Examen – 3 Mars 2016

Exercice 1. Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $d \geq 2$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_k) \in E^k$, on note E_x le sous-espace vectoriel engendré par $x_1, \ldots, x_k$. Pour $0 \leq k \leq d$, on note

$$X_k = \{x \in E^k \,|\, \dim E_x = k\}\,.$$

a) Vérifier que la projection évidente $E^{k+1} = E^k \times E \to E^k$ induit une application

$$p_k : X_{k+1} \to X_k\,.$$

Vérifier que $X_d \simeq GL_d(\mathbf{C})$ et que

$$X_k = \{x \in E^k \,|\, \exists y \in E^{d-k}\,,\ x \oplus y \in X_d\}\,.$$

En déduire que l'on peut recouvrir X_k par des ouverts U vérifiant la propriété suivante : il existe $y \in X_{d-k}$, tel que $x \oplus y \in X_d$ pour tout $x \in U$.

b) Montrer que si U est un tel ouvert de X_k, alors en posant $V = p_k^{-1}(U)$, la restriction de p_k à V est une fibration de Serre. En déduire que p_k est une fibration de Serre.

c) Montrer que, pour tout $x \in X_k$, la fibre $p^{-1}(x)$ est homéomorphe au complémentaire de $\mathbf{C}^k \times \{0\}$ dans $\mathbf{C}^d$. En déduire que les fibres de p_k ont toutes le type d'homotopie de la sphère de dimension $2(d-k)-1$.

d) Calculer $\pi_i(X_k, x)$ pour tout $i \leq 2$.

e) Vérifier que le déterminant induit par fonctorialité un isomorphisme de groupes

$$\pi_1(GL_d(\mathbf{C})) \simeq \pi_1(\mathbf{C}^*)\,.$$

En déduire que $\pi_i(SL_d(\mathbf{C})) = 0$ pour $i \leq 2$.

Exercice 2. Soit G un groupe fini. On considère un anneau k, et on suppose que l'ordre de G est inversible dans k.

a) Soit M une représentation k-linéaire de G (à droite). Montrer que le sous-module $M^G = \{x \in M \,|\, \forall g \in G\ x.g = x\}$ est canoniquement un facteur direct de M.

b) Montrer que toute suite exacte courte de représentations k-linéaires de G de la forme

$$0 \to K \to M \to Q \to 0$$

induit canoniquement une suite exacte courte de k-modules de la forme

$$0 \to K^G \to M^G \to Q^G \to 0\,.$$

c) Soit C un complexe de représentations k-linéaires de G (i.e. chaque k-module C^n est muni d'une action linéaire de G, et chaque différentielle $d : C^n \to C^{n+1}$ est équivariante). Exhiber un isomorphisme canonique de la forme
$$H^n(C)^G \simeq H^n(C^G)$$
pour tout entier n.

On suppose à présent que G agit à gauche par difféomorphismes sur une variété différentielle M.

d) Montrer que G agit canoniquement à droite sur le complexe de de Rham $\Omega^*(M)$. Montrer que, si l'action de G sur M est libre, alors la projection canonique de passage au quotient $M \to M_{/G}$ induit un isomorphisme de complexes
$$\Omega^*(M_{/G}) \simeq \Omega^*(M)^G\,.$$

e) Montrer que
$$\dim H^i_{\mathrm{dR}}(\mathbf{R}\mathrm{P}^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \text{ ou bien si } n \text{ est impair et si } i = n\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3. Dans ce qui suit, on dira qu'une variété différentielle M est de type fini si ses groupes de cohomologie de de Rham sont de dimension finie et sont nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux. On admettra que les variétés différentielles compactes sont de ce type (c'est une conséquence de la dualité de Poincaré). Pour une telle variété, on définit la *caractéristique d'Euler-Poincaré* :
$$\chi(M) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H^i_{\mathrm{dR}}(M)\,.$$

a) Vérifier que si M est un ensemble fini, alors $\chi(M)$ est le cardinal de M.

b) Montrer que si M est la réunion de deux ouverts U et V, de sorte que U, V et $U \cap V$ soient de type fini, alors M est de type fini. Montrer en outre qu'alors on a l'égalité
$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)\,.$$

c) Montrer que si M est de type fini et si G est un groupe fini agissant librement sur M (à gauche), alors la variété quotient $M_{/G}$ est de type fini, et on a :
$$\chi(G)\chi(M_{/G}) = \chi(M)\,.$$

d) Montrer que le seul groupe fini non trivial pouvant agir librement sur une sphère de dimension paire est le groupe à deux éléments.

e) Montrer que tout groupe cyclique fini peut agir librement sur toute sphère de dimension impaire.