent aux sommes, il suffit de montrer que si e désigne l'ensemble à un élément, alors pour tout objet j de I, $(i_!p^*_{\mathcal{X}_i}e)_j \simeq (\theta^*_{\mathcal{X}}i_!e)_j$. Or les formules explicites montrent que ces deux termes sont les faisceaux associés à l'ensemble $\mathsf{Hom}_I(j,i)$, ce qui prouve l'assertion. $\square$

PROPOSITION 3.4.18. *Soient I une petite catégorie, et $\mathcal{X}$ un topos fibré sur I. Alors pour tout objet i de I, on a un isomorphisme canonique dans* $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$.

$$\mathsf{R}\alpha : i^*\mathsf{R}\theta_{\mathcal{X}*} \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}p_{\mathcal{X}_i *}i^* \qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X}_i) \arrow[d, "\mathsf{R}p_{\mathcal{X}_i *}"'] & \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathsf{Top}(\mathcal{X})) \arrow[l, "i^*"'] \arrow[d, "\mathsf{R}\theta_{\mathcal{X}*}"] \arrow[dl, phantom, "\mathsf{R}\alpha \,\Nwarrow"] \\
\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}} & \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\widehat{I}) \arrow[l, "i^*"]
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, pour tout faisceau simplicial X sur $\mathsf{Top}(\mathcal{X})$*, et tout objet i de I, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathsf{R}\theta_{\mathcal{X}*}(X)_i \simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{X}_i, X_i) \ .$$

DÉMONSTRATION. L'explicitation des foncteurs $i_!$ et la proposition 3.4.13 montrent que ceux-ci respectent les cofibrations et les équivalences de $\mathcal{W}$-descente. Autrement dit, les foncteurs de la forme i^*, $i \in \mathsf{Ob}\, I$ sont des foncteurs de

Quillen à droite. En vertu de la proposition 3.1.12, il en est de même des foncteurs $p_{\mathcal{X}_{i*}}$ et $\theta_{\mathcal{X}*}$. La proposition résulte donc du lemme ci-dessus et de l'énoncé général [**35**, théorème 1.3.7]. □

3.4.19. Soit I une petite catégorie. Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux topos fibrés sur I, un *morphisme de topos fibrés* $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est un morphisme de catégories fibrées sur I (*i.e.* un foncteur cartésien au-dessus de I) tel que pour tout objet i de I, le foncteur induit sur les fibres au-dessus de i, $\varphi_{i*} : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{Y}_i$, soit le foncteur image directe d'un morphisme de topos $\varphi_i : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{Y}_i$. Une telle donnée définit canoniquement un morphisme de topos $\mathsf{Top}(\varphi) : \mathsf{Top}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathsf{Top}(\mathcal{Y})$, en posant pour tout $i \in I$, et tout objet Y de $\mathsf{Top}(\mathcal{Y})$, $(\mathsf{Top}(\varphi)^*Y)_i = \varphi_i^* Y_i$.

Corollaire 3.4.20. *On considère un morphisme de topos fibrés sur une petite catégorie I*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{Y} \arrow[dl, "q"] \\ & I & \end{tikzcd} .$$

On se donne un faisceau simplicial Y sur $\mathsf{Top}(\mathcal{Y})$ tel que pour tout objet i de I, le morphisme canonique $\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{Y}_i, Y_i) \longrightarrow \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{X}_i, \varphi_i^* Y_i)$ soit un isomorphisme dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$. Alors le morphisme canonique

$$\mathsf{R}\Gamma(\mathsf{Top}(\mathcal{Y}), Y) \longrightarrow \mathsf{R}\Gamma(\mathsf{Top}(\mathcal{X}), \mathsf{Top}(\varphi)^*Y)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Le morphisme φ induit un triangle commutatif de topos :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Top}(\mathcal{X}) \arrow[rr, "\mathsf{Top}(\varphi)"] \arrow[dr, "\theta_{\mathcal{X}}"'] & & \mathsf{Top}(\mathcal{Y}) \arrow[dl, "\theta_{\mathcal{Y}}"] \\ & \widehat{I} & \end{tikzcd} .$$

On a un morphisme canonique dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\widehat{I})$:

$$\mathsf{R}\theta_{\mathcal{Y}*} Y \longrightarrow \mathsf{R}\theta_{\mathcal{X}*} \mathsf{Top}(\varphi)^* Y \ .$$

Celui-ci est un isomorphisme, car en vertu de la proposition précédente, pour tout objet i de I, on a les identifications

$$\begin{aligned} \mathsf{R}\theta_{\mathcal{Y}*}(Y)_i &\simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{Y}_i, Y_i) \\ &\simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{X}_i, \varphi_i^* Y_i) \\ &\simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{X}_i, (\mathsf{Top}(\varphi)^*Y)_i) \\ &\simeq \mathsf{R}\theta_{\mathcal{X}*}(\mathsf{Top}(\varphi)^*Y)_i \ , \end{aligned}$$

ce qui implique l'assertion puisque les foncteurs i^* forment une famille conservative (3.4.15). Le lemme 3.4.5 implique qu'on a des isomorphismes

$$\mathsf{R}\Gamma(\mathsf{Top}(\mathcal{Y}), Y) \simeq \mathsf{R}\varprojlim \mathsf{R}\theta_{\mathcal{Y}*} Y \simeq \mathsf{R}\varprojlim \mathsf{R}\theta_{\mathcal{X}*} \mathsf{Top}(\varphi)^* Y \simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathsf{Top}(\mathcal{X}), \mathsf{Top}(\varphi)^*Y)$$

et achève ainsi la démonstration. □

3.4.21. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Comme les équivalences de $\mathcal{W}$-descente sont stables par produits finis, la structure de catégorie de modèles fermée associée sur $\mathbf{s}\mathcal{E}$ est monoïdale au sens de [**35**, 4.2.6] pour le produit cartésien. En particulier, le foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}} : (\mathbf{s}\mathcal{E})^{\circ} \times \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}$$

admet un foncteur dérivé à droite, noté

$$\mathsf{R}\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})} : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})^{\circ} \times \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) \ .$$

Ce foncteur est caractérisé par la formule d'adjonction suivante.

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(T \times X, Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(T, \mathsf{R}\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(X, Y)) \ .$$

Si X et Y sont deux faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{E}$, on choisit une équivalence faible de but fibrant $Y \longrightarrow Y'$, et on peut poser

$$\mathsf{R}\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(X, Y) = \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(X, Y') \ .$$

En outre, le foncteur $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(?, Y')$ est un fonteur de Quillen à droite, et donc en vertu de [**13**, proposition 4.1.22] et du corollaire 1.2.21, pour toute petite catégorie I, il induit un foncteur

$$\mathsf{R}\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(?, Y) : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}^{I})^{\circ} \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}^{I^{\circ}}) = \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E} \times \widehat{I})$$

tel que pour tout foncteur $\Phi : I \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}$, on ait un isomorphisme canonique

$$\mathsf{R}\varprojlim_{I^{\circ}} \mathsf{R}\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(\Phi, Y) \simeq \mathsf{R}\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(\mathsf{L}\varinjlim_{I} \Phi, Y) \ .$$

On définit un foncteur

$$\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})} : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})^{\circ} \times \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$$

par la formule $\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(X, Y) = \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, \mathsf{R}\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(X, Y))$. Si $*$ désigne le faisceau final sur $\mathcal{E}$, on a un isomorphisme canonique pour tout faisceau simplicial X sur $\mathcal{E}$:

$$\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, X) \simeq \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(*, X) \ .$$

Plus généralement, pour tout faisceau U sur $\mathcal{E}$, et tout faisceau simplicial X sur $\mathcal{E}$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathsf{R}\Gamma(U, X|_{U}) \simeq \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(U, X) \ ,$$

où dans le premier membre, U désigne aussi le topos $\mathcal{E}/U$, et $X|_{U}$ l'image inverse de X par le morphisme canonique $\mathcal{E}/U \longrightarrow \mathcal{E}$.

On remarque par ailleurs qu'on a une bijection canonique

$$\pi_0 \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(X, Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(X, Y) \ .$$

En effet, une fois choisie une résolution fibrante Y' de Y, $\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(X, Y)$ est représenté par l'ensemble simplicial

$$\Delta_n \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(X \times \Delta_n, Y') \ ,$$

et donc $\pi_0 \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(X, Y)$ est simplement l'ensemble $\mathsf{Hom}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(X, Y')$ quotienté par la relation de Δ_1-homotopie.

PROPOSITION 3.4.22. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, I une petite catégorie, et Φ un diagramme de type I dans $\mathcal{E}$. On suppose que le morphisme $\mathsf{L}\varinjlim \Phi \longrightarrow \varinjlim \Phi$ est un isomorphisme dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$. Alors pour tout faisceau simplicial X sur $\varinjlim \Phi$, il existe un isomorphisme canonique dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$:*

$$\mathsf{R}\Gamma(\varinjlim \Phi, X) \simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathsf{Top}(\Phi), K_{\Phi}^{*}X)\ .$$

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}/\varinjlim \Phi$, on peut supposer que $\varinjlim \Phi$ est le faisceau final $*$ sur $\mathcal{E}$. On veut donc montrer que le morphisme canonique

$$\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, X) \longrightarrow \mathsf{R}\Gamma(\mathsf{Top}(\Phi), K_{\Phi}^{*}X)$$

est un isomorphisme. On a les isomorphismes canoniques suivants.

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, X) &\simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, \mathsf{R}\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(*, X)) \\
&\simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, \mathsf{R}\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(\varinjlim \Phi, X)) \\
&\simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, \mathsf{R}\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(\mathsf{L}\varinjlim \Phi, X)) \\
&\simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, \mathsf{R}\varprojlim \mathsf{R}\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(\Phi, X)) \\
&\simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E} \times \widehat{I}, \mathsf{R}\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(\Phi, X)) \\
&\simeq \mathsf{R}\varprojlim \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, \mathsf{R}\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(\Phi, X)) \\
&\simeq \mathsf{R}\varprojlim \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(\Phi, X)
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout objet i de I, on a un isomorphisme canonique dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$:

$$\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(\Phi, X)_i = \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(\Phi_i, X) \simeq \mathsf{R}\Gamma(\Phi_i, X|_{\Phi_i})\ .$$

Grâce à la proposition 3.4.18, on en déduit un isomorphisme canonique

$$\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(\Phi, X) \simeq \mathsf{R}\theta_{\Phi *}K_{\Phi}^{*}X\ .$$

En appliquant le foncteur $\mathsf{R}\varprojlim$, ce dernier donne l'isomorphisme

$$\mathsf{R}\varprojlim \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})}(\Phi, X) \simeq \mathsf{R}\varprojlim \mathsf{R}\theta_{\Phi *}K_{\Phi}^{*}X\ ,$$

ce qui achève la démonstration. □

EXEMPLE 3.4.23. Soit $\mathcal{E}$ un topos, et $\mathcal{X}$ un hyper-recouvrement de $\mathcal{E}$ (*i.e.* un hyper-recouvrement dans $\mathbf{s}\mathcal{E}$ dont le but est le faisceau final $*$ sur $\mathcal{E}$). On peut voir $\mathcal{X}$ comme un foncteur $\mathcal{X} : \Delta^{\circ} \longrightarrow \mathcal{E}$, et on vérifie immédiatement que $\varinjlim \mathcal{X} \simeq *$. D'autre part, le morphisme $\mathsf{L}\varinjlim \mathcal{X} \longrightarrow *$ est un isomorphisme ($\mathsf{L}\varinjlim \mathcal{X}$ est la diagonale de $\mathcal{X}$ vu comme un faisceau bisimplicial, c'est-à-dire est $\mathcal{X}$ lui-même). On obtient donc pour tout faisceau simplicial X un isomorphisme canonique dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$,

$$\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, X) \simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathsf{Top}(\mathcal{X}), K_{\mathcal{X}}^{*}X)\ ,$$

analogue non abélien de la suite spectrale associée à $\mathcal{X}$.

COROLLAIRE 3.4.24. *Soient $\mathcal{E}$ un topos et C une catégorie génératrice de $\mathcal{E}$. On considère un faisceau U sur $\mathcal{E}$, et ϕ_U^C le diagramme de descente de U le long de*

C. Alors pour tout faisceau simplicial X sur U, on a un isomorphisme canonique dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$:

$$\mathsf{R}\Gamma(U,X) \simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathsf{Top}(\phi_U^C), K^*_{\phi_U^C}X)\ .$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte aussitôt des propositions 3.4.2 et 3.4.22. □

THÉORÈME 3.4.25. *On considère un triangle commutatif de topos*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{F} \arrow[dl, "q"] \\ & \mathcal{S} & \end{tikzcd}\ .$$

On se donne un faisceau simplicial X sur $\mathcal{F}$, et une famille génératrice $\mathcal{U}$ de $\mathcal{S}$, tels que pour tout élément U de $\mathcal{U}$, la flèche canonique

$$\mathsf{R}\Gamma(q^*U, X|_{q^*U}) \longrightarrow \mathsf{R}\Gamma(p^*U, f^*X|_{p^*U})$$

soit un isomorphisme dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$. Alors pour tout faisceau U sur $\mathcal{S}$, on a un isomorphisme canonique dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$:

$$\mathsf{R}\Gamma(q^*U, X|_{q^*U}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathsf{R}\Gamma(p^*U, f^*X|_{p^*U})\ .$$

En particulier, on a donc un isomorphisme

$$\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{F}, X) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, f^*X)\ .$$

DÉMONSTRATION. Soit C la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}$ dont les objets sont les éléments de $\mathcal{U}$. Alors C est une catégorie génératrice de $\mathcal{S}$. Soit U un faisceau sur $\mathcal{S}$. En vertu du corollaire 3.4.3, on a des isomorphismes canoniques dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$ et $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{F})$ respectivement :

$$\mathsf{L}\varinjlim p^*\phi_U^C \simeq p^*U$$
$$\mathsf{L}\varinjlim q^*\phi_U^C \simeq q^*U\ .$$

La proposition 3.4.22 nous donne donc des isomorphismes canoniques dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$:

$$\mathsf{R}\Gamma(\mathsf{Top}(q^*\phi_U^C), K^*_{q^*\phi_U^C}X) \simeq \mathsf{R}\Gamma(q^*U, X|_{q^*U})$$
$$\mathsf{R}\Gamma(\mathsf{Top}(p^*\phi_U^C), K^*_{p^*\phi_U^C}f^*X) \simeq \mathsf{R}\Gamma(p^*U, f^*X|_{p^*U})\ .$$

Si $u : p^*\phi_U^C \longrightarrow q^*\phi_U^C$ désigne le morphisme de topos fibrés sur C/U induit par f, le corollaire 3.4.20 implique d'autre part que la flèche canonique

$$\mathsf{R}\Gamma(q^*\phi_U^C, K^*_{q^*\phi_U^C}X) \longrightarrow \mathsf{R}\Gamma(p^*\phi_U^C, \mathsf{Top}(u)^*K^*_{q^*\phi_U^C}X) = \mathsf{R}\Gamma(p^*\phi_U^C, K^*_{p^*\phi_U^C}f^*X)$$

est un isomorphisme dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$, ce qui achève la démonstration. □

5. Catégories test locales et faisceaux

3.5.1. Soient A une petite catégorie, et $\mathcal{E}$ un topos. On note $A^\circ\mathcal{E}$ la catégorie des préfaisceaux sur A, à valeurs dans $\mathcal{E}$, laquelle se révelle être encore un topos. On appelle *A-faisceau sur $\mathcal{E}$* les objets de $A^\circ\mathcal{E}$.

Soit (C,J) un petit site. On note comme de coutume a le foncteur faisceau associé de $\widehat{C}$ vers $\widetilde{C}$, et i son adjoint à droite. Si A est une petite catégorie, on définit un foncteur

$$i_A : A^\circ\widetilde{C} \longrightarrow \mathcal{C}at(\mathcal{E}) \quad , \qquad X \longmapsto A/X \ ,$$

$\mathcal{C}at(\widetilde{C})$ désignant la catégorie des faisceaux en petites catégories sur $\widetilde{C}$, comme le composé

$$A^\circ\widetilde{C} \xrightarrow{\ i\ } A^\circ\widehat{C} \xrightarrow{\ i_A\ } \mathcal{C}at(\widehat{C}) \xrightarrow{\ a\ } \mathcal{C}at(\widetilde{C}) \ .$$

On définit d'autre part un foncteur

$$i_A^* : \mathcal{C}at(\widetilde{C}) \longrightarrow A^\circ\widetilde{C}$$

par la formule

$$\mathbb{C} \longmapsto (a \longmapsto \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}at(\widetilde{C})}(A/a, \mathbb{C}) \ ,$$

où A/a désigne aussi le faisceau en catégories associé à la catégorie A/a, et $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}at(\widetilde{C})}$ le Hom interne de $\mathcal{C}at(\widetilde{C})$. Le foncteur i_A^* définit un adjoint à droite du foncteur i_A. Pour le voir, on commence par constater que si $\mathbb{C}$ est un faisceau en catégories sur C, alors pour tout objet a de A,

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}at(\widetilde{C})}(A/a, \mathbb{C}) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}at(\widehat{C})}(A/a, i\mathbb{C}) \ ,$$

ce qui signifie que $ii_A^*\mathbb{C} \simeq i_A^* i\mathbb{C}$. Si X est un A-faisceau sur C, et $\mathbb{C}$ un faisceau en catégories sur C, on en déduit les bijections suivantes.

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at(\widetilde{C})}(i_A X, \mathbb{C}) &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at(\widetilde{C})}(a i_A i X, \mathbb{C}) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at(\widehat{C})}(i_A i X, i\mathbb{C}) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at(\widehat{C})}(iX, i_A^* i\mathbb{C}) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at(\widehat{C})}(iX, i i_A^*\mathbb{C}) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at(\widetilde{C})}(X, i_A^*\mathbb{C}) \end{aligned}$$

Le foncteur nerf $\mathrm{N} : \mathcal{C}at(\widetilde{C}) \longrightarrow \mathbf{s}\widetilde{C}$ induit ainsi un foncteur

$$\mathrm{N}\, i_A : A^\circ\widetilde{C} \longrightarrow \mathbf{s}\widetilde{C} \ ,$$

lequel admet par un calcul similaire au précédent un adjoint à droite noté par abus

$$i_A^* : \mathbf{s}\widetilde{C} \longrightarrow A^\circ \ .$$

Le foncteur i_A commute en outre aux produits fibrés, ce qui implique qu'il en est de même de $\mathrm{N}\, i_A$ (cela résulte de la construction explicite ci-dessus et du fait que l'assertion est vérifiée dans le cas du topos ponctuel).

Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, on note par abus encore $\mathcal{W}$ le Δ-localisateur associé. On pose $\mathcal{W}_A^{\widetilde{C}} = (\mathrm{N}\, i_A)^{-1}\mathcal{W}^{\widetilde{C}}$, et on appelle comme il se doit *équivalences de $\mathcal{W}$-descente* les éléments de $\mathcal{W}_A^{\widetilde{C}}$. On vérifie aussitôt qu'on a aussi l'égalité ${i_A^*}^{-1}\mathcal{W}_A^{\widetilde{C}} = \mathcal{W}^{\widetilde{C}}$. Si X est un A-faisceau, on appelle aussi *équivalences de $\mathcal{W}$-descente* les morphismes de $A^\circ\mathcal{E}/X$ dont l'image dans $A^\circ\mathcal{E}$ par le foncteur d'oubli est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente.

PROPOSITION 3.5.2. *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale. Alors pour tout topos $\mathcal{E}$, $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}_A$ est un $A^\circ\mathcal{E}$-localisateur stable par petites limites inductives filtrantes. Si en outre $\mathcal{W}$ est accessible, il en est de même de $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}_A$.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}_A$ est faiblement saturée, et vérifie en particulier l'axiome L1. Soit L_A l'objet de Lawvere de $\widehat{A}$. Pour tout A-faisceau X, la projection $X \times L_A \longrightarrow X$ est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente : si $\mathcal{E}$ est une catégorie de faisceaux sur un petit site (C, J), en reprenant les notations du paragraphe ci-dessus, on voit que $\mathrm{N}\, i_A(iX \times L_A) \longrightarrow \mathrm{N}\, i_A iX$ est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente dans $\mathbf{s}\widehat{C}$, ce qui implique en vertu de 3.1.11 que $\mathrm{N}\, i_A(X \times L_A) \longrightarrow \mathrm{N}\, i_A X$ est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente dans $\mathbf{s}\mathcal{E}$. Comme L_A est muni d'une structure de segment séparant, le lemme 1.2.12 montre que $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}_A$ vérifie l'axiome L2. L'axiome L3 résulte du fait que $\mathrm{N}\, i_A$ commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes (puisqu'il commute aussi aux produits fibrés). Il résulte aussitôt de 3.1.24 que $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}_A$ est stable par petites limites inductives filtrantes. Si $\mathcal{W}$ est accessible, $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}$ est alors accessible (3.1.24), et donc la proposition 1.2.20 montre qu'il en est de même de $\mathcal{W}^{\mathcal{E}}_A$. $\square$

COROLLAIRE 3.5.3. *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible, et A une $\mathcal{W}$-catégorie test. Pour tout topos $\mathcal{E}$, le couple de foncteurs adjoints*

$$\mathrm{N}\, i_A : A^\circ\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E} \quad i^*_A : \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow A^\circ\mathcal{E}$$

est une équivalence de Quillen pour les structures de catégorie de modèles fermées associées aux équivalences de $\mathcal{W}$-descente.

PROPOSITION 3.5.4. *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, et $\varphi : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ un morphisme de topos. On a alors l'inclusion*

$$\varphi^*\mathcal{W}^{\mathcal{E}}_A \subset \mathcal{W}^{\mathcal{E}'}_A \ .$$

Si en outre $\mathcal{W}$ est accessible, le couple de foncteurs adjoints

$$\varphi^* : A^\circ\mathcal{E} \longrightarrow A^\circ\mathcal{E}' \qquad \varphi_* : A^\circ\mathcal{E}' \longrightarrow A^\circ\mathcal{E}$$

est une adjonction de Quillen.

DÉMONSTRATION. La première assertion est une conséquence du lemme 3.1.11 et de la construction du foncteur $\mathrm{N}\, i_A$. La seconde en résulte aussitôt. $\square$

3.5.5. Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible, A une $\mathcal{W}$-catégorie test locale, et $\mathcal{E}$ un topos. On choisit un A-faisceau X sur $\mathcal{E}$. Le foncteur $\mathrm{N}\, i_A$ se factorise en un foncteur (analogue à celui défini dans [**13**, § A.1.4 et A.1.8]).

$$\alpha^*_X : A^\circ\mathcal{E}/X \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}/\,\mathrm{N}\, A/X \ ,$$

qui commute aux petites limites inductives. Il admet donc un adjoint à droite

$$\alpha_{X*} : \mathbf{s}\mathcal{E}/\,\mathrm{N}\, A/X \longrightarrow A^\circ\mathcal{E}/X \ .$$

On vérifie par ailleurs que le foncteur α^*_X commute aussi aux petites limites projectives (cela se déduit du fait que l'assertion est vérifiée dans le cas où $\mathcal{E}$ est le topos ponctuel (cf. [**13**, corollaire A.1.12]), ce qui se généralise sans peine aux catégories de préfaisceaux, le cas général résultant alors de la construction même du foncteur i_A pour un choix de site adéquat). On a donc défini un morphisme de topos

$$\alpha_X : \mathbf{s}\mathcal{E}/\,\mathrm{N}\,A/X \longrightarrow A^{\circ}\mathcal{E}/X\ .$$

PROPOSITION 3.5.6. *Les foncteurs α_X^* et α_{X*} forment une équivalence de Quillen pour les équivalences de $\mathcal{W}$-descente.*

DÉMONSTRATION. Dans le cas où $\mathcal{E}$ est le topos ponctuel, cela se déduit facilement [**13**, corollaire 5.3.19] et du fait que le foncteur nerf induit une équivalence de catégories après localisation (cela peut aussi être vu comme une application de [**13**, 5.3.26]). On en déduit que l'assertion est vérifiée si $\mathcal{E} = \widehat{C}$ où C est une petite catégorie. En effet, les équivalences de $\mathcal{W}$-descente aussi bien dans $\mathbf{s}\widehat{C}$ que dans $A^{\circ}\widehat{C}$ sont alors simplement les $\mathcal{W}$-équivalences étagées (3.1.19). D'autre part, pour tout objet c de C, le foncteur d'évaluation

$$c^* : A^{\circ}\widehat{C} \longrightarrow \widehat{A}$$

respecte les fibrations (cf. [**13**, lemme 4.1.12]). Enfin, si Y est un préfaisceau sur $C \times A$ (resp. sur $C \times \Delta$), pour tout objet c de C on a

$$(A/Y)_c = A/Y_c \quad (\text{resp.} (i_A^* Y)_c = i_A^*(Y_c)\ )\ .$$

Ces identification permettent de prouver l'assertion dans ce cas. Dans le cas général, on choisit un petit site (C, J) tel que $\mathcal{E}$ s'identifie à la catégorie des faisceaux sur C (et on reprend les notations standard de 3.5.1). On définit les *équivalences de $(\mathcal{W}, J)$-descente* dans $A^{\circ}\widehat{C}$ comme les morphismes dont l'image par le foncteur faisceau associé est une équivalence de $\mathcal{W}$-descente. On vérifie aussitôt grâce aux propositions 3.5.2 et 1.2.20 que celles-ci forment un $A^{\circ}\widehat{C}$-localisateur accessible. En outre, il résulte de la proposition 3.1.22 qu'un morphisme de $A^{\circ}\widehat{C}$ est une équivalence de $(\mathcal{W}, J)$-descente si et seulement si son image par le foncteur $\mathrm{N}\,i_A$ en est une dans $\mathbf{s}\widehat{C}$ (au sens de 3.1.21). On en déduit qu'il en est de même pour les équivalences de $(\mathcal{W}, J)$-descente dans $A^{\circ}\widehat{C}/iX$. On montre alors facilement que les foncteurs α_{iX}^* et α_{iX*} forment une équivalence de Quillen de $A^{\circ}\widehat{C}/iX$ vers $\mathbf{s}\widehat{C}/\,\mathrm{N}\,A/iX$ pour les équivalences de $(\mathcal{W}, J)$-descente (c'est le cas pour les équivalences de $\mathcal{W}$-descente, et il est immédiat que le foncteur α_{iX}^* respecte les équivalences de $(\mathcal{W}, J)$-descente). D'autre part, le foncteur faisceau associé a et son adjoint à droite i forment aussi une équivalence de Quillen de $A^{\circ}\widehat{C}$ (avec les équivalences de $(\mathcal{W}, J)$-descente) vers $A^{\circ}\mathcal{E}$ (avec les équivalences de $\mathcal{W}$-descente), ce qui permet de conlure. □

COROLLAIRE 3.5.7. *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental propre, et A une catégorie test locale. Pour tout topos $\mathcal{E}$, les équivalences de $\mathcal{W}$-descente forment un $A^{\circ}\mathcal{E}$-localisateur propre.*

DÉMONSTRATION. On sait que $\mathcal{W}_A^{\mathcal{E}}$ est accessible (3.5.2), et l'assertion est déjà démontrée dans le cas où $A = \Delta$ (3.1.24). On en déduit le cas général grâce à la proposition ci-dessus et au critère (c) de [**13**, proposition 2.4.21]. □

3.5.8. Soient $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories, et $\mathcal{E}$ un topos. On note par abus

$$u : A^{\circ}\mathcal{E} \longrightarrow B^{\circ}\mathcal{E}$$

le morphisme de topos dont le foncteur image inverse u^* est défini par $(u^*X)_a = X_{u(a)}$. On déduit facilement de la proposition 3.5.6 et de [**13**, lemme 5.1.17] l'énoncé ci-dessous.

PROPOSITION 3.5.9. *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible, $u : A \longrightarrow B$ un foncteur $\mathcal{W}$-asphérique entre deux $\mathcal{W}$-catégories test locales, et $\mathcal{E}$ un topos. Alors le couple de foncteurs adjoints*

$$u^* : B^\circ\mathcal{E} \longrightarrow A^\circ\mathcal{E} \qquad u_* : A^\circ\mathcal{E} \longrightarrow B^\circ\mathcal{E}$$

est une équivalence de Quillen.

THÉORÈME 3.5.10. *Soient $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental, A une $\mathcal{W}$-catégorie test, et $\mathcal{E}$ un topos. Les équivalences de $\mathcal{W}$-descente forment le $A^\circ\mathcal{E}$-localisateur régulier engendré par les morphismes de la forme*

$$X \times a \longrightarrow X \quad , \quad a \in \mathsf{Ob}\, A \quad \textit{et} \quad (1_X \times i_A^*(k)) : X \times i_A^*(I) \longrightarrow X \times i_A^*(J) \quad ,$$
$$k \in \mathcal{W} \quad , \quad X \in \mathsf{Ob}\, A^\circ\mathcal{E} \ .$$

DÉMONSTRATION. Dans le cas où $A = \Delta$, l'assertion résulte de la définition même des équivalences de $\mathcal{W}$-descente, de la proposition 3.3.16, et de [**13**, théorème 5.1.10]. Si $A = B \times \Delta$, B étant une catégorie $\mathcal{W}$-asphérique, la proposition précédente appliquée à la projection $B \times \Delta \longrightarrow \Delta$ permet de conclure. Le cas général en résulte grâce au théorème 3.3.17 puisqu'alors $A \times \Delta$ est encore une $\mathcal{W}$-catégorie test. $\square$

CHAPITRE 4

Théorie homotopique des topos

1. Localisateurs topologiques

4.1.1. Si $\mathcal{X}$ est un topos, et X un faisceau sur $\mathcal{X}$, on rappelle que $\mathcal{X}/X$ désigne le topos des objets de $\mathcal{X}$ au-dessus de X. On a un morphisme de topos canonique $\mathcal{X}/X \longrightarrow \mathcal{X}$ dont le foncteur image inverse est défini par $X' \longmapsto (X \times X', pr_1 : X \times X' \longrightarrow X)$. Soit $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de topos. Si Y est un faisceau sur $\mathcal{Y}$, on note par abus $\mathcal{X}/Y = \mathcal{X}/\varphi^*Y$ le *topos des objets de $\mathcal{X}$ au-dessus de Y*. Si

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{Y} \arrow[dl, "q"] \\ & \mathcal{S} & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de topos, pour chaque faisceau S sur $\mathcal{S}$, on obtient un triangle commutatif de topos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}/S \arrow[rr, "\varphi/S"] \arrow[dr, "p/S"'] & & \mathcal{Y}/S \arrow[dl, "q/S"] \\ & \mathcal{S}/S & \end{tikzcd} .$$

Définition 4.1.2. Une *catégorie topologique* est une sous-2-catégorie pleine $\mathfrak{T}$ de la 2-catégorie des topos satisfaisant les axiomes suivants.

CT1 $\mathfrak{T}$ est stable par produits finis (cf. 3.4.7).

CT2 Pour tout morphisme $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ de $\mathfrak{T}$, et tout objet Y de $\mathcal{Y}$, le topos $\mathcal{X}/Y$ est dans $\mathfrak{T}$.

CT3 Pour toute petite catégorie A, et pour tout topos fibré $\mathcal{X}$ sur A dont les fibres sont dans $\mathfrak{T}$, le topos total $\mathsf{Top}(\mathcal{X})$ est dans $\mathfrak{T}$.

Remarque 4.1.3. Dans la pratique, $\mathfrak{T}$ consistera en la catégorie des topos, ou bien en celle des topos localement connexes.

Les axiomes choisis ont les conséquences immédiates suivantes.

(a) L'axiome CT1 implique que $\mathfrak{T}$ contient le topos ponctuel $\mathcal{P} = \mathcal{E}ns$.

(b) Pour toute petite catégorie A, le topos $\widehat{A}$ des préfaisceaux sur A est dans $\mathfrak{T}$. En effet, $\widehat{A}$ est le topos total associé au topos fibré sur A dont les fibres sont équivalentes au topos ponctuel $\mathcal{P}$. L'assertion résulte donc de (a) et de CT3.

(c) La 2-catégorie $\mathfrak{T}$ est stable par sommes. En effet, les sommes de topos sont des topos fibrés au-dessus de catégories discrètes, ce qui permet d'appliquer CT3.

On fixe pour la suite de cette section une catégorie topologique $\mathfrak{T}$.

4.1.4. Soit $\mathcal{W}$ une classe de morphismes de $\mathfrak{T}$. On introduit la terminologie suivante.

(i) Un morphisme de $\mathfrak{T}$ est une *$\mathcal{W}$-équivalence*, ou plus simplement, une *équivalence faible*, si c'est un élément de $\mathcal{W}$.

(ii) Considérons un triangle commutatif de $\mathfrak{T}$,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{Y} \arrow[dl, "q"] \\ & \mathcal{S} & \end{tikzcd} .$$

Si pour chaque objet S de $\mathcal{S}$, le morphisme

$$\varphi/S : \mathcal{X}/S \longrightarrow \mathcal{Y}/S$$

est une $\mathcal{W}$-équivalence, on dit que φ est *$\mathcal{W}$-asphérique au-dessus de $\mathcal{S}$*, ou encore, *asphérique au-dessus de $\mathcal{S}$*. Par abus de language, on dira aussi que φ est *$\mathcal{S}$-asphérique*. On remarque aussitôt que tout morphisme $\mathcal{S}$-asphérique est une $\mathcal{W}$-équivalence.

(iii) Un morphisme $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est *$\mathcal{W}$-asphérique*, ou encore *asphérique*, s'il est asphérique au-dessus de $\mathcal{Y}$ (cf. (ii) avec $\mathcal{Y} = \mathcal{S}$ et $q = 1_{\mathcal{Y}}$).

(iv) Un objet $\mathcal{X}$ de $\mathfrak{T}$ sera dit *$\mathcal{W}$-asphérique*, ou encore *asphérique*, si tout morphisme $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence.

(v) Un morphisme $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ de $\mathfrak{T}$ est une *$\mathcal{W}$-équivalence cartésienne*, ou encore une *équivalence cartésienne*, si pour tout objet $\mathcal{Z}$ de $\mathfrak{T}$, le morphisme $\varphi \times 1_{\mathcal{Z}} : \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence.

Définition 4.1.5. Un *localisateur topologique* est une classe $\mathcal{W}$ de flèches de $\mathfrak{T}$ satisfaisant les axiomes suivants.

LT0 Les équivalences faibles sont stables par isomorphisme de 1-flèches. Toute identité est une équivalence faible.

LT1 Si dans un triangle commutatif de $\mathfrak{T}$, deux des morphismes sont des équivalences faibles, alors il en est de même du troisième.

LT2 Si $\mathcal{X} \xrightarrow{i} \mathcal{Y} \xrightarrow{r} \mathcal{X}$ sont deux morphismes de $\mathfrak{T}$ tels que ri soit isomorphe à $1_{\mathcal{X}}$, et ir soit une équivalence faible, alors r est une équivalence faible.

LT3 Le topos $\widehat{\Delta_1}$ est universellement asphérique, *i.e.* le morphisme $\widehat{\Delta_1} \longrightarrow \mathcal{P}$ est une équivalence cartésienne.

LT4 Pour tout triangle commutatif de $\mathfrak{T}$,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{Y} \arrow[dl, "q"] \\ & \mathcal{S} & \end{tikzcd} ,$$

pour que φ soit asphérique au-dessus de $\mathcal{S}$, il suffit qu'il existe une famille génératrice $\mathcal{U}$ de $\mathcal{S}$ telle que pour tout $U \in \mathcal{U}$, le morphisme

$$\varphi/U : \mathcal{X}/U \longrightarrow \mathcal{Y}/U$$

soit une équivalence faible.

Remarque 4.1.6. Il résulte aussitôt de l'axiome LT2 que les équivalences de topos sont des équivalences faibles.

Proposition 4.1.7. *Le localisateur topologique minimal est stable par produits finis.*

Démonstration. Considérons un localisateur topologique $\mathcal{W}$. Soit $\mathcal{W}_c$ la partie des flèches $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ de $\mathfrak{T}$ telles que pour tout objet $\mathcal{Z}$ de $\mathfrak{T}$, le morphisme $\mathcal{X} \times \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence. On vérifie que $\mathcal{W}_c$ est un localisateur topologique : le seul axiome *a priori* non trivial à vérifier est LT4. Or si $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est dans $\mathcal{W}_c$ et si $\mathcal{Z}$ est un objet de $\mathfrak{T}$, on remarque que les faisceaux de la forme $Y \times Z$, $Y \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{Y}$, $Z \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{Z}$, forment une famille génératrice de $\mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$. En outre, on a des équivalences de topos canoniques

$$(\mathcal{X} \times \mathcal{Z})/(Y \times Z) \simeq \mathcal{X}/Y \times \mathcal{Z}/Z \ .$$

On en déduit aussitôt que $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est dans $\mathcal{W}_c$. Il est en outre immédiat que $\mathcal{W}_c \subset \mathcal{W}$. Si $\mathcal{W}$ est le localisateur topologique minimal, ce qui précède implique que $\mathcal{W} = \mathcal{W}_c$, ce qu'il fallait démontrer. □

On fixe pour la suite un localisateur topologique $\mathcal{W}$.

Proposition 4.1.8. *Considérons le triangle commutatif de $\mathfrak{T}$ ci-dessous.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{Y} \arrow[dl, "q"] \\ & \mathcal{S} & \end{tikzcd}$$

Si φ est $\mathcal{S}$-asphérique, alors pour tout faisceau S sur $\mathcal{S}$, il en est de même de $\varphi/S : \mathcal{X}/S \longrightarrow \mathcal{Y}/S$.

Démonstration. Cela résulte immédiatement du fait que si (S', u) est un objet de $\mathcal{S}/S$, alors on a un isomorphisme canonique $(\mathcal{X}/S)/(S', u) \simeq \mathcal{X}/S'$. □

Corollaire 4.1.9. *Soit $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de $\mathfrak{T}$. Si φ est asphérique, alors pour tout faisceau Y sur $\mathcal{Y}$, $\varphi/Y : \mathcal{X}/Y \longrightarrow \mathcal{Y}/Y$ est asphérique.*

Proposition 4.1.10. *On considère deux morphismes composables de $\mathfrak{T}$,*

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{Y} \xrightarrow{\psi} \mathcal{Z} \ ,$$

et on suppose que φ est asphérique. Alors pour que ψ soit asphérique, il faut et il suffit que $\psi\varphi$ le soit.

Démonstration. Considérons un faisceau Z sur $\mathcal{Z}$. En vertu du corollaire 4.1.9, le morphisme $\varphi/Z = \varphi/\psi^* Z$ est asphérique (en particulier, une équivalence faible), et donc pour que le morphisme ψ/Z soit une équivalence faible, il faut et il suffit que le morphisme composé $\psi/Z\varphi/Z = (\psi\varphi)/Z$ soit une équivalence faible. □

4.1.11. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux topos. Si φ et ψ sont deux morphismes de topos de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{Y}$, la donnée d'un morphisme de φ vers ψ équivaut à celle d'une morphisme de topos $h : \mathcal{X} \times \widehat{\Delta_1} \longrightarrow \mathcal{Y}$, tel que $h_0 = \varphi$, et $h_1 = \psi$, où h_ε désigne le composé de h et du morphisme $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \times \widehat{\Delta_1}$ induit par l'inclusion $\{\varepsilon\} \longrightarrow \Delta_1$ (ici, contrairement à l'usage dans SGA 4, les morphismes de φ vers ψ sont les morphismes de foncteurs de φ_* vers ψ_*, et non pas les isomorphismes). Deux morphismes de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{Y}$ sont *homotopes* s'ils sont dans la même composante connexe de $\mathsf{Homtop}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. On obtient de la sorte une catégorie $\pi\mathfrak{T}$ dont les objets sont ceux de $\mathfrak{T}$ et dont les flèches sont définies par

$$\mathsf{Hom}_{\pi\mathfrak{T}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = [\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \pi_0 \, \mathsf{Homtop}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \ .$$

Un morphisme de $\mathfrak{T}$ est une *équivalence d'homotopie* si son image dans $\pi\mathfrak{T}$ est un isomorphisme.

Un morphisme de topos $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est *pleinement fidèle* si pour tout topos $\mathcal{Z}$, le foncteur

$$\varphi_* : \mathsf{Homtop}(\mathcal{Z}, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathsf{Homtop}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$$

est pleinement fidèle.

Soient $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ et $\psi : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ deux morphismes de topos. On dit que φ *est un adjoint à gauche* de ψ si pour tout topos $\mathcal{Z}$, le foncteur

$$\varphi_* : \mathsf{Homtop}(\mathcal{Z}, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathsf{Homtop}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$$

est un adjoint à gauche du foncteur

$$\psi_* : \mathsf{Homtop}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}) \longrightarrow \mathsf{Homtop}(\mathcal{Z}, \mathcal{X}) \ .$$

De manière équivalente, cela revient à demander qu'il existe deux morphismes

$$\varepsilon : \varphi\psi \longrightarrow 1_{\mathcal{Y}} \quad \text{et} \quad \eta : 1_{\mathcal{X}} \longrightarrow \psi\varphi$$

vérifiant les équations évidentes. On dit aussi dans ce cas que ψ est un *adjoint à droite de* φ. Il est immédiat que tout morphisme de topos admettant un adjoint à gauche ou à droite est en particulier une équivalence d'homotopie. On remarque que pour que φ (resp. ψ) soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que le morphisme η (resp. ε) soit un isomorphisme.

Proposition 4.1.12. *Tout morphisme de $\mathfrak{T}$ homotope à une équivalence faible est une équivalence faible.*

Démonstration. Cela résulte aussitôt du fait que pour tout objet $\mathcal{X}$ de $\mathfrak{T}$, la projection $\mathcal{X} \times \widehat{\Delta_1} \longrightarrow \mathcal{X}$ est une équivalence faible. □

Proposition 4.1.13. *Tout morphisme de $\mathfrak{T}$ admettant un adjoint à droite pleinement fidèle est asphérique. En outre, son adjoint à droite est alors aussi une équivalence faible.*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de topos admettant un adjoint à droite pleinement fidèle. On vérifie facilement que pour tout faisceau Y sur $\mathcal{Y}$, le morphisme $\varphi/Y : \mathcal{X}/Y \longrightarrow \mathcal{Y}/Y$ admet un adjoint à droite pleinement fidèle, et donc est une équivalence faible en vertu de la proposition précédente et de l'axiome LT2. Ce dernier implique aussi la dernière assertion. □

Corollaire 4.1.14. *Tout morphisme de $\mathfrak{T}$ admettant un adjoint à droite pleinement fidèle est une équivalence cartésienne.*

Démonstration. En effet, si φ est un tel morphisme, alors pour tout objet $\mathcal{Z}$ de $\mathfrak{T}$, le morphisme $\varphi \times \mathcal{Z}$ vérifie la même propriété. La proposition ci-dessus permet donc de conlure. □

Corollaire 4.1.15. *Pour toute petite catégorie A admettant un objet final, le topos $\widehat{A}$ est universellement asphérique.*

Démonstration. Le foncteur de A vers la catégorie ponctuelle admet un adjoint à droite pleinement fidèle. On en déduit aussitôt qu'il en est de même du morphisme de topos de $\widehat{A}$ vers $\mathcal{P}$ (par la 2-fonctorialité de $A \longmapsto \widehat{A}$). □

Théorème 4.1.16. *La partie de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{C}at$ formée des foncteurs $u : A \longrightarrow B$ tels que le morphisme de topos induit $u : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ soit une équivalence faible est un localisateur fondamental.*

Démonstration. L'axiome LF1 résulte des axiomes LT0, LT1 et LT2, et l'axiome LF2 du corollaire précédent. L'axiome LF3 est quant à lui conséquence de l'axiome LT4 et du fait que pour toute petite catégorie A, les préfaisceaux représentables forment une famille génératrice du topos $\widehat{A}$. □

Corollaire 4.1.17. *Si $u : A \longrightarrow B$ est une ∞-équivalence, alors le morphisme de topos $u : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ est une équivalence cartésienne. En particulier, pour toute catégorie ∞-asphérique A, le topos $\widehat{A}$ est universellement asphérique.*

Démonstration. Il suffit de le montrer dans le cas du localisateur topologique minimal. L'assertion résulte alors immédiatement du théorème ci-dessus et de la proposition 4.1.7. □

Lemme 4.1.18. *Soient I une petite catégorie et $\mathcal{X}$ un topos fibré sur I. Pour tout objet i de I, le morphisme canonique $i : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathsf{Top}(\mathcal{X})/i$ est pleinement fidèle et admet un adjoint à gauche.*

Démonstration. Le topos $\mathsf{Top}(\mathcal{X})/i$ est le topos total associé au topos fibré $\mathcal{X}|_{I/i}$ sur I/i. On peut donc supposer que la catégorie I admet un objet final ω, et il suffit de vérifier que le morphisme $\omega : \mathcal{X}_\omega \longrightarrow \mathsf{Top}(\mathcal{X})$ est pleinement fidèle et admet un adjoint à gauche. On définit un foncteur

$$g_\omega^* : \mathcal{X}_\omega \longrightarrow \mathsf{Top}(\mathcal{X})$$

par $(g_\omega^* X)_i = u_i^* X$, $i \in \mathsf{Ob}\, I$ (u_i désignant l'unique flèche de i vers ω dans I). On vérifie immédiatement que le foncteur g_ω^* commute aux petites limites inductives et est exact à gauche. Il définit donc en particulier un morphisme de topos

$$g_\omega : \mathsf{Top}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{X}_\omega \ .$$

La vérification du fait que ω est un adjoint à droite pleinement fidèle de g_ω est laissée au lecteur. □

Proposition 4.1.19. *Soient I une petite catégorie, et $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de topos fibrés sur I dont les fibres sont dans $\mathfrak{T}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Pour tout objet i de I, le morphisme $\varphi_i : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{Y}_i$ est une équivalence faible.*

(b) *Le morphisme* $\mathsf{Top}(\varphi)$ *est asphérique au-dessus de* $\widehat{I}$.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Top}(\mathcal{X}) \arrow[rr, "\mathsf{Top}(\varphi)"] \arrow[dr, "\theta_{\mathcal{X}}"'] & & \mathsf{Top}(\mathcal{Y}) \arrow[dl, "\theta_{\mathcal{Y}}"] \\ & \widehat{I} & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Pour tout objet i de I, on a un carré essentiellement commutatif de topos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d] & \mathcal{Y}_i \arrow[d] \\ \mathsf{Top}(\mathcal{X})/i \arrow[r, "\mathsf{Top}(\varphi)/i"'] & \mathsf{Top}(\mathcal{Y})/i \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont des équivalences faibles en vertu de la proposition 4.1.13 et du lemme 4.1.18. Les préfaisceaux représentables sur I formant une famille génératrice du topos des préfaisceaux sur I, l'axiome LT5 implique l'assertion. $\square$

Scholie 4.1.20. La proposition ci-dessus permet de transposer *mutatis mutandis* la construction explicitée dans [**48**, § 11.6]. Autrement dit, il est possible de montrer que la localisation de $\mathfrak{T}$ par un localisateur topologique admet des extensions de Kan homotopiques, construites explicitement en termes de topos totaux.

Définition 4.1.21. Un topos $\mathcal{X}$ (objet de $\mathfrak{T}$) est *localement $\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement *localement asphérique*, s'il admet une famille génératrice $\mathcal{U}$ telle que pour tout élément U de $\mathcal{U}$, le topos $\mathcal{X}/U$ soit $\mathcal{W}$-asphérique. Une telle famille génératrice est appelée une *famille $\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement, une *famille asphérique.*

Exemple 4.1.22. Pour toute petite catégorie A, le topos des préfaisceaux sur A est localement asphérique. En effet, pour tout préfaisceau représentable a sur A, en vertu du corollaire 4.1.15, le topos $\widehat{A}/a \simeq \widehat{A/a}$ est asphérique.

4.1.23. Dans la définition ci-dessus, on peut imposer que $\mathcal{U}$ soit une petite famille génératrice.

On dit qu'un morphisme de topos $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est une *immersion* si le foncteur image directe $\varphi_* : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est pleinement fidèle. Il est équivalent de demander qu'il existe une topologie plus fine que la topologie canonique sur $\mathcal{Y}$ identifiant $\mathcal{X}$ à la catégorie des faisceaux sur $\mathcal{Y}$ pour cette dernière. En particulier, si $\mathcal{U}$ est une famille génératrice de $\mathcal{Y}$, alors les faisceaux de la forme φ^*U, $U \in \mathcal{U}$, forment une famille génératrice de $\mathcal{X}$, notée $\varphi^*\mathcal{U}$. Par conséquent, si $\mathcal{X}$ est un topos, et C une petite catégorie, la donnée d'une immersion de $\mathcal{X}$ dans le topos des préfaisceaux sur C est équivalente à celle d'une topologie sur C identifiant $\mathcal{X}$ à la catégorie des faisceaux sur C pour celle-ci.

PROPOSITION 4.1.24. *Soit $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ une immersion dans $\mathfrak{T}$ dont le but est localement asphérique. Si φ est asphérique, alors $\mathcal{X}$ est localement asphérique.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{U}$ une famille asphérique de $\mathcal{Y}$. Si φ est asphérique, il résulte de l'axiome LT1 que $\varphi^*\mathcal{U}$ est une famille asphérique de $\mathcal{X}$. $\square$

PROPOSITION 4.1.25. *Soit $\mathcal{X}$ un topos, objet de $\mathfrak{T}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Le topos $\mathcal{X}$ est localement asphérique.*

(b) *Il existe une petite catégorie C et une immersion asphérique $a : \mathcal{X} \longrightarrow \widehat{C}$.*

DÉMONSTRATION. Le fait que (b) implique (a) résulte de la proposition ci-dessus et de 4.1.22. Réciproquement, si $\mathcal{U}$ est une famille asphérique de $\mathcal{X}$, et si C est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{X}$ définie par $\mathcal{U} = \mathsf{Ob}\, C$, alors $\mathcal{X}$ s'identifie à la catégorie des faisceaux sur C pour la topologie induite de la topologie canonique sur $\mathcal{X}$, laquelle est moins fine que la topologie canonique sur C. Soit $a : \mathcal{X} \longrightarrow \widehat{C}$ l'immersion dont le foncteur image inverse a^* est le foncteur faisceau associé. Si U est un objet de C, vu comme un préfaisceau représentable, on a l'égalité $\mathcal{X}/U = \mathcal{X}/a^*U$, ce qui prouve l'asphéricité de a (par l'axiome LT4). $\square$

2. Modeleurs locaux

Dans cette section, on fixe encore une catégorie topologique $\mathfrak{T}$, et un localisateur topologique $\mathcal{W}$.

DÉFINITION 4.2.1. Soit $\mathcal{X}$ un objet de $\mathfrak{T}$. Un morphisme $X \longrightarrow X'$ de faisceaux sur $\mathcal{X}$ est une *$\mathcal{W}$-équivalence*, ou encore une équivalence faible si le morphisme de topos $\mathcal{X}/X \longrightarrow \mathcal{X}/X'$ est une $\mathcal{W}$-équivalence.

Un morphisme $X \longrightarrow X'$ de $\mathcal{X}$ est une *$\mathcal{W}$-équivalence locale*, ou encore une *équivalence faible locale* si le morphisme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}/X \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{X}/X' \arrow[dl] \\ & \mathcal{X} & \end{tikzcd}$$

est $\mathcal{W}$-asphérique au-dessus de $\mathcal{X}$.

Un faisceau X sur $\mathcal{X}$ est *localement $\mathcal{W}$-asphérique*, ou encore *localement asphérique*, si l'unique flèche de X vers le faisceau final est une $\mathcal{W}$-équivalence locale, *i.e.* si le morphisme $\mathcal{X}/X \to \mathcal{X}$ est aphérique.

On note $\mathcal{W}_{\mathcal{X}}$ la partie de $\mathsf{Fl}\, \mathcal{X}$ formée des $\mathcal{W}$-équivalences, et $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\mathcal{X}$ la localisation de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{W}$.

REMARQUE 4.2.2. On s'aperçoit aussitôt que les équivalences faibles locales sont exactement les flèches $X \longrightarrow X'$ telles que pour tout faisceau X'' sur $\mathcal{X}$, le morphisme $X \times X'' \longrightarrow X' \times X''$ soit une équivalence faible.

PROPOSITION 4.2.3. *Soit $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme asphérique dans $\mathfrak{T}$. Alors on a l'égalité $\varphi^{*-1}\mathcal{W}_{\mathcal{X}} = \mathcal{W}_{\mathcal{Y}}$. Si en outre φ est une immersion, le morphisme d'adjonction $\eta : 1_{\mathcal{Y}} \longrightarrow \varphi_*\varphi^*$ est une équivalence faible naturelle, et on a* *l'égalité* $\varphi_*^{-1}\mathcal{W}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{W}_{\mathcal{X}}$. *En particulier, on obtient deux équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre*

$$\varphi^* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\mathcal{X} \quad \textit{et} \quad \varphi_* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\mathcal{Y} \ .$$

Démonstration. Pour tout faisceau Y sur $\mathcal{Y}$, on a une équivalence faible naturelle $\mathcal{X}/Y \longrightarrow \mathcal{Y}/Y$, ce qui implique la première assertion. Si φ est une immersion, le foncteur φ_* est pleinement fidèle, et comme tout isomorphisme de $\mathcal{X}$ est une équivalence faible, le morphisme d'adjonction η est une équivalence faible naturelle. Les autres assertions en résultent formellement. □

Lemme 4.2.4. *Soit* $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ *un morphisme asphérique dans* $\mathfrak{T}$. *On considère une petite catégorie* I *et un foncteur* $F : I \longrightarrow \mathcal{Y}$, *et on note* $\varphi^*F : I \longrightarrow \mathcal{X}$ *le foncteur* $i \longmapsto \varphi^*F_i$. *Si le morphisme canonique*

$$K_F : \mathsf{Top}(F) \longrightarrow \varinjlim F$$

(cf. 3.4.11*) est une équivalence faible, alors il en est de même de*

$$K_{\varphi^*F} : \mathsf{Top}(\varphi^*F) \longrightarrow \varinjlim \varphi^*F \simeq \varphi^* \varinjlim F \ .$$

Démonstration. On a le diagramme commutatif de topos suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Top}(\varphi^*F) \arrow[r, "K_{\varphi^*F}"] \arrow[d, "\mathsf{Top}(\varphi/F)"'] & \varphi^* \varinjlim F \arrow[d, "\varphi/\varinjlim F"] \\
\mathsf{Top}(F) \arrow[r, "K_F"'] & \varinjlim F
\end{tikzcd}$$

En vertu des propositions 4.1.19 et 4.1.8, les morphismes verticaux sont asphériques, et la flèche horizontale inférieure est une équivalence faible par hypothèse, ce qui prouve l'assertion. □

Proposition 4.2.5. *Soit* $\mathcal{X}$ *un topos localement asphérique, objet de* $\mathfrak{T}$. *On considère une petite catégorie* I *et un foncteur* $F : I \longrightarrow \mathcal{X}$. *On suppose que l'une des conditions suivantes est vérifiées :*

(a) *La catégorie* I *est filtrante.*

(b) *La catégorie* I *est l'ensemble ordonné* $\{1 > 0 < 2\}$, *et le morphisme* $F_0 \longrightarrow F_1$ *est un monomorphisme.*

Alors le morphisme de topos canonique

$$K_F : \mathsf{Top}(F) \longrightarrow \varinjlim F$$

est une équivalence faible.

Démonstration. Lorsque $\mathcal{X}$ est une catégorie de préfaisceaux sur une petite catégorie, l'assertion résulte dans le cas (a) de [**13**, corollaire 5.1.16], et dans le cas (b) de [**13**, proposition 1.3.5], grâce au théorème 4.1.16. Soit $\mathcal{X}$ un topos localement asphérique. Par la proposition 4.1.25, on peut choisir une immersion asphérique $a : \mathcal{X} \longrightarrow \widehat{C}$, C étant une petite catégorie. Le foncteur $a_*F : I \longrightarrow \widehat{C}$ vérifie encore les hypothèses de l'énoncé relativement à $\widehat{C}$, et donc l'assertion résulte aussitôt du lemme 4.2.4 et de la pleine fidélité du foncteur a_*. □

DÉFINITION 4.2.6. Un $\mathcal{W}$*-modeleur local*, ou s'il n'y a pas de confusion à craindre, un *modeleur local*, est un topos localement asphérique (objet de $\mathfrak{T}$) tel que $\mathcal{W}_{\mathcal{E}}$ soit un $\mathcal{E}$-localisateur. Un $\mathcal{W}$*-modeleur*, ou encore un *modeleur*, est un modeleur local asphérique.

EXEMPLE 4.2.7. Il résulte du théorème 4.1.16 et de [**13**, corollaire 1.3.10] qu'une petite catégorie A est test locale (au sens du localisateur fondamental induit par $\mathcal{W}$) si et seulement si le topos $\widehat{A}$ est un modeleur local.

THÉORÈME 4.2.8. *Soit $\mathcal{E}$ un topos localement asphérique, objet de $\mathfrak{T}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le topos $\mathcal{E}$ est un modeleur local.*

(ii) *Tout faisceau sur $\mathcal{E}$ admet un $\mathcal{W}$-cylindre (*1.2.10*).*

(ii′) *Il existe une donnée homotopique élémentaire $\mathcal{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ sur $\mathcal{E}$ telle que pour tout faisceau X sur $\mathcal{E}$, le morphisme $\sigma_X : X \otimes I \longrightarrow X$ soit une équivalence faible.*

(ii″) *L'objet de Lawvere de $\mathcal{E}$ est localement asphérique.*

(iii) *Il existe une catégorie test locale C et une immersion asphérique $a : \mathcal{E} \longrightarrow \widehat{C}$.*

DÉMONSTRATION. Il résulte facilement des propositions 4.1.19 et 4.2.5 que $\mathcal{W}_{\mathcal{E}}$ vérifie systématiquement l'axiome L3 de la définition 1.2.11, et il est immédiat que $\mathcal{W}_{\mathcal{E}}$ est une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{E}$. On en déduit que pour que $\mathcal{E}$ soit un modeleur local, il faut et il suffit que les fibrations trivales de $\mathcal{E}$ soient des équivalences faibles. L'équivalence entre les énoncés (i), (ii), (ii′) et (ii″) résulte donc aussitôt du lemme 1.2.12. Si (iii) est vérifiée, comme le foncteur image inverse a^* respecte les cofibrations (*i.e.* les monomorphismes), le foncteur image directe a_* respecte les fibrations triviales. Mais alors par la proposition 4.2.3, toute fibration triviale de $\mathcal{E}$ est une équivalence faible. Il reste ainsi à montrer que (i) implique (iii). Comme $\mathcal{E}$ est localement asphérique, il admet par définition une famille asphérique $\mathcal{U}$. On peut en outre imposer qu'aucun faisceau isomorphe au faisceau vide ne soit dans $\mathcal{U}$. Si on suppose que $\mathcal{E}$ est un modeleur local, l'objet de Lawvere L de $\mathcal{E}$ est localement asphérique. On peut donc supposer aussi que pour tout élément U de $\mathcal{U}$, le faisceau $U \times L$ est encore dans $\mathcal{U}$. Soit C la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ dont les objets sont les éléments de $\mathcal{U}$. La catégorie C est une catégorie test locale. En effet, pour le voir, il suffit de vérifier que pour tout objet U de C, la catégorie C/U est une catégorie test. Autrement dit, on peut supposer que l'objet final de $\mathcal{E}$ est dans $\mathcal{U}$. Mais alors l'objet de Lawvere L est aussi dans $\mathcal{U}$, et il est un segment séparant de $\widehat{C}$. Cela permet de conclure en vertu de [**13**, lemme 1.1.27 et corollaire 1.3.10]. Pour achever la démonstration, il reste à constater que $\mathcal{E}$ est équivalent à la catégorie des faisceaux sur C pour la topologie induite par la topologie canonique sur $\mathcal{E}$, ce qui est immédiat. □

DÉFINITION 4.2.9. Un localisateur topologique est *accessible* (resp. *propre*) si pour toute catégorie test locale A, les équivalences faibles de $\widehat{A}$ forment un A-localisateur accessible (resp. propre).

Remarque 4.2.10. Pour qu'un localisateur topologique soit accessible (resp. propre), il faut et il suffit qu'il existe une catégorie test locale non vide A telle que le A-localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ soit accessible (resp. propre) (cela résulte facilement de [**13**, théorèmes 5.1.10 et 5.3.29]).

Lemme 4.2.11. *Soit $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ une immersion. On considère un $\mathcal{Y}$-localisateur $\mathcal{W}$ tel que tout morphisme bicouvrant de $\mathcal{Y}$ (*i.e. *dont l'image dans $\mathcal{X}$ par φ^* est un isomorphisme) soit une $\mathcal{W}$-équivalence. Alors $\varphi_*^{-1}\mathcal{W}$ est un $\mathcal{X}$-localisateur. En outre, ce dernier est accessible (resp. propre) dès que $\mathcal{W}$ l'est.*

Démonstration. Posons $\mathcal{W}' = \varphi_*^{-1}\mathcal{W}$. On vérifie facilement que $\mathcal{W}'$ est un $\mathcal{X}$-localisateur (les arguments de la preuve de la proposition 3.1.22 se transposent ici sans modifications essentielles). On s'aperçoit en outre que $\varphi_*^{-1}\mathcal{W}' = \mathcal{W}$. Supposons à présent que $\mathcal{W}$ est accessible. Considérons un petit ensemble S de flèches de $\mathcal{Y}$ qui engendre $\mathcal{W}$, et $\mathcal{W}_S$, le $\mathcal{X}$-localisateur engendré par φ^*S et par les projections $X \times \varphi^*L \longrightarrow X$, $X \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{X}$, où L désigne l'objet de Lawvere de $\mathcal{Y}$. Alors en vertu du corollaire 1.2.19, $\mathcal{W}_S$ est accessible. En outre, il est évident $\varphi^{*-1}\mathcal{W}_S$ est un $\mathcal{Y}$-localisateur qui contient S. Or $\mathcal{W}_S \subset \mathcal{W}'$, ce qui implique que $\mathcal{W} = \varphi^{*-1}\mathcal{W}_S$. On en déduit facilement grâce à la pleine fidélité de φ_* que $\mathcal{W}_S = \mathcal{W}'$. Enfin, si $\mathcal{W}$ est propre, on remarque qu'un morphisme de $\mathcal{X}$ est une fibration (resp. une équivalence faible) si et seulement si son image par φ_* en est une dans $\mathcal{Y}$. Comme le foncteur φ_* commute en particulier aux produits fibrés, on en déduit bien que $\mathcal{W}'$ est propre. □

Corollaire 4.2.12. *Si le localisateur topologique $\mathcal{W}$ est accessible (resp. propre), alors pour tout modeleur local $\mathcal{E}$ le $\mathcal{E}$-localisateur $\mathcal{W}_{\mathcal{E}}$ est accessible (resp. propre).*

Démonstration. Cela résulte aussitôt du lemme ci-dessus, du critère (iii) du théorème 4.2.8, de la proposition 4.2.3 et de [**13**, corollaire 5.1.11] (resp. de [**13**, théorème 5.3.29]). □

Remarque 4.2.13. Si on note par abus encore $\mathcal{W}$ le localisateur fondamental défini par les $\mathcal{W}$-équivalences (4.1.16), pour tout modeleur $\mathcal{E}$, il existe une équivalence de catégories

$$\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}} \ .$$

En effet, si on choisit une immersion asphérique $a : \mathcal{E} \longrightarrow \widehat{C}$ dont le but est le topos des préfaisceaux sur une catégorie test locale, en vertu de la proposition 4.2.3, le foncteur a_* induit une équivalence de catégories

$$a_* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{C} \ ,$$

et comme $\mathcal{E}$ et a sont asphériques, la catégorie C l'est aussi, ce qui implique que le foncteur i_C induit un équivalence de catégories

$$i_C : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{C} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}} \ .$$

3. Asphéricité locale

Dans cette section, on considère la catégorie topologique de tous les topos, et un localisateur fondamental accessible $\mathcal{W} \subset \mathsf{Fl}\,\mathcal{C}at$.

4.3.1. On rappelle que si $\mathcal{X}$ est un topos, $p_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}$ désigne le morphisme canonique vers le topos ponctuel.

Un morphisme de topos $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est une $\mathcal{W}$-*équivalence* si le morphisme de foncteurs induit par φ,

$$\mathsf{R}p_{\mathcal{Y}*}p_{\mathcal{Y}}^* \longrightarrow \mathsf{R}p_{\mathcal{X}*}p_{\mathcal{X}}^* \ ,$$

est un isomorphisme dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$ (3.4.4). Autrement dit, φ est une $\mathcal{W}$-équivalence si pour tout objet K de $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$, il induit un isomorphisme en cohomologie à coefficients dans K :

$$\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{Y}, p_{\mathcal{Y}}^*K) \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{X}, p_{\mathcal{X}}^*K) \ .$$

Exemple 4.3.2. Soit $\mathcal{W}_0$ le localisateur fondamental des 0-équivalences (au sens par exemple de [**13**, § 5.4.6]). Pour tout topos $\mathcal{X}$, le foncteur canonique de $\mathcal{X}$ vers $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}_0}(\mathcal{X})$ est une équivalence de catégories. Par conséquent, un morphisme de topos est une 0-*équivalence* (*i.e.* une $\mathcal{W}_0$-équivalence) si et seulement si pour tout ensemble E, l'application $\Gamma(\mathcal{Y}, p_{\mathcal{Y}}^*E) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, p_{\mathcal{X}}^*E)$ est bijective. Un topos $\mathcal{X}$ est donc 0-asphérique si et seulement si le foncteur image inverse $p_{\mathcal{X}}^* : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{X}$ est pleinement fidèle, autrement dit, si et seulement s'il est connexe au sens usuel. Les topos localement 0-asphériques sont ainsi simplement les topos localement connexes.

Proposition 4.3.3. *Un foncteur entre petites catégories $u : A \longrightarrow B$ est une $\mathcal{W}$-équivalence si et seulement si le morphisme de topos associé $u : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

Démonstration. Pour toute petite catégorie C, si p_C désigne le foncteur de C vers la catégorie finale, le foncteur

$$p_C^* : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\widehat{C})$$

admet pour adjoint à gauche le foncteur

$$\mathsf{L}\varinjlim : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\widehat{C}) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}} \ .$$

Par transposition, on voit aussitôt que pour que le morphisme $u : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence, il faut et il suffit que le morphisme de foncteurs canonique

$$\mathsf{L}\varinjlim p_A^* \longrightarrow \mathsf{L}\varinjlim p_B^*$$

soit un isomorphisme dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$. L'assertion résulte donc de [**13**, théorème 5.1.10] appliqué à la catégorie test Δ. □

Théorème 4.3.4. *Les $\mathcal{W}$-équivalences forment un localisateur topologique accessible. Si en outre $\mathcal{W}$ est propre, le localisateur topologique associé l'est aussi.*

Démonstration. La vérification des axiomes LT0, LT1 et LT2 est évidente. Un argument facile de 2-fonctorialité montre que pour tout topos $\mathcal{X}$, le foncteur

$$(1_{\mathcal{X}} \times p_{\Delta_1})^* : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X} \times \Delta_1)$$

est pleinement fidèle, ce qui implique aussitôt l'axiome LT3 (on peut remplacer pour cet argument Δ_1 par toute petite catégorie admettant un objet final). L'axiome LT4 résulte quant à lui du théorème 3.4.25. On a ainsi prouvé que les

$\mathcal{W}$-équivalences forment un localisateur topologique. L'accessibilité (resp. la propreté) résulte enfin de [**13**, théorème 5.1.10] (resp. [**13**, théorème 5.2.18]), de la proposition précédente, et du fait qu'il existe une $\mathcal{W}$-catégorie test. □

Remarque 4.3.5. On peut montrer que si $u : A \longrightarrow B$ est une $\mathcal{W}$-équivalence de $\mathcal{C}at$, alors le morphisme de topos $u : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence cartésienne.

Proposition 4.3.6. *Un morphisme de topos $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est $\mathcal{W}$-asphérique si et seulement si pour tout faisceau simplicial Y sur $\mathcal{Y}$ et tout ensemble simplicial K, la flèche canonique*

$$\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{Y})}(Y, p_{\mathcal{Y}}^*K) \longrightarrow \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X})}(\varphi^*Y, p_{\mathcal{X}}^*K)$$

est un isomorphisme dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$.

Démonstration. Supposons que φ est $\mathcal{W}$-asphérique. Soit K un objet de $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$. Pour tout faisceau Y sur $\mathcal{Y}$, on a un isomorphisme.

$$\mathsf{R}\Gamma(Y, p_{\mathcal{Y}}^*K) \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}\Gamma(\varphi^*Y, p_{\mathcal{X}}^*K) \ .$$

On en déduit aussitôt que pour tout faisceau Y sur $\mathcal{Y}$ et tout entier $n \geq 0$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{Y})}(Y \times \Delta_n, p_{\mathcal{Y}}^*K) \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X})}(\varphi^*Y \times \Delta_n, p_{\mathcal{X}}^*K) \ .$$

Soit Y un faisceau simplicial sur $\mathcal{Y}$. On choisit une catégorie génératrice C de $\mathcal{Y}$, et on note ϕ_Y^C le foncteur

$$C \times \Delta/Y \longrightarrow \mathcal{Y} \times \widehat{\Delta} \quad , \qquad ((U, \Delta_n), U \times \Delta_n \longrightarrow Y) \longmapsto U \times \Delta_n \ .$$

En procédant comme dans la preuve de 3.4.2, on montre que le morphisme canonique de $\mathsf{L}\varinjlim \phi_Y^C$ vers Y est un isomorphisme dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{Y})$. On obtient dès lors les isomorphismes suivants (cf. 3.3.8 et 3.4.21)

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{Y})}(Y, p_{\mathcal{Y}}^*K) &\simeq \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{Y})}(Y, p_{\mathcal{Y}}^*K) \\
&\simeq \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{Y})}(\mathsf{L}\varinjlim \phi_Y^C, p_{\mathcal{Y}}^*K) \\
&\simeq \mathsf{R}\varprojlim \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{Y})}(\phi_Y^C, p_{\mathcal{Y}}^*K) \\
&\simeq \mathsf{R}\varprojlim \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X})}(\varphi^*\phi_Y^C, p_{\mathcal{X}}^*K) \\
&\simeq \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X})}(\mathsf{L}\varinjlim \varphi^*\phi_Y^C, p_{\mathcal{X}}^*K) \\
&\simeq \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X})}(\varphi^*\mathsf{L}\varinjlim \phi_Y^C, p_{\mathcal{X}}^*K) \\
&\simeq \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X})}(\varphi^*Y, p_{\mathcal{X}}^*K) \ ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion. □

Proposition 4.3.7. *Pour tout topos localement $\mathcal{W}$-asphérique $\mathcal{X}$, le foncteur image inverse $p_{\mathcal{X}}^* : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X})$ admet un adjoint à gauche.*

Démonstration. Soit $a : \mathcal{X} \longrightarrow \widehat{C}$ une immersion $\mathcal{W}$-asphérique, C étant une petite catégorie (cf. 4.1.25). En vertu de la proposition 3.1.22, la catégorie $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X})$ est la localisation de la catégorie $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\widehat{C})$ par les équivalences de

$(\mathcal{W},J)$-descente, et le foncteur

$$a^* : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\widehat{C}) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X})$$

s'identifie au foncteur de localisation canonique. Par conséquent, son adjoint à droite, le foncteur

$$\mathsf{R}a_* : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\widehat{C}) \ ,$$

est pleinement fidèle. D'autre part, comme a est asphérique, pour tout objet K de $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$, et tout préfaisceau simplicial X sur C, on a en vertu de la proposition 4.3.6 un isomorphisme canonique

$$\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\widehat{C})}(X, p^*_{\widehat{C}}K) \simeq \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X})}(a^*X, p^*_{\mathcal{X}}K) \ .$$

Pour tout faisceau simplicial X sur $\mathcal{X}$, on a donc les identifications naturelles ci-dessous.

$$\begin{aligned}
\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}}(\mathsf{L}\varinjlim \mathsf{R}a_*X, K) &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\widehat{C})}(\mathsf{R}a_*X, p^*_{\widehat{C}}K) \\
&\simeq \pi_0\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\widehat{C})}(\mathsf{R}a_*X, p^*_{\widehat{C}}K) \\
&\simeq \pi_0\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X})}(a^*\mathsf{R}a_*X, p^*_{\mathcal{X}}K) \\
&\simeq \pi_0\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X})}(X, p^*_{\mathcal{X}}K) \\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X})}(X, p^*_{\mathcal{X}}K) \ .
\end{aligned}$$

Le foncteur $\mathsf{L}\varinjlim_{C^\circ}\mathsf{R}a_*$ est ainsi un adjoint à gauche de $p^*_{\mathcal{X}}$. □

4.3.8. Sous les hypothèses de la proposition ci-dessus, on désigne par $\tau^{\mathcal{W}}(\mathcal{X})$ le *$\mathcal{W}$-type d'homotopie associé à $\mathcal{X}$*, *i.e.* l'image par l'adjoint à gauche de $p^*_{\mathcal{X}}$ du faisceau final sur $\mathcal{X}$. Dans le cas où $\mathcal{W}$ est le localisateur fondamental des n-équivalences, $0 \leq n \leq \infty$, on notera plus simplement $\tau^n(\mathcal{X}) = \tau^{\mathcal{W}_n}(\mathcal{X})$.

LEMME 4.3.9. *Un morphisme de topos $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est asphérique si et seulement si le morphisme induit*

$$\mathcal{X} \times \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{Y} \times \widehat{\Delta}$$

est asphérique.

DÉMONSTRATION. Si Y est un faisceau sur $\mathcal{Y}$, et $n \geq 0$ un entier, le topos $\mathcal{X} \times \widehat{\Delta}/Y \times \Delta_n$ est équivalent à $\mathcal{X}/Y \times \widehat{\Delta}/\Delta_n$. En vertu du corollaire 4.1.17 on a donc le diagramme commutatif de topos suivant, dont les flèches horizontales sont des $\mathcal{W}$-équivalences.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \times \widehat{\Delta}/Y \times \Delta_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Y} \times \widehat{\Delta}/Y \times \Delta_n \arrow[d] \\
\mathcal{X}/Y \arrow[r] & \mathcal{Y}/Y
\end{tikzcd}$$

Les faisceaux de la forme $Y \times \Delta_n$, $Y \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{Y}$, $n \geq 0$, formant une famille génératrice de $\mathcal{Y} \times \widehat{\Delta}$, on en déduit l'assertion. □

4.3.10. Une immersion $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est *faiblement $\mathcal{W}$-asphérique* si $\mathcal{W}_{\mathcal{Y}} = \varphi^{*-1}\mathcal{W}_{\mathcal{X}}$ et si le morphisme de foncteurs $1_{\mathcal{Y}} \longrightarrow \varphi_*\varphi^*$ est une $\mathcal{W}$-équivalence naturelle. Par exemple, toute immersion $\mathcal{W}$-asphérique est faiblement $\mathcal{W}$-asphérique (proposition 4.2.3).

LEMME 4.3.11. *Soit $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ une immersion faiblement $\mathcal{W}$-asphérique. Alors pour tout faisceau Y sur $\mathcal{Y}$, $\varphi/Y : \mathcal{X}/Y \longrightarrow \mathcal{Y}/Y$ est une immersion faiblement $\mathcal{W}$-asphérique.*

Il s'agit d'une vérification soritale que nous laissons au lecteur.

LEMME 4.3.12. *Soit C une petite catégorie admettant un objet final ω. Pour tout ensemble simplicial X, et toute $\mathcal{W}$-équivalence de but fibrant (au sens du $C \times \Delta$-localisateur accessible $\mathcal{W}_{\widehat{C\times\Delta}}$) $p_C^* X \longrightarrow Y$, les morphismes d'ensembles simpliciaux*

$$X \longrightarrow Y_c \quad , \qquad c \in \mathsf{Ob}\, C \ ,$$

sont des $\mathcal{W}$-équivalences.

DÉMONSTRATION. Comme C est asphérique, la projection de $C \times \Delta$ vers Δ est asphérique, et donc en vertu de [**13**, proposition 5.1.18], le foncteur

$$p_C^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{C \times \Delta}$$

est l'adjoint à gauche d'une équivalence de Quillen. Par conséquent, le morphisme

$$X \longrightarrow \varprojlim_{C^\circ} Y = Y_\omega$$

est une $\mathcal{W}$-équivalence. On vérifie facilement que comme les morphismes entre préfaisceaux représentables sur C sont des $\mathcal{W}$-équivalences dans $\widehat{C \times \Delta}$, pour toute flèche $c \longrightarrow c'$ de C, le morphisme induit

$$Y_{c'} = \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(c', Y) \longrightarrow \mathsf{R}\,\mathsf{Hom}(c, Y) = Y_c$$

est un isomorphisme dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$. Ceci achève la démonstration, puisque pour tout objet c de C, il existe une (unique) flèche de c vers ω. $\square$

LEMME 4.3.13. *Soient C une petite catégorie admettant un objet final, et $a : \mathcal{X} \longrightarrow \widehat{C}$ une immersion. Si l'immersion induite*

$$\mathcal{X} \times \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{C \times \Delta}$$

est faiblement $\mathcal{W}$-asphérique, alors le topos $\mathcal{X}$ est $\mathcal{W}$-asphérique.

DÉMONSTRATION. Soient K un ensemble simplicial. On choisit une résolution fibrante $p_{\mathcal{X}}^* K \longrightarrow Y$ au sens du $\mathcal{X} \times \widehat{\Delta}$-localisateur de $\mathcal{W}$-descente. Alors $a_* Y$ est fibrant au sens des $\mathcal{W}$-équivalences étagées dans $\widehat{C \times \Delta}$. Par hypothèse, le morphisme composé

$$p_C^* K \longrightarrow a_* p_{\mathcal{X}}^* K \longrightarrow a_* Y$$

est une $\mathcal{W}$-équivalence. Il résulte du lemme précédent et du lemme 3.2.24 que Y est fibrant au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{C\times\Delta}}$, et que $p_C^* K \longrightarrow a_* Y$ est une $\mathcal{W}$-équivalence étagée. On en déduit aussitôt que la flèche canonique

$$\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{X}, p_{\mathcal{X}}^* K) \longrightarrow \mathsf{R}\Gamma(\widehat{C}, p_C^* K)$$

est un isomorphisme, *i.e.* que le morphisme $a : \mathcal{X} \longrightarrow \widehat{C}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. Comme $\widehat{C}$ est $\mathcal{W}$-asphérique, cela implique que $\mathcal{X}$ l'est aussi. $\square$

PROPOSITION 4.3.14. *Soient C une petite catégorie et $a : \mathcal{X} \longrightarrow \widehat{C}$ une immersion. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le morphisme a est $\mathcal{W}$-asphérique.*

(ii) *L'immersion induite par a,*
$$a \times 1_{\widehat{\Delta}} : \mathcal{X} \times \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{C} \times \widehat{\Delta} \simeq \widehat{C \times \Delta}\ ,$$
est faiblement $\mathcal{W}$-asphérique.

DÉMONSTRATION. Si a est $\mathcal{W}$-asphérique, en vertu du lemme 4.3.9, il en est de même de $a \times 1_{\widehat{\Delta}}$, et donc la proposition 4.2.3 montre que $a \times 1_{\widehat{\Delta}}$ est faiblement $\mathcal{W}$-asphérique. Réciproquement, si la condition (ii) est vérifiée, alors il résulte du lemme 4.3.11 que pour tout objet c de C, le morphisme $\mathcal{X}/c \longrightarrow \widehat{C/c}$ vérifie la même condition, et comme la catégorie C/c admet un objet final, le lemme 4.3.13 implique que $\mathcal{X}/c$ est un topos $\mathcal{W}$-asphérique. Par conséquent, le morphisme a est asphérique. $\square$

COROLLAIRE 4.3.15. *Soit $\mathcal{W}_i$, $i \in I$, une petite famille de localisateurs fondamentaux accessibles. Le localisateur fondamental $\mathcal{W}$, intersection des $\mathcal{W}_i$, est accessible (cf.* [**13**, 2.3.13 et 5.1.10]*). On considère une petite catégorie C, et une immersion $a : \mathcal{X} \longrightarrow \widehat{C}$. Si pour tout $i \in I$, a est $\mathcal{W}_i$-asphérique, alors a est $\mathcal{W}$-asphérique.*

DÉMONSTRATION. Si a est $\mathcal{W}_i$-asphérique pour tout i, alors la proposition précédente implique que $a \times 1_{\widehat{\Delta}}$ est faiblement $\mathcal{W}_i$-asphérique pour tout i. En vertu de la proposition 4.3.3, $a \times 1_{\widehat{\Delta}}$ est donc faiblement $\mathcal{W}$-asphérique, et une nouvelle application de la proposition 4.3.14 montre que a est $\mathcal{W}$-asphérique. $\square$

COROLLAIRE 4.3.16. *Soit $\mathcal{X}$ un topos muni d'une petite famille génératrice $\mathcal{U}$ telle que pour tout élément X de $\mathcal{U}$, et tout entier $n \geq 0$, $\mathcal{X}/X$ soit n-asphérique. Alors $\mathcal{X}$ est localement ∞-asphérique.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte aussitôt du corollaire précédent et de [**13**, corollaire 7.1.19]. $\square$

LEMME 4.3.17. *On considère un localisateur fondamental accessible $\mathcal{W}$. Soit $\mathcal{X}$ un topos localement $\mathcal{W}$-asphérique et $\mathcal{W}$-asphérique. Alors pour tout topos $\mathcal{Y}$, le foncteur image inverse induit par la projection $p_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$*
$$p_{\mathcal{X}}^* : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$$
est pleinement fidèle.

DÉMONSTRATION. Il s'agit de vérifier que le morphisme $1_{\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{Y})} \longrightarrow \mathsf{R}p_{\mathcal{X}*}p_{\mathcal{X}}^*$ est un isomorphisme. Soient C une petite catégorie, et $a : \mathcal{X} \longrightarrow \widehat{C}$ une immersion $\mathcal{W}$-asphérique. Comme $\mathcal{X}$ est $\mathcal{W}$-asphérique, il en est de même de $\widehat{C}$ (et donc de C). En vertu de la proposition 4.3.3, la catégorie C est $\mathcal{W}$-asphérique. On en déduit que le foncteur image inverse
$$p_{\widehat{C}}^* : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\widehat{C} \times \mathcal{Y})$$

est pleinement fidèle. En effet, l'assertion est vérifiée dans le cas du topos ponctuel, et on en déduit qu'elle l'est aussi dans le cas où $\mathcal{Y}$ est une catégorie de préfaisceaux (on le voit en testant le morphisme d'adjonction adéquat sur les fibres grâce à l'isomorphisme de changement de base 3.4.18 appliqué à l'exemple 3.4.10). En considérant une immersion $b : \mathcal{Y} \longrightarrow \widehat{D}$, on en déduit le cas général en utilisant la pleine fidélité de $\mathsf{R}b_*$. De même, l'immersion a de $\mathcal{X}$ dans $\widehat{C}$ induit un couple de foncteurs adjoints

$$a^* : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\widehat{C} \times \mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X} \times \mathcal{E}) \qquad \mathsf{R}a_* : \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\mathcal{X} \times \mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}(\widehat{C} \times \mathcal{E})$$

pour tout topos $\mathcal{E}$. Le foncteur $\mathsf{R}a_*$ étant pleinement fidèle. On en déduit que $\mathsf{R}p_{\mathcal{X}*} = \mathsf{R}a_*\mathsf{R}p_{\widehat{C}*}a^*$ et $p_{\mathcal{X}}^* \simeq a^*p_{\widehat{C}}^*\mathsf{R}a_*$. Cela nous donne l'isomorphisme attendu. □

Proposition 4.3.18. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible.*

(i) *Si $\mathcal{X}$ est un topos localement $\mathcal{W}$-asphérique et $\mathcal{W}$-asphérique, alors pour tout topos $\mathcal{Y}$, la projection de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ sur $\mathcal{Y}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

(ii) *Si $u : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence, alors pour tout topos localement $\mathcal{W}$-asphérique $\mathcal{Z}$, le morphisme $\mathcal{X} \times \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ est $\mathcal{W}$-asphérique au-dessus de $\mathcal{Z}$. En particulier, c'est une $\mathcal{W}$-équivalence.*

Démonstration. L'assertion (i) résulte aussitôt du lemme précédent. L'assertion (ii) en résulte dans la cas où $\mathcal{Z}$ est en outre $\mathcal{W}$-asphérique. Dans le cas général, pour tout faisceau $\mathcal{W}$-asphérique Z de $\mathcal{Z}$, on en déduit que

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Z}/Z \simeq (\mathcal{X} \times \mathcal{Z})/Z \longrightarrow (\mathcal{Y} \times \mathcal{Z})/Z \simeq \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}/Z$$

est une $\mathcal{W}$-équivalence. □

Théorème 4.3.19. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental accessible. Les topos localement $\mathcal{W}$-asphériques forment une catégorie topologique notée $\mathfrak{T}_{\mathcal{W}}$. En outre, les $\mathcal{W}$-équivalences forment un localisateur topologique stable par produits finis sur $\mathfrak{T}_{\mathcal{W}}$.*

Démonstration. L'axiome CT2 est évident, et l'axiome CT1 résulte de la proposition 4.3.18 (ii). Il reste donc à prouver l'axiome CT3. Soient I une petite catégorie, et $\mathcal{X}$ un topos fibré sur I dont les fibres sont localement $\mathcal{W}$-asphérique. Pour chaque objet i de I, on choisit une (petite) famille génératrice $\mathcal{W}$-asphérique $\mathcal{U}_i$ de $\mathcal{X}_i$. On note $\mathcal{U}$ la réunion des familles $i_!\mathcal{U}_i$ (3.4.12). On sait que $\mathcal{U}$ est une famille génératrice de $\mathsf{Top}(\mathcal{X})$. Il suffit donc de montrer qu'elle est $\mathcal{W}$-asphérique. Or si X est un élément de $\mathcal{U}_i$, la flèche de X vers le faisceau final sur $\mathcal{X}_i$ induit un morphisme $u : i_!X \longrightarrow i_!e$. Or $i_!e \simeq \theta_{\mathcal{X}}^*(i)$ (cf. la preuve de 3.4.17), et donc on obtient un objet $Y = (i_!X, u)$ de $\mathsf{Top}(\mathcal{X})/i$. On vérifie immédiatement que $(\mathsf{Top}(\mathcal{X})/i)/Y \simeq \mathsf{Top}(\mathcal{X})/i_!X$. D'autre part, on sait que le morphisme canonique $u_i : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathsf{Top}(\mathcal{X})/i$ est pleinement fidèle et admet un adjoint à gauche g_i (4.1.18). On en déduit aussitôt que $g_i \times 1_{\widehat{\Delta}}$ est faiblement $\mathcal{W}$-asphérique. En vertu du lemme 4.3.11, le morphisme $(v_i \times 1_{\widehat{\Delta}})/Y : (\mathsf{Top}(\mathcal{X})/i \times \widehat{\Delta})/Y \longrightarrow \mathcal{X}_i \times \widehat{\Delta}/Y$ est faiblement $\mathcal{W}$-asphérique. La proposition 4.3.14 implique donc que $v_i/Y : (\mathsf{Top}(\mathcal{X})/i)/Y \longrightarrow \mathcal{X}_i/Y$ est $\mathcal{W}$-asphérique. Or $Y = v_{i*}X$, et $v_i^*Y \simeq v_{i*}v_i^*X \simeq X$. Comme $\mathcal{X}_i/X$ est $\mathcal{W}$-asphérique, on en déduit qu'il en est de même de $\mathsf{Top}(\mathcal{X})/i_!X$. Le fait que les $\mathcal{W}$-équivalences forment un localisateur topologique stable par produits finis sur $\mathfrak{T}_{\mathcal{W}}$ résulte du théorème 4.3.4 et de la proposition 4.3.18. $\square$

CHAPITRE 5

Cohomologie

1. Faisceaux d'Eilenberg-MacLane

5.1.1. Soit $\mathcal{E}$ un topos. On rappelle que $\mathbf{s}\mathcal{E}$ désigne la catégorie des faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{E}$ et que $\mathsf{Hot}(\mathcal{E})$ est la localisation de celle-ci par les équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente. On note

$$X \longmapsto K(X, 0)$$

le foncteur d'inclusion canonique de $\mathcal{E}$ vers $\mathbf{s}\mathcal{E}$. Il est l'adjoint à droite du foncteur π_0. Pour tout faisceau simplicial X, on a donc un morphisme naturel

$$X \longrightarrow K(\pi_0(X), 0) \ .$$

Comme le foncteur π_0 envoie les équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente sur des isomorphismes (3.2.37), on a donc un couple de foncteurs adjoints

$$\pi_0 : \mathsf{Hot}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E} \qquad K(\ .\ , 0) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathsf{Hot}(\mathcal{E}) \ .$$

Si X est un faisceau sur $\mathcal{E}$ on note

$$H^0(\mathcal{E}, X) = \Gamma(\mathcal{E}, X) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}(\mathcal{E})}(*, K(X, 0)) \ .$$

Pour chaque entier $n \geq 0$, on définit un foncteur

$$\mathrm{Cosk}^n : \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}$$

par $(\mathrm{Cosk}^n X)_q = \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{E}}(\mathrm{Sk}^n \Delta_q, X)_0$, $q \geq 0$. On a un morphisme de foncteurs canonique

$$\mathrm{Cosk}^n \longrightarrow 1_{\mathbf{s}\mathcal{E}} \ .$$

Un faisceau simplicial X est 0-*tronqué*, ou encore *concentré en degré* 0, si le morphisme canonique de X vers $K(\pi_0(X), 0)$ est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente (ou de manière équivalente, un isomorphisme dans $\mathsf{Hot}(\mathcal{E})$).

Soit $n \geq 1$ un entier. Un faisceau simplicial X est n-*tronqué* si pour tout entier $i > n$, le faisceau d'homotopie $\pi_i(X)$ est trivial, *i.e.* si la flèche canonique de $\pi_i(X)$ vers X_0 est un isomorphisme.

Si $n \geq 0$, on note $\mathcal{W}_n$ le Δ-localisateur géométrique (et propre) des n-équivalences. Pour alléger les notations, on note $\mathsf{Hot}_n(\mathcal{E})$ la localisation de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ par les équivalences de $\mathcal{W}_n$-descente. Un faisceau simplicial X sur $\mathcal{E}$ est dit *localement n-fibrant* s'il est localement $\mathcal{W}_n$-fibrant.

LEMME 5.1.2. *Soit $n \geq 0$ un entier. Le foncteur* Cosk^{n+1} *respecte les hyperrecouvrements et envoie les faisceaux simpliciaux localement fibrants sur des faisceaux simpliciaux localement n-fibrants.*

Démonstration. En vertu du corollaire 2.2.7, la formation des foncteurs Cosk^n commute aux points faibles de $\mathcal{E}$. Comme l'assertion est vérifiée dans le cas du topos ponctuel (cf. [**13**, 7.1.10 et 7.1.16]), elle l'est aussi dans le cas général grâce à la proposition 2.2.15. □

Lemme 5.1.3. *Soit $n \geq 0$ un entier. Pour tout faisceau simplicial localement fibrant X, le morphisme $X \longrightarrow \operatorname{Cosk}^{n+1} X$ est une équivalence de $\mathcal{W}_n$-descente.*

Démonstration. L'assertion est vérifiée dans le cas du topos ponctuel en vertu de [**13**, proposition 7.1.3 et corollaire 7.1.17]. Le cas des catégories de préfaisceaux en résulte grâce à la proposition 3.1.14. Soit (C, J) un petit site tel que $\mathcal{E}$ s'identifie à la catégorie des faisceaux sur C. On note comme de coutume a le foncteur faisceau associé, et i son adjoint à droite. On choisit enfin une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente de but fibrant au sens de la $\mathcal{W}_\infty$-descente $X \longrightarrow X'$. Alors en vertu de la proposition 3.1.12, iX' est un préfaisceau en complexes de Kan, et donc le morphisme

$$iX' \longrightarrow \operatorname{Cosk}^{n+1} iX' \simeq i \operatorname{Cosk}^{n+1} X'$$

est une n-équivalence étagée, ce qui implique que

$$X' \simeq aiX' \longrightarrow ai \operatorname{Cosk}^{n+1} X' \simeq \operatorname{Cosk}^{n+1} X'$$

est une équivalence de $\mathcal{W}_n$-descente. D'autre part, en vertu du lemme 5.1.2, les objets $\operatorname{Cosk}^{n+1} X$ et $\operatorname{Cosk}^{n+1} X'$ sont des faisceaux simpliciaux localement n-fibrants, ce qui permet de vérifier par une application du théorème 3.2.39 que le morphisme

$$\operatorname{Cosk}^{n+1} X \longrightarrow \operatorname{Cosk}^{n+1} X'$$

est une équivalence de $\mathcal{W}_n$-descente. Le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ \operatorname{Cosk}^{n+1} X \arrow[r] & \operatorname{Cosk}^{n+1} X' \end{tikzcd}$$

permet de conclure. □

Proposition 5.1.4. *On considère un entier $n \geq 0$. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de faisceaux simpliciaux localement fibrants. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le morphisme f est une équivalence de $\mathcal{W}_n$-descente.*

(ii) *Le morphisme $\operatorname{Cosk}^{n+1} f$ est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente.*

(iii) *Pour tout point faible p de $\mathcal{E}$, le morphisme pf est une n-équivalence.*

(iv) *Le morphisme f induit un isomorphisme*

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y) \ ,$$

et pour tout entier i, $1 \leq i \leq n$, un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \pi_i(X) \arrow[r, "\pi_i(f)"] \arrow[d] & \pi_i(Y) \arrow[d] \\ X_0 \arrow[r, "f_0"'] & Y_0 \end{tikzcd} \quad .$$

Démonstration. L'équivalence entre (i) et (ii) résulte aussitôt du lemme ci-dessus, et l'équivalence entre les énoncés (ii), (iii) et (iv) est une conséquence immédiate de [**13**, corollaire 7.1.17] et du théorème 3.2.39. □

Corollaire 5.1.5. *Un faisceau simplicial fibrant au sens de la $\mathcal{W}_\infty$-descente est n-tronqué si et seulement s'il est fibrant au sens de la $\mathcal{W}_n$-descente.*

Démonstration. Cela résulte de la proposition 5.1.4 et du lemme 3.2.24. □

Corollaire 5.1.6. *Un faisceau simplicial localement fibrant est n-tronqué si et seulement s'il est localement n-fibrant.*

Démonstration. En vertu du corollaire précédent, l'assertion est vérifiée dans le cas du topos ponctuel. Le cas particulier implique le cas général en utilisant les points faibles de $\mathcal{E}$. □

Corollaire 5.1.7. *Un faisceau simplicial X est n-tronqué si et seulement si* $\mathrm{Ex}^\infty X$ *est localement n-fibrant.*

Démonstration. Cela résulte du corollaire précédent et du lemme 3.2.35. □

5.1.8. On note $\mathbf{s}\mathcal{E}_\bullet$ la catégorie des faisceau simpliciaux pointés sur $\mathcal{E}$. Le foncteur d'oubli de $\mathbf{s}\mathcal{E}_\bullet$ vers $\mathbf{s}\mathcal{E}$ admet un adjoint à gauche

$$\mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}_\bullet \quad , \qquad X \longmapsto X_+ = X \amalg * \ ,$$

où $*$ désigne le faisceau final sur $\mathcal{E}$. La catégorie $\mathbf{s}\mathcal{E}_\bullet$ admet une structure de catégorie de modèles fermée (propre, à engendrement cofibrant) dont les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les flèches dont l'image dans $\mathbf{s}\mathcal{E}$ par le foncteur d'oubli est une équivalence (resp. une fibration) de $\mathcal{W}_\infty$-descente. On désigne par $\mathsf{Hot}_\bullet(\mathcal{E})$ la catégorie homotopique associée.

Si G est un faisceau en groupes sur $\mathcal{E}$, on note $K(G,1)$, ou encore BG, le nerf de G vu comme un faisceau en catégories sur $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{E}_{gr}$ désigne la catégorie des faisceaux en groupes sur $\mathcal{E}$, on obtient ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$K(\ .\ ,1) : \mathcal{E}_{gr} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}_\bullet \ .$$

On a d'autre part un foncteur de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}_{gr}$ qui associe à un faisceau simplicial pointé (X,x) sont premier groupe d'homotopie $\pi_1(X,x)$. On vérifie que cela définit un adjoint à gauche du foncteur $K(\ .\ ,1)$,

$$\pi_1 : \mathbf{s}\mathcal{E}_\bullet \longrightarrow \mathcal{E}_{gr} \ .$$

Si X est un faisceau simplicial sur $\mathcal{E}$, alors $X|_{X_0}$ est un faisceau sur $\mathcal{E}/X_0$ canoniquement pointé, ce qui permet de définir un faisceau $K(\pi_1(X),1)$ sur $\mathcal{E}/X_0$.

On dit qu'un faisceau simplicial X est *concentré en degré* 1 s'il est connexe ($i.e$ si $\pi_0(X)$ est le faisceau final) et s'il est 1-tronqué.

PROPOSITION 5.1.9. *Soit X un faisceau simplicial. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le faisceau simplicial X est concentré en degré* 1.

(ii) *Le faisceau simplicial X est connexe, et le morphisme canonique*

$$X|_{X_0} \longrightarrow K(\pi_1(X), 1)$$

est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente dans $\mathcal{E}/X_0$.

(iii) *Le faisceau simplicial X est connexe et pour tout objet U de $\mathcal{E}$, et toute section x de X au-dessus de U, le morphisme canonique*

$$X|_U \longrightarrow K(\pi_1(X|_U, x), 1)$$

est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente dans $\mathcal{E}/U$.

DÉMONSTRATION. L'assertion est évidente dans le cas où $\mathcal{E}$ est le topos ponctuel, et le cas général en résulte grâce au corollaire 3.2.41 et au fait que les points faibles de $\mathcal{E}$ commutent à la formation des faisceaux d'homotopie. □

LEMME 5.1.10. *Soit $f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ un morphisme de faisceaux simpliciaux pointés et connexes. Pour que f soit une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente, il faut et il suffit que f induise des isomorphismes*

$$\pi_n(f, x) : \pi_n(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_n(Y, y)$$

pour tout entier $n \geq 1$.

DÉMONSTRATION. Montrons que la condition est suffisante. On peut supposer que X et Y sont localement fibrants. En vertu du théorème 3.2.39, il suffit de montrer que pour tout point faible p de $\mathcal{E}$, pf est une $\mathcal{W}_\infty$-équivalence. Or d'après les hypothèses, les ensembles simpliciaux pX et pY sont connexes. Autrement dit, il suffit de montrer l'assertion dans le cas du topos ponctuel, ce qui est bien connu. □

PROPOSITION 5.1.11. *Soit (X, x) un faisceau simplicial pointé. Pour que X soit concentré en degré 1, il faut et il suffit que le morphisme canonique $X \longrightarrow K(\pi_1(X, x), 1)$ soit une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente.*

DÉMONSTRATION. La proposition 5.1.9 implique que c'est une condition nécessaire. Pour montrer la réciproque, il suffit de montrer que si G est un faisceau en groupes, $K(G, 1)$ est concentré en degré 1, ce qui est évident. □

5.1.12. Soit G un faisceau en groupes sur $\mathcal{E}$. On rappelle qu'un *torseur sous* G, ou encore un G-*torseur* (à gauche), est un faisceau X sur $\mathcal{E}$, muni d'une action de G à gauche, tel que le morphisme

$$G \times X \longrightarrow X \times X ,$$

induit par l'action $G \times X \longrightarrow X$ et la seconde projection $G \times X \longrightarrow X$, soit un isomorphisme, et tel que la flèche de X vers le faisceau final soit un épimorphisme. Un morphisme de G-torseurs est un morphisme de faisceaux compatible à l'action de G. Tout G-torseur est localement isomorphe à G (agissant sur lui même par translations), ce qui implique que tout morphisme de G-torseurs est un isomorphisme. On note $\mathsf{Tors}(\mathcal{E}, G)$ la catégorie des G-torseurs, et on pose

$$H^1(\mathcal{E}, G) = \pi_0 \mathsf{Tors}(\mathcal{E}, G) \ .$$

Autrement dit $H^1(\mathcal{E}, G)$ est l'ensemble des classes d'isomorphie de G-torseurs. Cet ensemble est canoniquement pointé par le *G-torseur universel*, *i.e.* le faisceau G agissant sur lui-même par translations.

PROPOSITION 5.1.13. *Soit G un faisceau en groupes sur $\mathcal{E}$. On a alors les identifications suivantes (*$\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, BG)$ *est vu comme un objet de* $\mathsf{Hot}_\bullet$*) :*

$$\pi_n \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, BG) \simeq \begin{cases} H^1(\mathcal{E}, G) & si\ n = 0, \\ H^0(\mathcal{E}, G) = \Gamma(\mathcal{E}, G) & si\ n = 1, \\ 0 & si\ n \geq 2. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. On remarque que le faisceau simplicial BG est localement fibrant. Pour le voir, on applique la méthode habituelle : l'assertion est vérifiée dans le cas du topos ponctuel, ce qui implique le cas général en utilisant les points faibles de $\mathcal{E}$. Le cas $n = 0$ résulte ensuite du corollaire 3.2.44 et de [**26**, chapitre III, remarque 3.6.5] (voir aussi [**40**]). Comme en vertu de ce qui précède BG est en particulier 1-tronqué, il en est de même de $\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, BG)$ (cf. 3.4.6 et 5.1.5), ce qui résout le cas $n \geq 2$. Enfin, pour $n = 1$, on vérifie qu'on a un isomorphisme canonique $\Omega BG \simeq G$ dans $\mathcal{E}_\bullet$, ce qui implique aussitôt l'assertion. □

5.1.14. On note $\mathcal{E}_{ab}$ la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur $\mathcal{E}$. Le foncteur d'oubli

$$i : \mathcal{E}_{ab} \longrightarrow \mathcal{E}$$

admet un adjoint à gauche

$$\mathbb{Z} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_{ab} \quad , \qquad X \longmapsto \mathbb{Z}(X) \ .$$

Si X est un faisceau simplicial, $\mathbb{Z}(X)$ est un faisceau en groupes abéliens simpliciaux, que l'on peut voir comme un complexe de faisceaux en groupes abéliens en prenant pour différentielles les sommes alternées de faces. Par conséquent, si $\mathsf{C}(\mathcal{E}_{ab})$ désigne la catégorie des complexes de faisceaux en groupes abéliens sur $\mathcal{E}$ (avec la notation homologique, *i.e.* un complexe est la donnée d'objets M_n, $n \in \mathbb{Z}$, de $\mathcal{E}_{ab}$, et de différentielles $d_n : M_n \longrightarrow M_{n-1}$), on a un *foncteur d'abélianisation*

$$\mathbb{Z} : \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathsf{C}(\mathcal{E}_{ab}) \ .$$

Celui-ci commute aux petites limites inductives et admet donc un adjoint à droite

$$i : \mathsf{C}(\mathcal{E}_{ab}) \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E} \ .$$

On note $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ la *catégorie dérivée de* $\mathcal{E}_{ab}$, *i.e.* la localisation de $\mathsf{C}(\mathcal{E}_{ab})$ par les quasi-isomorphismes (cf. [**62**, chapitre III, définition 1.2.2]). La catégorie $\mathsf{C}(\mathcal{E}_{ab})$ admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les cofibrations sont les monomorphismes, et les équivalences faibles les quasi-isomorphismes (cf. [**34**, théorème 2.2] et [**53**]). Un argument standard (voir par exemple [**25**, appendice II, lemme 1.3]) montre que cette structure est propre.

PROPOSITION 5.1.15. *Le foncteur $\mathbb{Z} : \mathbf{s}\mathcal{E} \longrightarrow \mathsf{C}(\mathcal{E}_{ab})$ respecte les monomorphismes et envoie les équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente sur des quasi-isomorphismes.*

DÉMONSTRATION. Il résulte de [**25**, appendice II] que l'assertion est vérifiée dans le cas du topos ponctuel, et donc dans celui des catégories de préfaisceaux. Soit $\mathcal{W}$ la classe des flèches de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ dont l'image par $\mathbb{Z}$ est un quasi-isomorphisme. Il est clair que $\mathcal{W}$ contient les équivalences d'homotopie simpliciales, et donc, comme $\mathbb{Z}$ respecte les monomorphismes et commute aux petites limites inductives, que $\mathcal{W}$ est un $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur. Pour montrer que $\mathcal{W}$ contient les équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente, on va montrer que le critère (iii) du théorème 3.3.9 est vérifié. Soient C une petite catégorie et $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \widehat{C}$ un morphisme de topos. Le foncteur composé

$$\mathbf{s}\widehat{C} \xrightarrow{\varphi^*} \mathbf{s}\mathcal{E} \xrightarrow{\mathbb{Z}} \mathsf{C}(\mathcal{E}_{ab})$$

envoie les équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente sur des quasi-isomorphismes : ce dernier est isomorphe au foncteur composé

$$\mathbf{s}\widehat{C} \xrightarrow{\mathbb{Z}} \mathsf{C}(\widehat{C}_{ab}) \xrightarrow{a} \mathsf{C}(\mathcal{E}_{ab}) \ ,$$

lequel vérifie trivialement la propriété escomptée. Plus généralement, si X est un faisceau sur $\mathcal{E}$, si un morphisme de $\mathbf{s}\mathcal{E}/X$ induit un quasi-isomorphisme dans $\mathsf{C}((\mathcal{E}/X)_{ab})$, son image dans $\mathbf{s}\mathcal{E}$ par le foncteur d'oubli canonique est dans $\mathcal{W}$. En effet, si K est un faisceau simplicial sur X, et si M est un complexe faisceaux en groupes abéliens sur $\mathcal{E}$, alors on a un isomorphisme de groupes naturel

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{E}/X)}(\mathbb{Z}(K), M|_X) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{E})}(\mathbb{Z}(K), M) \ .$$

Cela achève la démonstration de la proposition. □

LEMME 5.1.16. *Tout faisceau en groupes simpliciaux est localement fibrant.*

DÉMONSTRATION. Dans le cas du topos ponctuel, l'assertion est un résultat bien connu dû à Moore. Le cas général en résulte en testant sur les points faibles de $\mathcal{E}$. □

LEMME 5.1.17. *Si M est un complexe de faisceaux en groupes abéliens, alors iM est un faisceau simplicial localement fibrant et pour tout entier $n \geq 0$, on a un isomorphisme canonique de faisceaux*

$$\pi_n(iM, 0) \simeq H_n(M) \ .$$

En particulier, le foncteur $i : \mathsf{C}(\mathcal{E}_{ab}) \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{E}$ envoie les quasi-isomorphismes sur des équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente.

DÉMONSTRATION. Soit $\tau^{\geq 0}M$ le complexe défini par

$$(\tau^{\geq 0}M)_i = \begin{cases} M_i & \text{si } i \geq 1, \\ \ker(d_0 : M_0 \to M_{-1}) & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i < 0. \end{cases}$$

Alors pour $n < 0$, $H_n(\tau^{\geq 0}M) = 0$, et on a un morphisme canonique $\tau^{\geq 0}M \longrightarrow M$ induisant des isomorphismes

$$H_n(\tau^{\geq 0}M) \simeq H_n(M) \quad , \quad n \geq 0 \ .$$

On peut donc supposer que $\tau^{\geq 0}M = M$. Mais alors iM est le faisceau en groupes simpliciaux associé à M par la correspondance de Dold-Kan (cf. [**49**, théorème 22.4]) et est donc un faisceau simplicial localement fibrant en vertu du lemme précédent. L'isomorphisme $\Omega(iM, 0) \simeq i(M\,[-1])$ montre qu'il suffit de vérifier que $\pi_0(iM) \simeq H_0(M)$, ce qui est immédiat. □

Corollaire 5.1.18. *Le foncteur d'abélianisation et sont adjoint à droite induisent un couple de foncteurs adjoints*

$$\mathbb{Z} : \mathsf{Hot}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{E}) \qquad i : \mathcal{D}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{Hot}(\mathcal{E}) \ .$$

Corollaire 5.1.19. *Soit $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de topos. Les carrés suivants commutent à isomorphisme de foncteurs canoniques près.*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hot}(\mathcal{F}) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\mathbb{Z}"'] & \mathsf{Hot}(\mathcal{E}) \arrow[d, "\mathbb{Z}"] \\ \mathcal{D}(\mathcal{F}) \arrow[r, "\varphi^*"'] & \mathcal{D}(\mathcal{E}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{D}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathsf{R}\varphi_*"] \arrow[d, "i"'] & \mathcal{D}(\mathcal{F}) \arrow[d, "i"] \\ \mathsf{Hot}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathsf{R}\varphi_*"'] & \mathsf{Hot}(\mathcal{F}) \end{tikzcd} \ .$$

Démonstration. La commutativité du premier carré est évidente, et celle du second en résulte par transposition. □

5.1.20. Soit X un faisceau simplicial. Pour $n \geq 0$, on note $H_n(X) = H_n(\mathbb{Z}(X))$ le *n-ème faisceau d'homologie de X*.

Soit $n \geq 0$ un entier. Un faisceau simplicial X sur $\mathcal{E}$ est *n-connexe* si le morphisme de X vers le faisceau final est une équivalence de $\mathcal{W}_n$-descente. En vertu de la proposition 5.1.4, cela revient encore à demander que X soit connexe et que pour tout entier i, $1 \leq i \leq n$, le faisceau d'homotopie $\pi_i(X)$ soit trivial. Par exemple un faisceau simplicial X est concentré en degré $n+1$ si et seulement s'il est n-connexe et $n+1$-tronqué.

Proposition 5.1.21. *Soient $n \geq 0$ un entier, et X un faisceau simplicial sur $\mathcal{E}$. Si X est n-connexe, alors pour tout i, $1 \leq i \leq n$, le i-ème faisceau d'homologie de X est trivial. Si en outre X admet une section globale x, le morphisme canonique $X \longrightarrow i\mathbb{Z}(X)$ induit un isomorphisme $\pi_{n+1}(X, x) \simeq H_{n+1}(X)$.*

Démonstration. Quitte à remplacer X par exemple par $\mathrm{Ex}^\infty X$, on peut supposer que X est localement fibrant. On vérifie aussitôt que $H_i(X)$ est isomorphe à $H_i(\mathrm{Cosk}^{n+1} X)$ (cf. [**31**, lemme 7.2.1]). Or $\mathrm{Cosk}^{n+1} X$ est à la fois n-connexe et n-tronqué, ce qui implique que $\mathrm{Cosk}^{n+1} X$ est un hyper-recouvrement de $\mathcal{E}$, et donc que $\mathbb{Z}(\mathrm{Cosk}^{n+1} X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est acyclique (où $\mathbb{Z}$ désigne l'image du faisceau final par le foncteur d'abélianisation). Considérons à présent une section globale $x : * \longrightarrow X$. On choisit une équivalence de $\mathcal{W}_n$-descente de but fibrant au sens de la $\mathcal{W}_n$-descente $u : X \longrightarrow X^{(n)}$. On peut supposer que celle ci est une fibration de $\mathcal{W}_\infty$-descente : on factorise u en $u = qj$ où $j : X \longrightarrow X'$ est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente et $q : X' \longrightarrow X^{(n)}$ est une fibration de $\mathcal{W}_\infty$-descente. Il suffit ensuite de remplacer X par X'. On note qx l'image par q de la section x, et on forme le carré cartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "j"] \arrow[d] & X \arrow[d, "q"] \\ * \arrow[r, "qx"'] & X^{(n)} \end{tikzcd}$$

Comme qx est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente (5.1.4), il en est de même du morphisme j. Or Y est un préfaisceau en complexes de Kan n-connexes sur $\mathcal{E}$, ce qui implique en vertu du théorème de Hurewicz [**49**, § 13] que pour tout objet U de $\mathcal{E}$, le morphisme $Y(U) \longrightarrow i\mathbb{Z}(Y(U))$ induit un isomorphisme $\pi_{n+1}(Y(U), x) \simeq H_{n+1}(Y(U))$. En passant au foncteur faiseau associé, on en conclut que le morphisme canonique $\pi_{n+1}(Y, x) \longrightarrow H_{n+1}(Y)$ est un isomorphisme. La même conclusion vaut par conséquent pour X. □

5.1.22. Soit A un faisceau en groupes abéliens sur $\mathcal{E}$. On note encore par abus A le complexe de valeur A en degré 0 et nul en degrés différents de 0. Pour $n \geq 0$, on pose $K(A, n) = i(A\,[n])$. On remarque qu'on a des isomorphismes canoniques dans $\mathsf{Hot}_\bullet$

$$\Omega(K(A, n), 0) \simeq K(A, n-1) \quad , \qquad n \geq 1 \ .$$

On rappelle que le n-ème groupe de cohomologie de $\mathcal{E}$ à coefficients dans A est

$$H^n(\mathcal{E}, A) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{E})}(\mathbb{Z}(*), A\,[n]) \simeq \pi_0 \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, K(A, n)) \ .$$

Proposition 5.1.23. *Soient $n \geq 0$ et A un faisceau en groupes abéliens sur $\mathcal{E}$. Alors on a les identifications suivantes ($\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, K(A, n))$ étant vu comme un objet de $\mathsf{Hot}_\bullet$).*

$$\pi_i \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, K(A, n)) \simeq \begin{cases} H^{n-i}(\mathcal{E}, A) & si\ 0 \leq i \leq n, \\ 0 & si\ i > n. \end{cases}$$

Démonstration. En vertu de la proposition 5.1.17, $K(A, n)$ est n-tronqué, et donc il résulte du lemme 3.4.6 et du corollaire 5.1.5 qu'il en est de même de $\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, K(A, n))$. Il suffit donc de calculer les groupes d'homotopie de dimension i, $0 \leq i \leq n$. En regard des identifications

$$\Omega \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, K(A, n)) \simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, \Omega K(A, n)) \simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, K(A, n-1)) \ ,$$

il suffit de montrer que

$$\pi_0 \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, K(A, n)) = H^n(\mathcal{E}, A) \ .$$

Les isomorphismes canoniques

$$\pi_0 \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, K(A, n)) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}(\mathcal{E})}(*, iA\,[n]) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{E})}(\mathbb{Z}(*), A\,[n])$$

achèvent donc cette démonstration. □

Remarque 5.1.24. Le groupe $H^1(\mathcal{E}, A)$ s'identifie canoniquement à l'ensembles des classes d'isomorphie de A-torseurs (cf. [**26**, chapitre III, § 2.4.5.1]), ce qui implique que $K(A, 1)$ et BA représentent tous deux la même cohomologie. On peut en fait montrer que $K(A, 1)$ et BA sont isomorphes. Autrement dit, cette notation est compatible avec celle introduite au numéro 5.1.8.

5.1.25. Soit X un faisceau simplicial. Le *complexe d'homologie réduite de* X, noté $\widetilde{\mathbb{Z}}(X)$, est le noyau du morphisme canonique $\mathbb{Z}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}(*)$. Pour $n \geq 0$, on note $\widetilde{H}_n(X) = H_n(\widetilde{\mathbb{Z}}(X))$ le *n-ème groupe d'homologie réduite de* X. On a une inclusion naturelle

$$\widetilde{\mathbb{Z}}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}(X) \ ,$$

laquelle induit des isomorphismes

$$\widetilde{H}_n(X) \simeq H_n(X) \quad , \quad n > 0 \ .$$

Si X admet une section globale x, le morphisme induit $\mathbb{Z}(x) : \mathbb{Z}(*) \longrightarrow \mathbb{Z}(X)$ est une section de la flèche $\mathbb{Z}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}(*)$, ce qui définit une rétraction de l'inclusion $\widetilde{\mathbb{Z}}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}(X)$. En composant avec le morphisme canonique $X \longrightarrow i\mathbb{Z}(X)$, on obtient de la sorte un morphisme naturel (dans $\mathbf{s}\mathcal{E}_\bullet$)

$$X \longrightarrow i\widetilde{\mathbb{Z}}(X) \ .$$

PROPOSITION 5.1.26. *Soient $n \geq 2$ un entier, et (X, x) un faisceau simplicial pointé sur $\mathcal{E}$. Pour que X soit concentré en degré n, il faut et il suffit qu'il existe un faisceau en groupes A tel que (X, x) soit isomorphe à $K(A, n)$ dans $\mathsf{Hot}_\bullet(\mathcal{E})$. En outre, si c'est le cas, alors A est isomorphe à $\pi_n(X, x)$.*

DÉMONSTRATION. Soit A un faisceau en groupes abéliens. Il est clair que $K(A, n)$ est connexe, et donc il résulte des lemmes 5.1.10 et 5.1.17 que $K(A, n)$ est concentré en degré n. Réciproquement, supposons que X est concentré en degré n. Si M est un complexe de faisceaux en groupes abéliens, on note $\tau^{\leq n}M$ le complexe défini par

$$(\tau^{\leq n}M)_i = \begin{cases} M_i & \text{si } i < n, \\ \operatorname{coker}(M_{n+1} \longrightarrow M_n) & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{si } i > n. \end{cases}$$

On a un morphisme canonique $M \longrightarrow \tau^{\leq n}M$ qui induit des isomorphismes

$$H_i(\tau^{\leq n}M) \simeq \begin{cases} H_i(M) & \text{si } i \leq n, \\ 0 & \text{si } i > n. \end{cases}$$

On obtient ainsi un morphisme

$$(X, x) \longrightarrow i\widetilde{\mathbb{Z}}(X) \longrightarrow i\tau^{\leq n}\widetilde{\mathbb{Z}}(X) \ ,$$

lequel est une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente en vertu des lemmes 5.1.10 et 5.1.17 et de la proposition 5.1.21. Il suffit pour conclure de montrer que $\tau^{\leq n}\widetilde{\mathbb{Z}}(X)$ est isomorphe à $\pi_n(X, x)\,[n]$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, ce qui est un résultat d'algèbre homologique standard (voir par exemple [**62**, chapitre III, proposition 1.2.10]). □

2. Théorie de Galois et cohomologie non abélienne

DÉFINITION 5.2.1. Soit $\mathcal{E}$ un topos localement connexe. Un faisceau X sur $\mathcal{E}$ est *galoisien* s'il vérifie les conditions suivantes.

(i) L'image U du morphisme de X vers le faisceau final est une composante connexe de $\mathcal{E}$.

(ii) Le faisceau X est connexe.

(iii) Le faisceau $X|_U$ est un torseur sous le groupe constant de ses automorphismes dans $\mathcal{E}/U$.

DÉFINITION 5.2.2. Un topos $\mathcal{E}$ est *localement galoisien* s'il est localement connexe et s'il est engendré par ses faisceaux galoisiens.

EXEMPLE 5.2.3. Soit G un petit groupoïde. Alors $\widehat{G}$ est un topos galoisien. En effet, il est localement connexe (comme toute catégorie de préfaisceaux), et les préfaisceaux représentables sur G sont galoisiens.

5.2.4. On rappelle qu'un faisceau X sur un topos $\mathcal{E}$ est *localement constant* s'il existe un recouvrement U de $\mathcal{E}$ (*i.e.* un faisceau U tel que la flèche de U vers le faisceau final soit un épimorphisme) tel que $X|_U$ soit un faisceau constant sur $\mathcal{E}/U$. Soit $\mathcal{E}$ un topos localement connexe. On note $\mathsf{SLC}\,\mathcal{E}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ formée des faisceaux qui sont sommes de faisceaux localement constants. La catégorie $\mathsf{SLC}\,\mathcal{E}$ peut être vue intuitivement comme la catégorie des revêtements de $\mathcal{E}$. On remarque immédiatement que tout faisceau galoisien est localement constant (tout torseur sous un groupe constant G est localement constant, puisque localement isomorphe à G). Les faisceaux galoisiens sont de ce point de vue les revêtements galoisiens de $\mathcal{E}$.

On note $\mathsf{LC}\,\mathcal{E}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ formée des faisceaux localement constants.

THÉORÈME 5.2.5 (Leroy [**45**]). *La catégorie* $\mathsf{SLC}\,\mathcal{E}$ *est un topos localement galoisien. En outre, l'inclusion de* $\mathsf{SLC}\,\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}$ *est le foncteur image inverse d'un morphisme de topos*

$$\tau_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathsf{SLC}\,\mathcal{E} \ .$$

DÉMONSTRATION. Voir [**45**, théorème 2.4]. □

DÉFINITION 5.2.6. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un *groupoïde fondamental de* $\mathcal{E}$ est un couple $(\pi_1\mathcal{E}, q)$, où $\pi_1\mathcal{E}$ est un topos localement galoisien et où $q : \mathcal{E} \longrightarrow \pi_1\mathcal{E}$ est un morphisme de topos, (2-)universels pour ces propriétés, *i.e.* tels que pour tout topos localement galoisien $\mathcal{G}$, le morphisme q induise une équivalence de catégories

$$q^* : \mathsf{Homtop}(\pi_1\mathcal{E}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Homtop}(\mathcal{E}, \mathcal{G}) \ .$$

EXEMPLE 5.2.7. Soit C une petite catégorie. On note $\pi_1 C = (\mathsf{Fl}\,C)^{-1}C$ le groupoïde fondamental de C dans $\mathcal{C}at$. On a un foncteur de localisation canonique $q : C \longrightarrow \pi_1 C$, ce qui induit un morphisme de topos

$$q : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{\pi_1 C} \ .$$

Le couple $(\widehat{\pi_1 C}, q)$ est un groupoïde fondamental de $\widehat{C}$, ce qui justifie partiellement une terminologie légèrement abusive.

THÉORÈME 5.2.8 (Leroy [**45**]). *Pour tout topos localement connexe* $\mathcal{E}$*, le couple* $(\mathsf{SLC}\,\mathcal{E}, \tau_{\mathcal{E}})$ *est un groupoïde fondamental de* $\mathcal{E}$.

DÉMONSTRATION. Voir [**45**, 3.3.1 et 3.3.4]. □

REMARQUE 5.2.9. On peut montrer que 2-foncteur $G \longmapsto \widehat{G}$, de la catégorie des petits groupoïdes vers celle des topos, est 2-pleinement fidèle, et que son image essentielle est formée des topos localement connexes dont tous les objets sont localement constants (voir [**45**, 3.2.8]). On dit qu'un topos est *galoisien* si tous ses objets sont localement constants (c'est-à-dire, de manière équivalente, s'il est équivalent à un topos de la forme $\widehat{G}$ pour un petit groupoïde G).

5.2.10. Un *système projectif galoisien* est la donné d'un petit ensemble ordonné cofiltrant I, et d'un topos fibré $\mathcal{F}$ sur I vérifiant les conditions suivantes.

(a) Pour tout $i \in I$, le topos $\mathcal{F}_i$ est galoisien.
(b) Pour tous $i \leq j$ dans I, le foncteur image inverse correspondant $\mathcal{F}_j \longrightarrow \mathcal{F}_i$ est pleinement fidèle.

On note $\varprojlim \mathcal{F}$ la 2-limite projective du 2-foncteur correspondant à $\mathcal{F}$.

THÉORÈME 5.2.11 (Leroy [**45**]). *Un topos $\mathcal{E}$ est localement galoisien si et seulement s'il existe un système projectif galoisien $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{E}$ soit équivalent au topos $\varprojlim \mathcal{F}$.*

DÉMONSTRATION. Voir [**45**, 3.3.1]. □

REMARQUE 5.2.12. Le théorème ci-dessus montre que les topos localement galoisiens peuvent être vus comme des systèmes projectifs cofiltrants de groupoïdes, *i.e.* comme des pro-groupoïdes. Si $\mathcal{E}$ est un topos localement galoisien connexe et si p est un point de $\mathcal{E}$, alors il existe un pro-groupe G tel que $\mathcal{E}$ soit équivalent au topos classifiant de G (cf. [**51**]). En outre, on peut vérifier que G est le pro-groupe d'homotopie $\pi_1(\mathcal{E}, p)$ défini à partir du pro-type d'homotopie pointé définit dans [**1**] (nous n'utiliserons pas ce résultat dans la suite).

PROPOSITION 5.2.13. *Soit $\mathcal{E}$ un topos localement connexe. Un faisceau sur $\mathcal{E}$ est localement constant si et seulement si c'est un faisceau localement constant sur $\mathsf{SLC}\,\mathcal{E}$. Autrement dit, on a une équivalence de catégories canonique*

$$\mathsf{LC}\,\pi_1\mathcal{E} \simeq \mathsf{LC}\,\mathcal{E}\ .$$

DÉMONSTRATION. Pour chaque crible couvrant R du faisceau final, on note $\mathsf{LC}(\mathcal{E}, R)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ formée des faisceaux trivialisés par les objets connexes de R. En vertu de [**45**, 3.3.1], alors $\mathsf{LC}(\mathcal{E}, R)$ est un topos galoisien (et donc en particulier, tous ses objets sont localement constants) et l'inclusion de $\mathsf{LC}\,\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est le foncteur image inverse d'un morphisme de topos. Or tout faisceau localement constant X sur $\mathcal{E}$ est contenu dans l'un des topos galoisiens $\mathsf{LC}(\mathcal{E}, R)$ pour un certain crible couvrant le faisceau final R. Par la propriété universelle, du groupoïde fondamental, le morphisme $\mathcal{E} \longrightarrow \mathsf{LC}(\mathcal{E}, R)$ se factorise par $\mathsf{SLC}\,\mathcal{E}$, et comme le foncteur image inverse $\mathsf{LC}(\mathcal{E}, R) \longrightarrow \mathsf{SLC}\,\mathcal{E}$ respecte les objets localement constants, X est un faisceau localement constant sur $\mathsf{SLC}\,\mathcal{E}$. Il est d'autre part immédiat que tout objet localement constant de $\mathsf{SLC}\,\mathcal{E}$ est localement constant en tant qu'objet de $\mathcal{E}$, ce qui prouve la proposition. □

COROLLAIRE 5.2.14. *Soit $\mathcal{E}$ un topos localement connexe. Pour tout faisceau localement constant X sur $\mathcal{E}$, il existe une petite famille génératricie $\mathcal{U}$ de* $\mathsf{SLC}\,\mathcal{E}$ *de $\mathcal{E}$ qui trivialise X.*

5.2.15. Un topos est *simplement connexe* si son groupoïde fondamental est trivial (*i.e.* un topos équivalent au topos ponctuel). Un topos $\mathcal{E}$ est *localement simplement connexe* s'il admet une petite famille génératrice formée de faisceaux U tels que $\mathcal{E}/U$ soit simplement connexe.

PROPOSITION 5.2.16. *Le groupoïde fondamental d'un topos localement simplement connexe est galoisien (*i.e. *est effectivement un groupoïde).*

DÉMONSTRATION. Pour tout faisceau simplement connexe U sur $\mathcal{E}$ (*i.e.* tel que $\mathcal{E}/U$ soit simplement connexe), le topos $\pi_1(\mathcal{E}/U)$ est une somme disjointe de topos équivalents au topos ponctuel. En particulier, tout faisceau simplement connexe sur $\mathcal{E}$ trivialise tout faisceau localement constant. Si on suppose que $\mathcal{E}$ est localement simplement connexe, les faisceaux 1-asphériques forment une famille génératrice de $\mathcal{E}$. Par conséquent, les faisceaux localement constants sont stables par petites sommes quelconques dans $\mathcal{E}$. Autrement dit, on a les identifications

$$\pi_1(\mathcal{E}) = \mathsf{SLC}\,\mathcal{E} = \mathsf{LC}\,\mathcal{E} = \mathsf{LC}\,\pi_1(\mathcal{E}) \ ,$$

ce qui prouve que $\pi_1(\mathcal{E})$ est galoisien. □

DÉFINITION 5.2.17. Un morphisme de topos $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ est une 0-*équivalence d'Artin-Mazur* si pour tout faisceau localement constant X sur $\mathcal{F}$, φ induit une bijection

$$H^0(\mathcal{F}, X) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{E}, X) \ .$$

Un morphisme de topos $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ est une 1-*équivalence d'Artin-Mazur* si c'est une 0-équivalence d'Artin-Mazur, et si pour tout faisceau en groupes localement constant G sur $\mathcal{F}$, φ induit un isomorphisme

$$H^1(\mathcal{F}, G) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{E}, \varphi^* G) \ .$$

PROPOSITION 5.2.18. *Pour tout topos localement connexe $\mathcal{E}$, le morphisme canonique $q : \mathcal{E} \longrightarrow \pi_1\mathcal{E}$ est une* 1*-équivalence d'Artin-Mazur.*

DÉMONSTRATION. Vu que toute équivalence de topos est une 1-équivalence d'Artin-Mazur, on peut supposer que $\pi_1\mathcal{E} = \mathsf{SLC}\,\mathcal{E}$ et que $q = \tau_{\mathcal{E}}$. Le foncteur image inverse $\tau_{\mathcal{E}}^* : \mathsf{SLC}\,\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est pleinement fidèle par construction, ce qui implique immédiatement que pour tout faisceau localement constant X de $\mathsf{SLC}\,\mathcal{E}$, l'application $H^0(\mathsf{SLC}\,\mathcal{E}, X) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}, \tau_{\mathcal{E}}^* X)$ est bijective. D'autre part, si G est un faisceau en groupes localement constant sur $\mathsf{SLC}\,\mathcal{E}$, comme tout G-torseur est localement isomorphe à G, tout G-torseur est localement constant, ce qui implique que le foncteur canonique induit par $\tau_{\mathcal{E}}$,

$$\tau_{\mathcal{E}}^* : \mathsf{Tors}(\mathsf{SLC}\,\mathcal{E}, G) \longrightarrow \mathsf{Tors}(\mathcal{E}, G) \ ,$$

est une équivalence de catégories (5.2.13). On en déduit aussitôt l'isomorphisme canonique $H^1(\mathsf{SLC}\,\mathcal{E}, G) \simeq H^1(\mathcal{E}, \tau_{\mathcal{E}}^* G)$. □

5.2.19. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un $\mathcal{E}$-*topos* est un topos au-dessus de $\mathcal{E}$, *i.e.* un topos $\mathcal{E}'$ muni d'un morphisme de topos $\varphi : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$. Un *morphisme de $\mathcal{E}$-topos* $u : (\mathcal{E}', \varphi) \longrightarrow (\mathcal{E}'', \varphi')$ est un morphisme de topos u de $\mathcal{E}'$ vers $\mathcal{E}''$, et un isomorphisme i de $\varphi' u$ vers φ. On note $\mathsf{Homtop}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}', \mathcal{E}'')$ la sous-catégorie de $\mathsf{Homtop}(\mathcal{E}', \mathcal{E}'')$ dont les objets sont les morphismes de $\mathcal{E}$-topos (cf. [**26**, chapitre

VIII, § 0]).

Soient $\mathcal{E}$ un topos et G un faisceau en groupes sur $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{B}G$ la catégorie des faisceaux sur $\mathcal{E}$ munis d'une action de G à droite. Cette catégorie est un topos, et le foncteur

$$q_G^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}G$$

qui associe à tout faisceau X le faisceau X lui-même muni de l'action triviale commute aux petites limites inductives et projectives. C'est donc en particulier le foncteur image inverse d'un morphisme de topos

$$q_G : \mathcal{B}G \longrightarrow \mathcal{E} \ ,$$

ce qui fait de $\mathcal{B}G$ un $\mathcal{E}$-topos. On note E_G le *G-torseur universel*, c'est-à-dire le faisceau G muni de l'action de G par translation à droite. L'objet E_G est en outre muni d'une action de G à gauche (par translations à gauche), ce qui en fait un G-torseur dans $\mathcal{B}G$. Soit $\mathcal{E}'$ un $\mathcal{E}$-topos de morphisme structural $\varphi : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$. On note $\mathsf{Tors}(\mathcal{E}', G)$ la catégorie des φ^*G-torseurs dans $\mathcal{E}'$, et on définit un foncteur

$$\mathsf{Homtop}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}', \mathcal{B}G)^{\circ} \longrightarrow \mathsf{Tors}(\mathcal{E}', G)$$

par la fomule $u \longmapsto u^*E_G$; on vérifie que c'est une équivalence de catégories (cf. [**26**, chapitre VIII, théorème 4.3]). Par conséquent, on a une bijection canonique

$$H^1(\mathcal{E}', \varphi^*G) \simeq \pi_0 \, \mathsf{Homtop}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}', \mathcal{B}G) \ .$$

LEMME 5.2.20. *Soit $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de topos localement connexes. Si φ est une 1-équivalence d'Artin-Mazur, alors pour tout petit groupoïde G, il induit une équivalence de catégories*

$$\varphi^* : \mathsf{Homtop}(\mathcal{F}, \widehat{G}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Homtop}(\mathcal{E}, \widehat{G}) \ .$$

DÉMONSTRATION. Le cas où G est vide étant trivial, on peut supposer ce dernier non vide. Comme les équivalences de catégories sont stables par sommes et par produits, on peut aussi supposer que $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et G sont connexes. En choisissant un objet de G, on se ramène au cas où G est un groupe. Il s'agit alors de montrer que le foncteur

$$\varphi^* : \mathsf{Homtop}(\mathcal{F}, \mathcal{B}G) \longrightarrow \mathsf{Homtop}(\mathcal{E}, \mathcal{B}G)$$

est une équivalence de catégories, ou de manière équivalente, que

$$\varphi^* : \mathsf{Tors}(\mathcal{F}, G) \longrightarrow \mathsf{Tors}(\mathcal{E}, G)$$

est une équivalence de catégories. Comme on a les bijections

$$\pi_0 \mathsf{Tors}(\mathcal{F}, G) \simeq H^1(\mathcal{F}, G) \simeq H^1(\mathcal{E}, G) \simeq \pi_0 \mathsf{Tors}(\mathcal{E}, G) \ ,$$

l'essentielle surjectivité est assurée. Si X et Y sont deux G-torseurs, on note $\mathsf{Hom}_G(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de G-torseurs. Les G-torseurs formant une gerbe sur $\mathcal{F}$, le préfaisceau $U \longmapsto \mathsf{Hom}_G(X|_U, Y|_U)$ est un faisceau, et on vérifie aussitôt qu'il est localement isomorphe au faisceau constant $G \simeq \mathsf{Hom}_G(G, G)$. En particulier, ce dernier est donc localement constant. En outre, le morphisme canonique

$$\varphi^* \, \underline{\mathsf{Hom}}_G(X, Y) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_G(\varphi^*X, \varphi^*Y)$$

est un isomorphisme (cela résulte de [**26**, chapitre II, proposition 3.2.8]). On en déduit les bijections suivantes pour tous G-torseurs X et Y sur $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}_G(X,Y) &\simeq H^0(\mathcal{F}, \underline{\mathsf{Hom}}_G(X,Y))\\ &\simeq H^0(\mathcal{E}, \varphi^*\,\underline{\mathsf{Hom}}_G(X,Y))\\ &\simeq H^0(\mathcal{E}, \underline{\mathsf{Hom}}_G(\varphi^*X,\varphi^*Y))\\ &\simeq \mathsf{Hom}_G(\varphi^*X,\varphi^*Y)\ .\end{aligned}$$

Cela établit la pleine fidélité. □

THÉORÈME 5.2.21. *Soit $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ un morphisme de topos localement connexes. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le morphisme φ est une 1-équivalence d'Artin-Mazur.*

(ii) *Pour tout topos localement galoisien $\mathcal{G}$, φ induit une équivalence de catégories*

$$\varphi^* : \mathsf{Homtop}(\mathcal{E}',\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Homtop}(\mathcal{E},\mathcal{G})\ .$$

(iii) *Le morphisme de groupoïdes fondamentaux induit par φ*

$$\pi_1\varphi : \pi_1\mathcal{E} \longrightarrow \pi_1\mathcal{E}'$$

est une équivalence de topos (localement galoisiens).

(iv) *Le morphisme φ induit une équivalence de catégories*

$$\varphi^* : \mathsf{LC}\,\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathsf{LC}\,\mathcal{E}\ .$$

DÉMONSTRATION. (i) ⇒ (ii). Soit $\mathcal{G}$ un topos localement galoisien. En vertu du théorème 5.2.11, il existe un système projectif galoisien $\mathcal{F}$, indexé par un petit ensemble ordonné cofiltrant I, tel que $\mathcal{G} \simeq \varprojlim \mathcal{F}$. En vertu du lemme précédent, pour tout $i \in I$, on a une équivalence de catégories canonique

$$\mathsf{Homtop}(\mathcal{E}',\mathcal{F}_i) \simeq \mathsf{Homtop}(\mathcal{E},\mathcal{F}_i)\ .$$

En passant à la 2-limite projective, on obtient une équivalence de catégories

$$\varprojlim \mathsf{Homtop}(\mathcal{E}',\mathcal{F}) \simeq \varprojlim \mathsf{Homtop}(\mathcal{E},\mathcal{F})\ .$$

On obtient ainsi les équivalences de catégories ci-dessous.

$$\begin{aligned}\mathsf{Homtop}(\mathcal{E}',\mathcal{G}) &\simeq \mathsf{Homtop}(\mathcal{E}',\varprojlim \mathcal{F})\\ &\simeq \varprojlim \mathsf{Homtop}(\mathcal{E}',\mathcal{F})\\ &\simeq \varprojlim \mathsf{Homtop}(\mathcal{E},\mathcal{F})\\ &\simeq \mathsf{Homtop}(\mathcal{E},\varprojlim \mathcal{F})\\ &\simeq \mathsf{Homtop}(\mathcal{E},\mathcal{G})\ .\end{aligned}$$

(ii) ⇒ (iii). Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème 5.2.8.
(iii) ⇒ (iv). Si la condition (iii) est vérifiée, on obtient une équivalence de catégories

$$\mathsf{LC}\,\pi_1\mathcal{E}' \simeq \mathsf{LC}\,\pi_1\mathcal{E}\ ,$$

et donc il résulte de la proposition 5.2.13 que la condition (iv) est vérifiée.
(iv) $\Rightarrow$ (i). On a le carré essentiellement commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q"'] & \mathcal{E}' \arrow[d, "q'"] \\ \pi_1\mathcal{E} \arrow[r, "\pi_1\varphi"'] & \pi_1\mathcal{E}' \end{tikzcd}$$

Comme φ^* est un foncteur pleinement fidèle sur les faisceaux localement constants, il est immédiat que φ^* induit des bijections pour le H^0 à coefficients localement constants. Soit G un faisceau en groupes localement constant sur $\mathcal{E}'$. En vertu des propositions 5.2.13 et 5.2.18, on obtient des bijections

$$H^1(\mathcal{E}', G) \simeq H^1(\pi_1\mathcal{E}', G) \simeq H^1(\pi_1\mathcal{E}, \pi_1\varphi^*G) \simeq H^1(\mathcal{E}, \varphi^*G) \ ,$$

ce qui achève la démonstration. □

3. Équivalences d'Artin-Mazur

5.3.1. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un *∞-revêtement de $\mathcal{E}$* est un faisceau simplicial X sur $\mathcal{E}$ tel que $\pi_0(X)$ soit un faisceau localement constant et tel que pour tout entier $n \geq 1$, tout objet U de $\mathcal{E}$, et toute section x de X au-dessus de U, le faisceau $\pi_n(X|_U, x)$ soit localement constant sur $\mathcal{E}/U$. Si $n \geq 0$ est un entier, un *n-revêtement de $\mathcal{E}$* est un ∞-revêtement n-tronqué de $\mathcal{E}$. Un n-revêtement est *pur* s'il est $n-1$-connexe (pour le cas où $n = 0$, on précise qu'un faisceau simplicial est -1-*connexe* s'il est non vide).

Proposition 5.3.2. *Soit $\varphi : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ un morphisme de topos. Pour tout ∞-revêtement (resp. n-revêtement, resp. n-revêtement pur) X de $\mathcal{E}$, φ^*X est un ∞-revêtement (resp. n-revêtement, resp. n-revêtement pur).*

Démonstration. Cela résulte aussitôt du fait que la formation des faisceaux d'homotopie commute aux foncteurs images inverses. □

Corollaire 5.3.3. *Pour tout ensemble simplicial X, $p^*_{\mathcal{E}}X$ est un ∞-revêtement de $\mathcal{E}$. Si en outre X est n-tronqué (resp. concentré en degré n), alors $p^*_{\mathcal{E}}X$ est un n-revêtement (resp. un n-revêtement pur).*

Démonstration. Cela résulte de la proposition précédente appliquée au morphisme de topos canonique $p_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{P}$ et du fait que tout ensemble simplicial X est un ∞-revêtement du topos poncuel. □

Remarque 5.3.4. La proposition 5.3.2 implique en fait que tout ensemble simplicial localement constant est un ∞-revêtement de $\mathcal{E}$.

Lemme 5.3.5. *Soient X un ∞-revêtement de $\mathcal{E}$, et $j : X \longrightarrow Y$ une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente. Alors Y est un ∞-revêtement.*

Démonstration. Quitte à remplacer X par $\operatorname{Ex}^\infty X$ et Y par $\operatorname{Ex}^\infty Y$, on peut supposer que X et Y sont des faisceaux simpliciaux localement fibrants (en effet, $X_0 = (\operatorname{Ex}^\infty X)_0$, ce qui implique immédiatement que $\operatorname{Ex}^\infty X$ est encore un ∞-revêtement). Comme $\pi_0(X) \simeq \pi_0(Y)$, $\pi_0(Y)$ est bien localement constant.

Soient $n \geq 1$ un entier, U un faisceau sur $\mathcal{E}$, et y une section de Y au-dessus de U. Quitte à remplacer $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}/U$, on peut supposer que $U = *$ est le faisceau final. En vertu du corollaire 3.2.44, il existe un hyper-recouvrement $q : V \longrightarrow *$ et une flèche $x : V \longrightarrow X$ tels que le triangle suivant commute à homotopie près.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ X \arrow[rr, "j"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Autrement dit, si Y^{Δ_1} désigne $\underline{\mathsf{Hom}}_{s\mathcal{E}}(\Delta_1, Y)$, il existe un diagramme commutatif de la forme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "k"] \arrow[d, "x"'] \arrow[rr, bend left, "y"] & Y^{\Delta_1} \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "d^1"] & Y \\ X \arrow[r, "j"'] & Y & \end{tikzcd}$$

On en déduit des isomorphismes de faisceaux sur V_0 pour tout $n \geq 1$:

$$\pi_n(X|_{V_0}, x) \simeq \pi_n(Y|_{V_0}, jx) \simeq \pi_n(Y^{\Delta_1}|_{V_0}, k) \simeq \pi_n(Y|_{V_0}, y) \ .$$

Comme V est un hyper-recouvrement, le morphisme $V_0 \longrightarrow *$ est un épimorphisme. On a ainsi montré que $\pi_n(Y, y)$ est localement isomorphe à un groupe de la forme $\pi_n(X, x)$, ce qui prouve l'assertion. $\square$

Proposition 5.3.6. *Soient X et Y deux faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{E}$, isomorphes dans $\mathsf{Hot}(\mathcal{E})$. Si X est un ∞-revêtement (resp. un n-revêtement, resp. un n-revêtement pur), alors il en est de même de Y.*

Démonstration. Il suffit de traiter la notion de ∞-revêtement, les notions de n-troncation et de n-connexité étant invariantes par équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente de manière évidente. Comme X et Y sont isomorphes dans $\mathsf{Hot}(\mathcal{E})$, il existe un faisceau simplicial Z (éventuellement fibrant au sens de la $\mathcal{W}_\infty$-descente), et deux équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente

$$X \longrightarrow Z \longleftarrow Y \ .$$

En vertu du lemme précédent, Z est un ∞-revêtement. Comme $\pi_0(Y) \simeq \pi_0(Z)$, il est clair que $\pi_0(Y)$ est un faisceau localement constant. De même, pour tout $n \geq 1$, $\pi_n(Z)$ est localement constant au-dessus de Z_0, et comme le carré

$$\begin{tikzcd} \pi_n(Y) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_n(Z) \arrow[d] \\ Y_0 \arrow[r] & Z_0 \end{tikzcd}$$

est cartésien, $\pi_n(Y)$ est localement constant au-dessus de Y_0, ce qui prouve l'assertion. $\square$

LEMME 5.3.7. *Soit $n \geq 1$ un entier. On considère une fibration locale $q : X \longrightarrow Y$. On suppose que X est un n-revêtement, Y un $n-1$-revêtement, et que q est une équivalence de $\mathcal{W}_{n-1}$-descente. Alors pour tout objet U de $\mathcal{E}$, et toute section y de Y au-dessus de U, si on forme le carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "q"] \\ U \arrow[r, "y"'] & Y \end{tikzcd} \quad ,$$

le faisceau simplicial F est un n-revêtement pur de $\mathcal{E}/U$.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que U est le faisceau final (quitte à remplacer $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}/U$). Le foncteur Ex^∞ respecte les fibrations locales, et donc quitte à remplacer q par $\mathrm{Ex}^\infty q$, on peut supposer que X et Y sont localement fibrants. En utilisant les points faibles de $\mathcal{E}$, on voit grâce à la longue suite exacte des groupes d'homotopie que F est concentré en degré n. Cela montre aussi que pour tout faisceau V sur $\mathcal{E}$, et toute section x de F au-dessus de V, on a un isomorphisme $\pi_n(F|_V, x) \simeq \pi_n(X|_V, x)$, ce qui prouve l'assertion. □

DÉFINITION 5.3.8. Soit $n \geq 2$ un entier. Un morphisme de topos $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ est une *n-équivalence d'Artin-Mazur* si c'est une 1-équivalence d'Artin-Mazur et si pour tout faisceau en groupes abéliens localement constant A sur $\mathcal{F}$, il induit des isomorphismes de groupes

$$H^i(\mathcal{F}, A) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathcal{E}, \varphi^* A) \quad , \quad 0 \leq i \leq n \ .$$

Un morphisme de topos est une *équivalence d'Artin-Mazur* si c'est une n-équivalence d'Artin-Mazur pour tout entier $n \geq 0$.

LEMME 5.3.9. *Soient $n \geq 0$ un entier et $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ une n-équivalence d'Artin-Mazur. Pour tout k-revêtement pur X de $\mathcal{F}$, $0 \leq k \leq n$, la flèche canonique*

$$\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{F}, X) \longrightarrow \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, \varphi^* X)$$

est un isomorphisme de Hot.

DÉMONSTRATION. On choisit une équivalence de $\mathcal{W}_\infty$-descente de but fibrant au sens de la $\mathcal{W}_\infty$-descente $X \longrightarrow Y$ (resp. $\varphi^* Y \longrightarrow Z$). Il s'agit de montrer que le morphisme d'ensembles simpliciaux

$$\Gamma(\mathcal{F}, Y) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}, \varphi^* Y) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}, Z)$$

est une équivalence faible. Si $k = 0$, alors en vertu du lemme 5.3.3, il suffit de montrer que ce morphisme induit une bijection après application du foncteur π_0, ce qui est immédiat puisqu'il s'agit de l'application canonique

$$H^0(\mathcal{F}, \pi_0(X)) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}, \varphi^* \pi_0(X)) \ .$$

Supposons $k > 0$. Soit x un 0-simplexe de $\Gamma(\mathcal{F}, Y)$. Par adjonction, x correspond à une section globale y de Y, et de même, sont image dans $\Gamma(\mathcal{E}, Z)$ correspond à une section globale z de Z. On conclut facilement en vertu des propositions 5.1.11 et 5.1.13 si $k = 1$, ou bien des propositions 5.1.23 et 5.1.26 si $k \geq 2$. □

Lemme 5.3.10. *On considère le carré commutatif suivant dans* $\widehat{\Delta}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & X' \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & Y' \end{tikzcd}$$

On suppose que p *et* p' *sont des fibrations de Kan et que* j *est une* ∞*-équivalence. Pour que* i *soit une* ∞*-équivalence, il faut et il suffit que pour tout* 0*-simplexe* y *de* Y*, le morphisme* $p^{-1}(y) \longrightarrow q^{-1}(j(y))$ *soit une* ∞*-équivalence.*

Démonstration. Cette condition est clairement nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, comme $\mathcal{W}_\infty$ est propre, quitte à remplacer X' par $Y \times_{Y'} Y$, on peut supposer que $Y = Y'$ et que $j = 1_Y$. Un argument de propreté implique que la condition invoquée équivaut à demander que pour tout $n \geq 0$ et tout n-simplexe y de Y, la flèche $p^{-1}(y) \longrightarrow q^{-1}(y)$ soit une ∞-équivalence. Or cette dernière condition équivaut encore à demander que le foncteur $i_\Delta(i)$ soit ∞-asphérique au-dessus de Δ/Y, et implique donc que i est une ∞-équivalence. □

Théorème 5.3.11. *Soient* $n \geq 0$ *un entier, et* $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *un morphisme de topos. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le morphisme* φ *est une* n*-équivalence d'Artin-Mazur.*

(ii) *Pour tout entier* i*,* $0 \leq i \leq n$*, et tout* i*-revêtement* X *de* $\mathcal{F}$*, la flèche canonique*
$$\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{F}, X) \longrightarrow \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, \varphi^* X)$$
est un isomorphisme dans Hot.

(iii) *Pour tout faisceau localement constant* L *sur* $\mathcal{F}$*, et tout entier* i*,* $0 \leq i \leq n$*, vérifiant* $i = 0$ *si* L *est un faisceau d'ensembles,* $i = 1$ *si* L *est un faisceau en groupes, et* $i \geq 2$ *si* L *est un faisceau en groupes abéliens, la flèche canonique*
$$\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{F}, K(L, i)) \longrightarrow \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, K(\varphi^* L, i))$$
est un isomorphisme dans Hot.

Démonstration. L'implication de (ii) vers (iii) résulte du fait que les faisceaux de la forme $K(L, i)$ sont des i-revêtements (purs). Il est aussi immédiat que (iii) implique (i) en vertu des propositions 5.1.13 et 5.1.23. Il reste ainsi à vérifier que (i) implique (ii). On procède par récurrence sur i. Si $i = 0$, tous les 0-revêtements non vides étant purs, l'assertion est vérifiée grâce au lemme 5.3.9. Supposons $i > 0$, et considérons un i-revêtement X de $\mathcal{F}$. Quitte à remplacer X par $\operatorname{Ex}^\infty X$, on peut supposer que X est localement fibrant. On a alors une équivalence de $\mathcal{W}_i$-descente $X \longrightarrow X' = \operatorname{Cosk}^{i+1} X$ dont le but est un $i-1$-revêtement (grâce à la proposition 5.1.4). En procédant à des factorisations adéquates, on peut choisir des carrés commutatifs de la forme ci-dessous dans $\mathbf{s}\mathcal{F}$ et dans $\mathbf{s}\mathcal{E}$

respectivement,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ X' \arrow[r] & \tilde{X}' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \varphi^*\tilde{X} \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "q"] \\ \varphi^*\tilde{X}' \arrow[r] & Y' \end{tikzcd} \quad ,$$

les flèches horizontales étant des équivalences de $\mathcal{W}_\infty$-descente, et les flèches p et q des fibrations de $\mathcal{W}_\infty$-descente de buts fibrants. En vertu des propositions 5.3.2 et 5.3.6, $\tilde{X}$ et Y sont des i-revêtements, et $\tilde{X}'$ et Y' des $i-1$-revêtements. On obtient donc un carré commutatif dans $\widehat{\Delta}$ de la forme

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\mathcal{F}, \tilde{X}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(\mathcal{E}, Y) \arrow[d] \\ \Gamma(\mathcal{F}, \tilde{X}') \arrow[r] & \Gamma(\mathcal{E}, Y') \end{tikzcd} \quad ,$$

dont la flèche horizontale inférieure est une ∞-équivalence (par hypothèse de récurrence sur i), et les flèches verticales des fibrations de Kan. Pour montrer que la flèche horizontale supérieure est une ∞-équivalence, il suffit de vérifier le critère du lemme 5.3.10. Or cela résulte facilement des lemmes 5.3.7 et 5.3.9. $\square$

Corollaire 5.3.12. *Soit $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de topos. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le morphisme φ est une équivalence d'Artin-Mazur.*

(ii) *Pour tout entier $n \geq 0$, et tout n-revêtement X de $\mathcal{F}$, la flèche canonique*
$$\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{F}, X) \longrightarrow \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, \varphi^* X)$$
est un isomorphisme dans Hot.

Corollaire 5.3.13. *Soit $n \geq 0$ un entier. Toute n-équivalence d'Artin-Mazur est une n-équivalence.*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ une n-équivalence d'Artin-Mazur. Si X est un ensemble simplicial, alors $p^*_{\mathcal{F}} X$ est un ∞-revêtement (5.3.3). Il s'agit de montrer que
$$\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{F}, p^*_{\mathcal{F}} X) \longrightarrow \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, p^*_{\mathcal{E}} X)$$
est un isomorphisme dans $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}_n}$. Quitte à remplacer X par $\operatorname{Cosk}^{n+1} \operatorname{Ex}^\infty X$, on peut supposer que X est n-tronqué. En vertu du lemme 3.4.6, il suffit alors de montrer que
$$\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{F}, p^*_{\mathcal{F}} X) \longrightarrow \mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, p^*_{\mathcal{E}} X)$$
est un isomorphisme dans Hot. Or d'après le corollaire 5.3.3, X est à présent un n-revêtement, et donc le théorème 5.3.11 achève la démonstration. $\square$

Lemme 5.3.14. *Soit $0 \leq n \leq \infty$. Les topos localement n-asphériques forment une catégorie topologique (*4.1.2*).*

Démonstration. Cela résulte du théorème 4.3.19 appliqué au localisateur fondamental des $\mathcal{W}_n$-équivalences. $\square$

5.3.15. On note $\mathfrak{T}_n$ la catégorie topologique des topos localement n-asphériques. En vertu du corollaire 4.3.16, un topos est localement asphérique au sens d'Artin-Mazur si et seulement s'il est localement ∞-asphérique.

COROLLAIRE 5.3.16. *Soit $n \geq 1$ un entier. Les n-équivalences d'Artin-Mazur forment un localisateur topologique sur $\mathfrak{T}_0$ et sur $\mathfrak{T}_n$.*

DÉMONSTRATION. L'axiome LT0 est évident, l'axiome LT3 résulte du fait que pour tout topos $\mathcal{E}$, le foncteur image inverse $\mathsf{Hot}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{Hot}(\mathcal{E} \times \widehat{\Delta}_1)$ est pleinement fidèle (4.3.17). L'axiome LT4 est quant à lui une conséquence directe de la caractérisation (iii) des n-équivalences d'Artin-Mazur du théorème 5.3.11, et du théorème 3.4.25 appliqué aux faisceaux simpliciaux de la forme $K(A, i)$. Il reste à démontrer les axiomes LT1 et LT2. Soient $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ et $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ deux morphismes de topos localement connexes. Le seul aspect non trivial de LT1 consiste à vérifier que si $\psi\varphi$ et ψ sont des n-équivalences d'Artin-Mazur, alors il en est de même de φ. Or il résulte du théorème 5.2.21 que ψ induit une équivalence de catégories $\mathsf{LC}\,\mathcal{G} \simeq \mathsf{LC}\,\mathcal{F}$. En particulier, tout faisceau localement constant X sur $\mathcal{F}$ est de la forme ψ^*Y, où Y est un faisceau localement constant sur $\mathcal{G}$. On en déduit aussitôt que φ est aussi une n-équivalence d'Artin-Mazur. De même, la preuve de LT2 est une conséquence facile du théorème 5.2.21. $\square$

COROLLAIRE 5.3.17. *Les équivalences d'Artin-Mazur forment un localisateur topologique sur les topos localement connexes (resp. sur les topos localement ∞-asphérique).*

COROLLAIRE 5.3.18. *Un foncteur entre petites catégories est une ∞-équivalence si et seulement si le morphisme de topos correspondant est une équivalence d'Artin-Mazur.*

DÉMONSTRATION. Il résulte du théorème 4.1.16 que les foncteurs entre petites catégories induisant une n-équivalence d'Artin-Mazur entre les catégories de préfaisceaux associées forment un localisateur fondamental. L'assertion est donc conséquence de l'égalité $\mathcal{W}_\infty = \cap_n \mathcal{W}_n$ [**13**, corollaire 7.1.19], de la proposition 4.3.3, du corollaire 5.3.13, et du fait que $\mathcal{W}_\infty$ est le localisateur fondamental minimal [**13**, corollaire 5.1.12]. $\square$

REMARQUE 5.3.19. L'énoncé ci-dessus reste valable en termes de n-équivalences.

COROLLAIRE 5.3.20. *Les équivalences d'Artin-Mazur forment un localisateur topologique propre pour les topos localement ∞-asphériques.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte du corollaire précédent, de la remarque 4.2.10, et du fait que les ∞-équivalences forment un localisateur fondamental propre. $\square$

LEMME 5.3.21. *On considère un topos $\mathcal{E}$ et $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$ deux $\mathcal{E}$-localisateurs propres. Si $p : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\mathcal{E}$ dont le but est $\mathcal{W}'$-fibrant, pour toute section globale y de Y, la fibre homotopique de p au-dessus de y au sens de $\mathcal{W}$ est aussi la fibre homotopique de p au-dessus de y au sens de $\mathcal{W}'$.*

DÉMONSTRATION. Choisissons une factorisation de y en une cofibration triviale au sens de $\mathcal{W}'$ suivie d'une $\mathcal{W}'$-fibration $q : E \longrightarrow Y$. Le faisceau E est alors à la fois $\mathcal{W}'$-fibrant et $\mathcal{W}'$-asphérique (*i.e.* le morphisme de E vers le faisceau final est aussi une $\mathcal{W}'$-équivalence). Par conséquent, E est un objet injectif de $\mathcal{E}$. Comme q est une $\mathcal{W}'$-fibration, c'est aussi une $\mathcal{W}$-fibration. On en déduit aussitôt que $E \times_Y X$ est la fibre homotopique de p aussi bien sens de $\mathcal{W}$ que de $\mathcal{W}'$, ce qui prouve le lemme. □

5.3.22. Soit $\mathcal{E}$ un topos connexe et localement simplement connexe. Alors le groupoïde fondamental de $\mathcal{E}$ est galoisien (5.2.16). C'est donc en particulier une catégorie de préfaisceaux sur un petit groupoïde connexe G. On choisit un objet U de G. Il est remarquable que U forme une famille génératrice du groupoïde fondamental de $\mathcal{E}$ (à savoir $\widehat{G}$). On dira que $\mathcal{E}/U$ est un *revêtement universel* de $\mathcal{E}$.

PROPOSITION 5.3.23. *Si $\mathcal{E}$ est localement n-asphérique pour* $1 \leq n \leq \infty$*, le topos $\mathcal{E}/U$ est la fibre homotopique du morphisme canonique $\mathcal{E} \longrightarrow \pi_1(\mathcal{E})$ dans le sens où $\tau^n(\mathcal{E}/U)$ est la fibre homotopique de $\tau^n(\mathcal{E}) \longrightarrow \tau^n(\pi_1(\mathcal{E}))$ dans* Hot_n *(cf.* 4.3.8*).*

DÉMONSTRATION. Comme $\mathcal{E}$ est localement n-asphérique, il existe une petite catégorie C et un morphisme n-asphérique de $\mathcal{E}$ vers $\widehat{C}$ (4.1.25). On peut donc supposer que $\mathcal{E} = \widehat{C}$. Dans ce cas, par construction de τ^n, il s'agit de prouver que C/U est la fibre homotopique du morphisme canonique $C \longrightarrow \pi_1(C)$ pour tout objet U de $\pi_1(C)$. Or comme $\pi_1(C)$ est un petit groupoïde, les hypothèses du théorème B de Quillen sont automatiquement vérifiées pour le morphisme $C \longrightarrow \pi_1(C)$, ce qui prouve l'assertion dans le cas où $n = \infty$. Comme le nerf de $\pi_1(C)$ est un ensemble simplicial fibrant au sens de $\mathcal{W}_n$ pour tout $n \geq 1$, le cas général résulte du cas $n = \infty$ grâce au lemme 5.3.21 appliqué au topos $\widehat{\Delta}$ des ensembles simpliciaux avec $\mathcal{W} = \mathcal{W}_n$ et $\mathcal{W}' = \mathcal{W}_\infty$. □

THÉORÈME 5.3.24. *Soit $n \geq 1$ un entier. Un morphisme de topos localement n-asphériques est une n-équivalence d'Artin-Mazur si et seulement si c'est une n-équivalence.*

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un tel morphisme. En vertu du corollaire 5.3.13 si c'est une n-équivalence d'Artin-Mazur, alors c'est une n-équivalence. Réciproquement, supposons que φ est une n-équivalence. C'est alors en particulier une 0-équivalence. Il suffit donc de traiter le cas où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont connexes. On a alors le carré commutatif de topos ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[d] \\ \pi_1(\mathcal{E}) \arrow[r, "\pi_1(\varphi)"'] & \pi_1(\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

En vertu des propositions 5.2.18 et 5.2.16, et des corollaires 5.3.13 et 5.3.18, le morphisme $\pi_1(\varphi)$ est une 1-équivalence d'Artin-Mazur. Il en est donc de même de φ. En outre, $\pi_1(\mathcal{F})$ est un topos galoisien, en particulier, équivalent à une catégorie de préfaisceaux sur un petit groupoïde G. Pour tout objet U de G, $\mathcal{F}/U$ est alors un revêtement universel de $\mathcal{F}$ (5.3.22). Pour la même raison, comme

$\pi_1(\mathcal{F}) \simeq \pi_1(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}/U$ est un revêtement universel de $\mathcal{E}$. Les morphismes $\tau^n(\mathcal{E}) \longrightarrow \tau^n(\mathcal{F})$ et $\tau^n(\pi_1(\mathcal{E})) \longrightarrow \tau^n(\pi_1(\mathcal{F}))$ étant des isomorphismes de Hot_n, il résulte de la proposition 5.3.23 qu'il en est de même du morphisme induit $\tau^n(\mathcal{E}/U) \longrightarrow \tau^n(\mathcal{F}/U)$. On en déduit que pour tout groupe abélien A, et tout entier i, $0 \leq i \leq n$, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} H^i(\mathcal{F}/U, A) &= \mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_n(\mathcal{F}/U)}(*, p^*_{\mathcal{F}/U}K(A,i)) \\ &= \mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_n}(\tau^n(\mathcal{F}/U), K(A,i)) \\ &= \mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_n}(\tau^n(\mathcal{E}/U), K(A,i)) \\ &= \mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}_n(\mathcal{E}/U)}(*, p^*_{\mathcal{E}/U}K(A,i)) \\ &= H^i(\mathcal{E}/U, A) \ . \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{F}/U$ est simplement connexe, tout faisceau localement constant sur $\mathcal{F}/U$ est constant, et on a vérifié de la sorte que $\mathcal{E}/U \longrightarrow \mathcal{F}/U$ est une n-équivalence d'Artin-Mazur. Comme les objets de G forment une petite famille génératrice de $\widehat{G}$, les équivalences d'Artin-Mazur formant un localisateur topologique (5.3.16), on a ainsi montré que φ est asphérique au-dessus de $\pi_1(\mathcal{F})$ au sens des n-équivalences d'Artin-Mazur (axiome LT4), ce qui prouve le théorème. □

LEMME 5.3.25. *Soit $\mathcal{E}$ un topos localement ∞-asphérique. Si X est un complexe de Kan, alors $p^*_{\mathcal{E}}X$ est canoniquement isomorphe à la limite homotopique de sa tour de Postnikov dans* $\mathsf{Hot}(\mathcal{E})$.

DÉMONSTRATION. Dans le cas où $\mathcal{E}$ est une catégorie de préfaisceaux sur une petite catégorie C, pour toute petite catégorie I, le foncteur image inverse induit par la projection de $C \times I$ sur I,

$$\mathsf{Hot}(\widehat{I}) \longrightarrow \mathsf{Hot}(\widehat{C \times I}) \ ,$$

admet un adjoint à gauche, ce qui implique aussitôt qu'il commute aux limites homotopiques. Cela implique en particulier l'assertion dans ce cas. Le cas général en résulte grâce aux propositions 4.1.25 et 4.3.6. □

REMARQUE 5.3.26. L'énoncé ci-dessus est moins trivial qu'il n'y paraît en regard du contre exemple de Morel et Voevodsky [**55**, exemple 1.30, p. 58].

THÉORÈME 5.3.27. *Soit $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de topos localement ∞-asphériques. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le morphisme φ est une équivalence d'Artin-Mazur.*

(ii) *Le morphisme φ est une n-équivalence pour tout entier $n \geq 0$.*

(iii) *Le morphisme φ est une ∞-équivalence.*

DÉMONSTRATION. L'équivalence entre (i) et (ii) résulte aussitôt du théorème 5.3.24, et il est trivial que (iii) implique (ii). L'implication de (ii) vers (iii) résulte du lemme 5.3.25 et du fait que $\mathsf{R}\Gamma(\mathcal{E}, ?)$ commute aux limites homotopiques. □

CHAPITRE 6

Géométrie et homotopie

1. Modèles géométriques des types d'homotopie

Dans ce qui suit, sauf mention du contraire, tous les espaces topologiques sont localement compacts.

6.1.1. Si X est un espace topologique, on désignera encore par X le topos des faisceaux d'ensembles sur X (cette notation est sans doutes raisonnable pour les espaces sobres). Un espace toplogique X est *asphérique* si le topos associé est asphérique au sens d'Artin-Mazur (ou de manière équivalente, s'il est ∞-asphérique).

Un site géométrique est une sous-catégorie essentiellement petite $\mathbb{C}$ de la catégorie $\mathcal{T}op$ des espaces topologiques vérifiant les axiomes suivants.

SG0 Tous les objets de $\mathbb{C}$ sont des espaces localement asphériques.

SG1 Il existe un espace asphérique dans $\mathbb{C}$ ayant au moins deux points distincts. Pour tout espace X dans $\mathbb{C}$ et tout point x de X, le morphisme induit $x : pt \longrightarrow X$ est dans $\mathbb{C}$.

SG2 Tout homéomorphisme local entre objets de $\mathbb{C}$ est une flèche de $\mathbb{C}$. Tous les ouverts de chacun de objets de $\mathbb{C}$ sont dans $\mathbb{C}$.

SG3 La catégorie $\mathbb{C}$ est stable par homéomorphismes et par produits finis.

Si $\mathbb{C}$ est un site géométrique, on le considère comme un site avec la topologie de Grothendieck engendrée par les recouvrements par des ouverts asphériques. On note $\widetilde{\mathbb{C}}$ la catégorie des faisceaux sur le site $\mathbb{C}$. On vérifie aussitôt que la topologie ci-dessus est moins fine que la topologie canonique, et donc que le foncteur $\mathbb{C} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{C}}$ est pleinement fidèle. On désigne enfin par $\mathbb{C}_a$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$ formée des espaces asphériques.

Exemple 6.1.2. Un exemple de site géométrique est $\mathbb{C}^0$ (resp. $\mathbb{C}^\infty$, resp. $\mathbb{C}^\omega$), la sous-catégorie des variétés topologiques (resp. des variétés différentielles de classe C^∞, resp. des variétés analytiques réelles) dont les morphismes sont les applications continues (resp. les applications de classe C^∞, resp. les applications analytiques). Le seul aspect à vérifier est l'axiome SG0. La question étant locale, cela revient à montrer que l'espace $\mathbb{R}^n$ est asphérique pour tout entier $n \geq 0$, ce qui est un exercice facile (en appliquant par exemple le critère d'Artin-Mazur).

Proposition 6.1.3. *Pour tout site géométrique $\mathbb{C}$, la catégorie $\mathbb{C}_a$ est stable par produits finis, et le topos des faisceaux sur $\mathbb{C}$ est canoniquement équivalent à celui des faisceaux sur $\mathbb{C}_a$.*

Démonstration. Tous les espaces considérés étant localement compacts, le topos des faisceaux associé au produit de deux espaces X et Y est est canoniquement équivalent au produit des topos X et Y. L'assertion (i) de la proposition 4.3.18, appliquée aux localisateurs fondamentaux des n-équivalences pour tout $n \geq 0$, permet donc de conclure. La seconde assertion résulte de l'axiome SG0 et de [**31**, exposé III, théorème 4.1]. □

6.1.4. Soit $\mathbb{C}$ un site géométrique. On considère un espace X dans $\mathbb{C}$. On note $O(X)$ l'ensemble ordonné des ouverts de X, et $O(X)_a$ le sous-ensemble ordonné des ouverts asphériques de X. Il résulte encore une fois de [**31**, exposé III, théorème 4.1] que l'inclusion $O(X)_a \longrightarrow O(X)$ induit une équivalence entre le topos X et la catégorie des faisceaux sur $O(X)_a$ pour la topologie canonique. Il est par ailleurs immédiat que le foncteur d'inclusion

$$i : O(X) \longrightarrow \mathbb{C}/X$$

est continu au sens de [**31**, exposé III, définition 1.1]. On vérifie aussitôt qu'il est aussi cocontinu au sens de [**31**, exposé III, définition 2.1]. On obtient de la sorte un foncteur image inverse $i_X^* : \widetilde{\mathbb{C}}/X \longrightarrow X$, lequel admet un adjoint à gauche $i_{X!}$, et un adjoint à droite i_{X*}. Il est remarquable que $i_{X!}$ (et donc i_{X*}) est pleinement fidèle. En particulier, cela définit un morphisme canonique du *petit site* associé à X vers le *gros site* associé à X.

$$i_X : X \longrightarrow \widetilde{\mathbb{C}}/X$$

D'autre part, si $u : X' \longrightarrow X$ est un morphisme de $\mathbb{C}$, alors le diagramme suivant commute (où $u : \widetilde{\mathbb{C}}/X' \longrightarrow \widetilde{\mathbb{C}}/X$ désigne le morphisme dont l'image inverse est le changement de base par U).

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_{X'}"'] & X \arrow[d, "i_X"] \\
\widetilde{\mathbb{C}}/X' \arrow[r, "u"'] & \widetilde{\mathbb{C}}/X
\end{tikzcd}$$

On vérifie qu'en outre, le morphisme de changement de base

$$i_{X'!}u^* \longrightarrow u^* i_{X!}$$

est un isomorphisme. On en déduit donc un isomorphisme canonique

$$u^* \simeq i_{X'}^* u^* i_{X!} \ .$$

Cela permet de prouver que le foncteur $i_{X!}$ est exact. En effet, les foncteurs de la forme $i_{X'}^* u^*$ composés avec les points de X' forment une famille conservative de points de $\widetilde{\mathbb{C}}/X$, ce qui implique l'assertion. En particulier, on a ainsi un morphisme de topos

$$j_X : \widetilde{\mathbb{C}}/X \longrightarrow X$$

dont le foncteur image inverse est $j_X^* = i_{X!}$. Le morphisme j_X est un adjoint à droite de i_X.

Lemme 6.1.5. *Le morphisme $i_X : X \longrightarrow \widetilde{\mathbb{C}}/X$ est une ∞-équivalence.*

Démonstration. Vu que i_X admet un adjoint à droite, cela résulte de la proposition 4.1.12. $\square$

Lemme 6.1.6. *Pour tout site géométrique $\mathbb{C}$, la catégorie $\mathbb{C}_a$ est une catégorie test stricte.*

Démonstration. Soit I un objet de $\mathbb{C}_a$ contenant deux points distincts (SG1). Alors I définit un segment séparant de la catégorie des préfaisceaux sur $\mathbb{C}_a$ au sens de [**48**] (car il est immédiat que $\mathbb{C}_a$ ne contient pas l'espace vide). Comme en vertu de la proposition précédente la catégorie $\mathbb{C}_a$ est en particulier stable par produits finis, l'assertion résulte de [**48**, proposition 7.8]. $\square$

Proposition 6.1.7. *Soit $\mathbb{C}$ un site géométrique. L'immersion canonique de $\widetilde{\mathbb{C}}$ dans $\widehat{\mathbb{C}}_a$ est ∞-asphérique. En particulier, $\widetilde{\mathbb{C}}$ est un topos modeleur pour les équivalences d'Artin-Mazur.*

Démonstration. Soit X un espace ∞-asphérique dans $\mathbb{C}$. Alors en vertu du lemme 6.1.5, le topos $\widetilde{\mathbb{C}}/X$ est ∞-asphérique, ce qui montre que l'immersion a est ∞-asphérique. L'assertion résulte à présent du lemme 6.1.6 et du théorème 4.2.8. $\square$

Théorème 6.1.8. *Soit $\mathbb{C}$ un site géométrique. Alors le topos $\widetilde{\mathbb{C}}$ des faisceaux sur $\mathbb{C}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée propre et à engendrement cofibrant, dont les cofibrations sont les monomorphismes et les équivalences faibles, les morphisme induisant des isomorphismes en cohomologie à coefficients localement constant, c'est-à-dire les flèches $X \longrightarrow Y$ telles que le morphisme de topos $\widetilde{\mathbb{C}}/X \longrightarrow \widetilde{\mathbb{C}}/Y$ soit une équivalence d'Artin-Mazur. En outre, les équivalences faibles sont stables par produits finis, et la catégorie homotopique associée à cette structure est canoniquement équivalente à la catégorie homotopique des CW-complexes.*

Démonstration. En vertu du corollaire 5.3.20, les équivalences d'Artin-Mazur forment un localisateur topologique propre sur $\mathfrak{T}_\infty$. La proposition 6.1.7 permet par conséquent d'invoquer le corollaire 4.2.12, ce qui prouve l'existence de la structure de catégorie de modèles fermée. Le fait que les équivalences faibles soient stables par produits finis résulte de la propriété analogue dans la catégorie des préfaisceaux sur $\mathbb{C}_a$ (puisque $\mathbb{C}_a$ est une catégorie test stricte [**13**, remarque 5.5.4]) et de la proposition 4.2.3. La remarque 4.2.13 achève ainsi cette démonstration. $\square$

Remarque 6.1.9. Si $X \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\mathbb{C}$, il résulte du lemme 6.1.5 que c'est une équivalence faible dans $\widetilde{\mathbb{C}}$ si et seulement si le morphisme de topos $X \longrightarrow Y$ est une équivalence d'Artin-Mazur.

2. Homotopie équivariante

6.2.1. On considère un topos $\mathcal{E}$. Si $\mathbb{A}$ est un faisceau en catégories sur $\mathcal{E}$, on note $\mathcal{B}\mathbb{A}$ le topos des *préfaisceaux (internes) sur* $\mathbb{A}$ dans $\mathcal{E}$, c'est-à-dire des faisceaux sur $\mathcal{E}$ munis d'une action de $\mathbb{A}$ à droite, ce qu'on appellera aussi des $\mathbb{A}$-*faisceaux*. Explicitement, un objet de $\mathcal{B}\mathbb{A}$ est un faisceau F sur $\mathcal{E}$ muni d'un morphisme q de F vers le faisceau $\mathsf{Ob}\,\mathbb{A}$ des objets de $\mathbb{A}$ et d'un morphisme de composition

$$c : F \times_{\mathsf{Ob}\,\mathbb{A}} \mathsf{Fl}\,\mathbb{A} \longrightarrow F$$

(le produit fibré étant construit à partir du morphisme "but" $t : \mathsf{Fl}\,\mathbb{A} \longrightarrow \mathsf{Ob}\,\mathbb{A}$), le tout vérifiant les axiomes d'associativité et de compatibilité aux unités (voir [**47**] ou [**52**]). Par exemple si $\mathbb{G}$ est un faisceau en groupes, on retrouve en particulier la notion de faisceau sur $\mathcal{E}$ muni d'une action de $\mathbb{G}$ à droite (un groupe n'étant jamais qu'une catégorie ayant un unique objet et dont toutes les flèches sont des isomorphismes), et si $\mathcal{E}$ est le topos ponctuel, $\mathbb{A}$ est une simple catégorie au sens usuel, et $\mathcal{B}\mathbb{A}$ est la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathbb{A}$. Si $u : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ est un morphisme de faisceaux en catégories sur $\mathcal{E}$ (ce qu'on appellera simplement un foncteur), il induit un morphisme de topos

$$u : \mathcal{B}\mathbb{A} \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{A}' \ .$$

Le foncteur image inverse correspondant $u^* : \mathcal{B}\mathbb{A}' \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{A}$ est induit par le changement de base le long du morphisme de faisceaux $\mathsf{Ob}\,\mathbb{A} \longrightarrow \mathsf{Ob}\,\mathbb{A}'$. Il admet en outre un adjoint à gauche $u_!$. Dans le cas du foncteur p de $\mathbb{A}$ vers le faisceau final, le foncteur p^* associe à un faisceau X sur $\mathcal{E}$ le faisceau X muni de l'action triviale. Le foncteur image directe p_* peut être vu comme un foncteur "sections globales internes", ou de manière équivalente, comme le foncteur "limite projective interne indexée par $\mathbb{A}^\circ$", et le foncteur $p_!$ peut être quant à lui vu comme le foncteur "limite inductive inductive interne indexé par $\mathbb{A}^\circ$". On appellera $p : \mathcal{B}\mathbb{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ le *morphisme canonique* associé à $\mathbb{A}$.

Si on considère le faisceau d'ensemble $\mathsf{Ob}\,\mathbb{A}$ comme un faisceau en catégories discrètes, on a un foncteur canonique $i : \mathsf{Ob}\,\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$, d'où un foncteur

$$i_! : \mathcal{E}/\,\mathsf{Ob}\,\mathbb{A} \simeq \mathcal{B}\,\mathsf{Ob}\,\mathbb{A} \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{A} \ .$$

Si $(X, \alpha : X \longrightarrow \mathsf{Ob}\,\mathbb{A})$ est un objet de $\mathcal{E}/\,\mathsf{Ob}\,\mathbb{A}$, on note $(X, \alpha) = (X, \alpha : X \longrightarrow \mathbb{A})$ son image par $i_!$. Il est remarquable que si $\mathcal{U}$ est une famille génératrice de $\mathcal{E}/\mathbb{A}$, alors $i_!\mathcal{U}$ est une famille génératrice de $\mathcal{B}\mathbb{A}$. Les morphismes $(X', \alpha') \longrightarrow (X, \alpha)$ dans $\mathcal{B}\mathbb{A}$ sont représentés par des couples (f, a), où $f : X' \longrightarrow X$ est une flèche de $\mathcal{E}$, et a une section de $\mathsf{Fl}\,\mathbb{A}$ au-dessus de X' de source α' et de but αf, ce qu'on représente par un diagramme de la forme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{a}{\Nearrow}"] & X \arrow[dl, "\alpha"] \\ & \mathbb{A} & \end{tikzcd}$$

On fixe pour le moment un objet $\xi = (X, \alpha)$ au-dessus de $\mathsf{Ob}\,\mathbb{A}$. On remarque aussitôt que $p_!\xi = X$, et on a un morphisme de topos

$$p_\xi : \mathcal{B}\mathbb{A}/\xi \longrightarrow \mathcal{E}/X$$

dont le foncteur image inverse

$$p_\xi^* : \mathcal{E}/X \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{A}/\xi$$

est défini par

$$\eta = (Y, \beta) \longmapsto p_\xi^*\eta = ((Y, \alpha\beta), (\beta, 1_{\alpha\beta})) \ .$$

On remarque qu'on a un morphisme canonique de ξ vers $p^*X = p^*p_!\xi$, ainsi qu'un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} p_\xi^*\eta \arrow[r] \arrow[d] & p^*Y \arrow[d] \\ \xi \arrow[r] & p^*X \end{tikzcd} \quad . \tag{6.2.1.1}$$

LEMME 6.2.2. *Le morphisme* $p_\xi : \mathcal{B}\mathbb{A}/\xi \longrightarrow \mathcal{E}/X$ *admet un adjoint à gauche.*

DÉMONSTRATION. On définit un morphisme de topos $s_\xi : \mathcal{E}/X \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{A}/\xi$ dont le foncteur image inverse s_ξ^* est le foncteur d'oubli

$$(F, F \longrightarrow \xi) \longmapsto (F, F \longrightarrow X)$$

(un objet de $\mathcal{B}\mathbb{A}$ au-dessus de ξ est en particulier un $\mathbb{A}$-faisceau dont le morphisme structural vers $\mathsf{Ob}\,\mathbb{A}$ se factorise par α). Il est d'autre part immédiat que $s_\xi^* p_\xi^*$ s'identifie à l'identité de $\mathcal{E}/X$. On a d'autre part un morphisme canonique

$$\eta : 1_{\mathbb{A}/\xi} \longrightarrow p_\xi^* s_\xi^*$$

défini grâce au carré cartésien (6.2.1.1). Plus explicitement, on peut le définir comme suit. Si (X', α') est un faisceau au-dessus de $\mathsf{Ob}\,\mathbb{A}$, et si $(f, a) : (X', \alpha') \longrightarrow (X, \alpha)$ est un morphisme de $\mathcal{B}\mathbb{A}$, on a une factorisation canonique dans $\mathcal{B}\mathbb{A}$ de la forme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, equal] \arrow[dr, "\alpha'"'] & X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha f"] \arrow[dl, phantom, "\overset{a}{\Nearrow}"] & X \arrow[dl, "\alpha"] \\ & \mathbb{A} & \end{tikzcd}$$

Or $p_\xi^* s_\xi^*((X', \alpha'), (f, a)) = (X', \alpha f)$, et le morphisme ainsi construit étant naturel, les objets de la forme $((X', \alpha'), (f, a))$ formant une famille génératrice de $\mathcal{B}\mathbb{A}$, cela prouve l'existence du morphisme η (pour être rigoureux, il faut bien entendu remarquer que les foncteurs incriminés commutent aux petites limites inductives). On vérifie aussitôt que cela fait du foncteur s_ξ^* un adjoint à gauche de p_ξ^*, ce qui prouve l'assertion. $\square$

6.2.3. On considère à présent un morphisme de topos $\varphi : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$, et on note $\mathbb{A}' = \varphi^*\mathbb{A}$. Alors $\varphi^*\xi$ est de la forme $(\varphi^*X, \varphi^*\alpha)$, et on remarque que $\mathcal{E}'/X' \simeq \mathcal{E}'/X$ et que $\mathcal{B}\mathbb{A}'/\xi' \simeq \mathcal{B}\mathbb{A}'/\xi$. On vérifie en outre aussitôt que les carrés ci-dessous sont essentiellement commutatifs.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}\mathbb{A}' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p'"'] & \mathcal{B}\mathbb{A} \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{E}' \arrow[r, "\varphi"'] & \mathcal{E} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{B}\mathbb{A}'/\xi \arrow[r, "\psi/\xi"] \arrow[d] & \mathcal{B}\mathbb{A}/\xi \arrow[d] \\ \mathcal{E}'/X \arrow[r, "\varphi/X"'] & \mathcal{E}/X \end{tikzcd} \tag{6.2.3.2}$$

On peut en fait vérifier que ce sont des carrés cartésiens dans la 2-catégorie des topos.

6.2.4. On considère à présent une catégorie topologique $\mathfrak{T}$ un localisateur topologique $\mathcal{W}$. On suppose que pour tout topos $\mathcal{E}$ dans $\mathfrak{T}$ et tout faisceau en catégories $\mathbb{A}$ sur $\mathcal{E}$, le topos $\mathcal{B}\mathbb{A}$ est dans $\mathfrak{T}$.

PROPOSITION 6.2.5. *Soit $\mathcal{E}$ un topos localement $\mathcal{W}$-asphérique dans $\mathfrak{T}$. Pour tout faisceau en catégories $\mathbb{A}$ sur $\mathcal{E}$, le topos $\mathcal{B}\mathbb{A}$ est localement $\mathcal{W}$-asphérique.*

DÉMONSTRATION. Les objets de la forme (X, α) formant une famille génératrice de $\mathcal{B}\mathbb{A}$, l'assertion résulte aussitôt de la proposition 4.1.12 et du lemme 6.2.2. □

REMARQUE 6.2.6. Les lemmes 6.2.2 et les diagrammes 6.2.3.2 impliquent en fait que si φ est $\mathcal{W}$-asphérique, alors il en est de même de ψ. Autrement dit, en regard de la caractérisation des foncteurs lisses donnée dans [**48**, théorème 12.12], cela montre que les morphismes canoniques $p : \mathcal{B}\mathbb{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ sont lisses en un sens adéquat. En regard de [**13**, théorème 5.5.2], l'énoncé suivant n'est donc pas surprenant (de même que sa démonstration).

THÉORÈME 6.2.7. *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{W}$-modeleur local dans $\mathfrak{T}$. Pour tout faisceau en catégories $\mathbb{A}$ sur $\mathcal{E}$, le topos $\mathcal{B}\mathbb{A}$ est un $\mathcal{W}$-modeleur local.*

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition précédente, on sait déjà que $\mathcal{B}\mathbb{A}$ est localement asphérique. Il suffit donc de montrer que ce topos vérifie par exemple le critère (ii$'$) du théorème 4.2.8. On commence par remarquer que le foncteur image inverse $p^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}\mathbb{A}$ respecte les $\mathcal{W}$-équivalences locales : c'est une conséquence immédiate de la proposition 4.1.12, du lemme 6.2.2, et de la commutativité de 6.2.3.2. En particulier, si L désigne l'objet de Lawvere de $\mathcal{E}$, le morphisme de p^*L vers le faisceau final sur $\mathcal{B}\mathbb{A}$ est une $\mathcal{W}$-équivalence locale. Or il est clair que la structure de segment séparant de L en induit une sur p^*L, ce qui achève la démonstration. □

EXEMPLE 6.2.8. Soit $\mathbb{G}$ un orbifold (resp. un groupoïde de Lie réel, resp. un groupoïde de Lie complexe). Il peut être vu comme un faisceau en groupoïdes sur le site $\mathbb{C}^0$ (resp. $\mathbb{C}^\infty$, resp. $\mathbb{C}^\omega$) de l'exemple 6.1.2, et par conséquent, en vertu du théorème ci-dessus et du théorème 6.1.8, le (gros) topos des représentations de $\mathbb{G}$ est un modeleur local et admet donc une structure de catégorie de modèles fermée canonique (propre et à engendrement cofibrant) dont les équivalences faibles sont les équivalences d'Artin-Mazur, et les cofibrations les monomorphismes.

SCHOLIE 6.2.9. Sous les hypothèses de 6.2.7, si on suppose que $\mathcal{W}$ désigne le localisateur topologique des équivalences d'Artin-Mazur, que $\mathcal{E}$ est strict dans le sens où les $\mathcal{W}$-équivalence sont stables par produits finis dans $\mathcal{E}$, et que $\mathbb{A} = \mathbb{G}$ est un faisceau en groupes, il résulte facilement de [**13**, corollaire 5.5.23] que les $\mathcal{W}$-équivalences de $\mathcal{B}\mathbb{G}$ sont exactement les morphismes de $\mathbb{G}$-faisceaux qui sont des $\mathcal{W}$-équivalences dans $\mathcal{E}$ après application du foncteur d'oubli.

Bibliographie

[1] M. Artin, B. Mazur. *Étale Homotopy.* Lectures Notes in Mathematics, Vol. 100. Springer-Verlag, 1969.

[2] M. Barr, R. Diaconescu. On locally simply connected toposes and their fundamental groups. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, 22 :301–314, 1981.

[3] A. K. Bousfield. The localization of spaces with respect to homology. *Topology*, 14 :133–150, 1975.

[4] A. K. Bousfield. Constructions of factorization systems in categories. *J. Pure. Appl. Algebra*, 9 :207–220, 1977.

[5] A. K. Bousfield. Homotopical localization of spaces. *Amer. J. Math.*, 119(6) :1321–1354, 1997.

[6] A. K. Bousfield, D. M. Kan. *Homotopy limits, completions, and localization.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304. Springer-Verlag, 1972.

[7] A. K. Bousfield, E. M. Friedlander. Homotopy theory of Γ-spaces, spectra, and bisimplicial sets, *in Geometric Applications of Homotopy Theory II* (Proc. Conf. Evanston, Ill., 1977, M. G. Barrat and M. E. Mahowald eds.), pages 80–130. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 658. Springer-Verlag, 1978.

[8] K. S. Brown. Abstract homotopy and generalized sheaf cohomology. *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 186 :419–458, 1973.

[9] K. S. Brown, S. M. Gersten. Algebraic K-theory and generalized sheaf cohomology, *Higher K-theories I*, pages 266–292. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 341. Springer-Verlag, 1973.

[10] W. Chachólski, J. Scherer. Homotopy theory of diagrams. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, 155(736), 2002.

[11] D.-C. Cisinski. Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles. À paraître dans les *Annales Mathématiques Blaise Pascal*.

[12] D.-C. Cisinski. Le localisateur fondamental minimal. À paraître dans les *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques.*

[13] D.-C. Cisinski. *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie.* Thèse de doctorat de l'Université Paris 7, 2002.

[14] D.-C. Cisinski. Propriétés universelles et extensions de Kan dérivées. Prépublication, 2002.

[15] D.-C. Cisinski. Théories homotopiques dans les topos. *J. Pure Appl. Algebra*, 174 :43–82, 2002.

[16] S. E. Crans. Quillen closed model structures for sheaves. *J. Pure Appl. Algebra*, 101 :35–57, 1995.

[17] P. Deligne. Voevodsky's lectures on cross functors. Fall 2001.

[18] D. Dugger. Combinatorial model categories have presentations. *Adv. Math.*, 164 :177–201, 2001.

[19] D. Dugger. Universal homotopy theories. *Adv. Math.*, 164 :144–176, 2001.

[20] D. Dugger, S. Hollander, D. Isaksen. Hypercovers and simplicial presheaves. Prépublication, 2002.

[21] W. G. Dwyer, P. S. Hirschhorn, D. M. Kan. *Model categories and more abstract homotopy theory : a work in what we like to think of as progress.* En préparation.

[22] E. Dror Farjoun. *Cellular spaces, nullspaces and homotopy localization.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, 1995.

[23] E. Dror Farjoun, J. H. Smith. Homotopy localization nearly preserves fibrations. *Topology*, 34 :359–375, 1995.

[24] E. Friedlander. Fibrations in étale homotopy theory. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 42, 1972.

[25] P. Gabriel, M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory.* Ergebnisse der Mathematik, Band 35. Springer-Verlag, 1967.

[26] J. Giraud. *Cohomologie non abélienne.* Die Grundlegen der mathematischen Wissenshaften, Band 179. Springer-Verlag, 1971.

[27] P. F. Goerss, J. F. Jardine. Localization theories for simplicial presheaves. *Can. J. Math.*, 50(5) :1048–1089, 1998.

[28] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1).* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224. Springer-Verlag, 1971.

[29] A. Grothendieck. *Pursuing stacks.* Manuscrit, 1983.

[30] A. Grothendieck. *Dérivateurs.* Manuscrit, ∼1990.

[31] A. Grothendieck, M. Artin, J.-L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA4).* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, 270, 305. Springer-Verlag, 1972-1973.

[32] A. Heller. Homotopy theories. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, 71(383), 1988.

[33] P. S. Hirschhorn. *Localization of model categories.* En préparation.

[34] M. Hovey. Model category structures on chain complexes of sheaves. Prépublication.

[35] M. Hovey. *Model Categories.* Math. surveys and monographs, Vol. 63. Amer. Math. Soc., 1999.

[36] L. Illusie. *Complexe cotangeant et déformation I.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239. Springer-Verlag, 1971.

[37] L. Illusie. *Complexe cotangeant et déformation II.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 283. Springer-Verlag, 1972.

[38] J. F. Jardine. Simplicial objects in a Grothendieck topos. *Contemporary Math.*, 55(1) :193–239, 1986.

[39] J. F. Jardine. Simplicial presheaves. *J. Pure Appl. Algebra*, 47 :35–87, 1987.

[40] J. F. Jardine. Universal Hasse-Witt classes. *Contemporary Math.*, 83 :83–100, 1989.

[41] J. F. Jardine. Boolean localization in practice. *Doc. Math.*, 1(13) :245–275, 1996.

[42] A. Joyal, I. Moerdijk. Toposes are cohomologically equivalent to spaces. *Amer. J. Math.*, pages 87–95, 1990.

[43] A. Joyal, I. Moerdijk. Toposes as homotopy groupoids. *Adv. Math.*, 80 :22–38, 1990.

[44] A. Joyal, M. Tierney. An extension of the Galois theory of Grothendieck. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 51(309), 1984.

[45] O. Leroy. *Groupoïde fondamental et théorème de Van Kampen en théorie des topos.* Cahiers Mathématiques. Université des Sciences et Techniques du Languedoc, U.E.R. de Mathématiques, 1979.

[46] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician.* Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1998. Second edition.

[47] S. Mac Lane, I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic.* Universitext. Springer-Verlag, 1994.

[48] G. Maltsiniotis. *La théorie de l'homotopie de Grothendieck.* Prépublication 332 de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, juin 2002.

[49] J. P. May. *Simplicial objects in algebraic topology.* D. Van Nostrand, 1967.

[50] I. Moerdijk. Continuous fibrations and inverse limits of toposes. *Compositio Math.*, 58 :45–72, 1986.

[51] I. Moerdijk. Prodiscrete groups and Galois toposes. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, A 92 (2) :219–234, 1989.

[52] I. Moerdijk. *Classifying spaces and classifying topoi.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1616. Springer-Verlag, 1995.

[53] F. Morel. Notes manuscrites.

[54] F. Morel. *Théorie homotopique des schémas.* Astérisque 256. S.M.F., 1999.

[55] F. Morel, V. Voevodsky. $\mathbb{A}^1$-Homotopy Theory of Schemes. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 90 :45–143, 1999.

[56] C. Rezk. Fibrations and homotopy colimits of simplicial sheaves. Prépublication.

[57] G. Segal. Classifying spaces and spectral sequences. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 34 :105–112, 1968.

[58] J.-P. Serre. Homologie singulière des espaces fibrés. *Ann. Math.*, 54 :425–505, 1951.

[59] J.-P. Serre. Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. *Ann. Math.*, 58 :258–294, 1953.

[60] N. Spaltenstein. Resolutions of unbounded complexes. *Comment. Math. Helvetici*, 65(2) :121–154, 1988.

[61] R. Thomason. Homotopy colimits in the category of small categories. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85 :91–109, 1979.

[62] J.-L. Verdier. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes.* Astérisque 239. S.M.F., 1996.

[63] V. Voevodsky. Δ-Closed classes. Prépublication, 2000.

[64] V. Voevodsky. Homotopy theory of simplicial sheaves in completely decomposable topologies. Prépublication, 2000.

[65] V. Voevodsky. Unstable motivic homotopy categories in Nisnevich and cdh topologies. Prépublication, 2000.