Journal of Pure and Applied Algebra 215 (2011) 962–982

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Pure and Applied Algebra

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jpaa

La catégorie Θ de Joyal est une catégorie test

Denis-Charles Cisinski [a], Georges Maltsiniotis [b,*]

[a] Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 9, France

[b] Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot, Case Postale 7012, Bâtiment Chevaleret, 75205 Paris cedex 13, France

ARTICLE INFO

Article history:
Received 15 November 2009
Received in revised form 7 July 2010
Available online 27 November 2010
Communicated by P. Balmer

MSC: 18E35; 18F20; 18G30; 18G55; 55P15; 55P60; 55U05; 55U10; 55U35; 55U40

RÉSUMÉ

Le but principal de cet article est de prouver que la catégorie cellulaire Θ de Joyal est une catégorie test stricte au sens de Grothendieck. Cela implique en particulier que les ensembles cellulaires, préfaisceaux sur Θ, modélisent les types d'homotopie en un sens très précis, et ceci de façon compatible au produit cartésien. Pour cela, on développe un formalisme de décalages sur une petite catégorie, ou sur un foncteur, présentant un intérêt indépendant, et ayant d'autres applications.

ABSTRACT

The principal aim of this article is to prove that the cellular category Θ of Joyal is a strict test category in Grothendieck's sense. In particular, this implies that cellular sets, presheaves on Θ, modelize homotopy types in a very precise sense, and this in a way compatible with finite cartesian products. To achieve this, we develop a formalism of "décalages" on a small category, or on a functor, of independent interest and having other applications.

1. Introduction

À l'origine de cet article est le désir de faire le lien entre la théorie des catégories test, développée par Grothendieck dans «Pursuing Stacks» [9], et l'étude homotopique des ensembles cellulaires. Une catégorie test est une petite catégorie dont la propriété la plus importante est que sa catégorie des préfaisceaux modélise les types d'homotopie des CW-complexes, et ceci de façon canonique : à un préfaisceau on associe le type d'homotopie du classifiant de la catégorie de ses éléments. Ainsi, la théorie des catégories test peut être considérée comme une généralisation de celle des ensembles simpliciaux. Les ensembles cellulaires sont les préfaisceaux sur la catégorie cellulaire Θ, introduite par Joyal [11] comme catégorie opposée à celle des disques combinatoires finis de dimension arbitraire. Peu après, Batanin et Street ont conjecturé [3] que la catégorie Θ se plonge de façon pleinement fidèle dans la catégorie des ∞-catégories strictes, ce qui a été démontré indépendamment par Makkai et Zawadowsky [12, théorème 5.10], et par Clemens Berger [4]. Ces auteurs montrent en outre que le foncteur «nerf» de source la catégorie des ∞-catégories strictes et de but la catégorie des préfaisceaux sur Θ, induit par ce plongement, est pleinement fidèle. De plus, l'image essentielle de ce foncteur nerf est formée des ensembles cellulaires satisfaisant à une certaine propriété d'exactitude à gauche, généralisant la condition (introduite par Grothendieck dans [8] en même temps que sa définition du nerf d'une catégorie) caractérisant les ensembles simpliciaux qui sont le nerf d'une catégorie. Ainsi, la théorie des ensembles cellulaires est intimement liée à celle des ∞-catégories strictes, et même à celle des ∞-catégories faibles, en suivant les idées de Grothendieck [9, sections 1–13], [1,14,15], de Joyal [11], ou de Batanin [2].

* Corresponding author.
E-mail addresses: cisinski@math.cnrs.fr (D.-C. Cisinski), maltsin@math.jussieu.fr (G. Maltsiniotis).
URLs: http://www.math.univ-toulouse.fr/~dcisinsk/ (D.-C. Cisinski), http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/ (G. Maltsiniotis).

0022-4049/$ – see front matter
doi:10.1016/j.jpaa.2010.07.003

La catégorie Θ admet une définition combinatoire en termes d'arbres planaires [2,4]. Celle adoptée ici est une définition équivalente, due à Clemens Berger [5], et exploitée ultérieurement par Richard Steiner [19], et également par Charles Rezk [18]. On définit la catégorie Θ comme réunion croissante de sous-catégories pleines Θ_n (liées à la théorie des n-catégories), qui sont obtenues à partir de la catégorie Δ des simplexes en itérant une construction purement algébrique, appelée «produit en couronnes». L'avantage de cette définition est qu'on peut démontrer des propriétés de la catégorie Θ en utilisant une récurrence et un passage à la limite.

L'outil technique le plus important de ce travail est la notion de décalage. Un décalage sur une petite catégorie A est une «homotopie à deux crans», de la forme d'un «cospan» dans la catégorie des endofoncteurs de A, entre le foncteur identique de A et un endofoncteur constant. Les résultats principaux de l'article sont, d'une part, l'établissement de conditions suffisantes portant sur un décalage pour que la catégorie sous-jacente soit une catégorie test (proposition 3.11 et corollaire 3.12), et d'autre part, la construction de décalages, satisfaisant à ces conditions, sur un produit en couronnes (proposition 5.4), ou sur un produit en couronnes infini (proposition 5.10). On applique ces résultats pour montrer que la catégorie cellulaire Θ est une catégorie test (exemple 5.12), ce qui implique en particulier que la catégorie $\widehat{\Theta}$ des ensembles cellulaires modélise les types d'homotopie. La théorie générale développée par le premier des auteurs, dans [6], permet alors de retrouver de façon purement algébrique la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{\Theta}$, construite à l'aide de méthodes topologiques par Clemens Berger [4, théorème 3.9].

Si nous développons un formalisme bien plus général que ce qui est strictement nécessaire pour prouver que Θ est une catégorie test, c'est que nos résultats s'appliquent à bien d'autres situations (voir exemples 3.16, 3.17 et 5.15). Ils permettent aussi de prouver (exemple 5.12) que la sous-catégorie Θ' de Θ, ayant les mêmes objets que Θ et les monomorphismes comme flèches, est une catégorie test (faible). Cela implique, en particulier, que comme dans le cas des ensembles simpliciaux (et contrairement au cas des ensembles cubiques), on peut définir les groupes d'homotopie ou d'homologie d'un ensemble cellulaire à l'aide des seuls opérateurs de face. D'autre part, on peut définir une catégorie $\widetilde{\Theta}$ ayant les mêmes objets que Θ, admettant Θ comme sous-catégorie, et jouant le même rôle vis à vis des ∞-groupoïdes que Θ vis à vis des ∞-catégories. Dans sa thèse [1], Dimitri Ara prouve que, même si $\widetilde{\Theta}$ ne s'obtient pas comme un produit en couronnes infini, le décalage sur Θ construit ici se prolonge à $\widetilde{\Theta}$, et satisfait aux conditions suffisantes établies dans notre article permettant d'affirmer que $\widetilde{\Theta}$ soit une catégorie test. Il obtient par ailleurs une preuve totalement différente du fait que Θ est une catégorie test.

Il y a d'autres applications en vue. Dans [2], Batanin a introduit la notion de ω-opérade, ainsi que celle de ω-opérade contractile, lui permettant de définir une notion d'∞-catégorie faible. Clemens Berger associe fonctoriellement à toute ω-opérade A une petite catégorie Θ_A, la catégorie cellulaire Θ étant, elle-même, associée à l'ω-opérade finale. Il y a donc un foncteur canonique $\Theta_A \longrightarrow \Theta$. L'étude de ce foncteur doit permettre de déduire, du fait que Θ est une catégorie test, que si A est une ω-opérade contractile, alors Θ_A est aussi une catégorie test. Cela montrera que la catégorie des préfaisceaux sur Θ_A admet une structure de catégorie de modèles, généralisant celle des ensembles cellulaires, répondant ainsi par l'affirmative à une question posée par Clemens Berger dans [4]. Ainsi, notre article peut être considéré comme une (modeste) contribution à l'étude homotopique des ∞-catégories, et ∞-groupoïdes, à la suite de [4] et des développement ultérieurs du premier des auteurs dans [7], conformément au programme de Grothendieck visant à modéliser les types d'homotopie par des ∞-groupoïdes (non stricts).

Notre article se déroule comme suit. La deuxième section est consacrée aux rappels sur les catégories test de Grothendieck. Pour une étude plus approfondie de cette théorie, on peut consulter [9,13,6]. Dans la troisième section, on introduit la notion de décalage sur une catégorie ou sur un foncteur. On en déduit un formalisme très général permettant de trouver des conditions suffisantes sur une petite catégorie pour qu'elle soit une catégorie test (faible ou stricte). On présente de nombreux exemples de catégories admettant de décalages. Dans la section quatre, on rappelle la construction du produit en couronnes et du produit en couronnes infini, ainsi que la définition en ces termes de la catégorie cellulaire. La section cinq est consacrée à la construction de décalages sur un produit en couronnes ou un produit en couronnes infini. Cela permet d'obtenir des conditions suffisantes pour qu'un produit en couronnes, ou un produit en couronnes infini, soit une catégorie test (faible ou stricte). On applique ces résultats pour montrer que la catégorie cellulaire est une catégorie test stricte, et que sa sous-catégorie ayant les mêmes objets et les monomorphismes comme flèches est une catégorie test faible. On en déduit une structure de catégorie de modèles sur la catégorie des ensembles cellulaires. Dans la dernière section, on présente une description combinatoire, en termes d'arbres planaires, du produit en couronnes, du produit en couronnes infini, ainsi que des décalages construits dans la section précédente.

Pour toute catégorie C, on note $\mathsf{Ob}(C)$ la classe des objets de C, $\mathsf{Fl}(C)$ la classe de ses flèches, et C° la catégorie opposée. Pour tout objet c de C, $1_c : c \longrightarrow c$ désigne le morphisme identité de c.

2. Rappels sur les catégories test

2.1. On note $\mathcal{C}at$ la catégorie des petites catégories et $\mathcal{W}$ la classe des équivalences faibles usuelles de $\mathcal{C}at$, classe des foncteurs entre petites catégories dont l'image par le foncteur nerf est une équivalence faible simpliciale, autrement dit, un morphisme d'ensembles simpliciaux dont la réalisation topologique est une équivalence d'homotopie. On rappelle que la catégorie localisée $\mathsf{Hot} = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at$ est canoniquement équivalente à la catégorie homotopique des CW-complexes. On vérifie aussitôt que la classe $\mathcal{W}$ est fortement saturée, autrement dit, si $\gamma : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathsf{Hot}$ désigne le foncteur canonique de localisation, $\mathcal{W}$ est la classe des flèches de $\mathcal{C}at$ dont l'image par γ est un isomorphisme. Si $u : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$, u est une équivalence faible si et seulement si le foncteur opposé $u^\circ : A^\circ \longrightarrow B^\circ$ l'est, puisque les réalisations topologiques du nerf de u et de u° coïncident. On dit qu'une petite catégorie A est *asphérique* (ou *faiblement contractile*) si l'unique foncteur $A \longrightarrow e$, où e désigne la catégorie ponctuelle, est une équivalence faible, ou de façon équivalente, si $\gamma(A)$ est un objet final de Hot. Si une petite catégorie A est contractile, autrement dit s'il existe un zigzag de transformations naturelles entre le foncteur identique 1_A de A et un endofoncteur constant, alors A est asphérique. En particulier, si A admet un objet final, ou initial, alors elle est asphérique. Pour tout foncteur entre petites catégories $u : A \longrightarrow B$ et tout objet b de B, on note A/b la «comma» catégorie dont les objets sont les couples (a, s), où a est un objet de A et $s : u(a) \longrightarrow b$ une flèche de B, un morphisme de (a, s) vers un autre objet (a', s') étant une flèche $f : a \longrightarrow a'$ de A telle que $s = s'u(f)$. On dit que le foncteur $A \longrightarrow B$ est *asphérique* si pour tout objet b de B, la catégorie A/b est asphérique. Il résulte du théorème A de Quillen [17] que tout foncteur asphérique est une équivalence faible.

2.2. Dans la suite de cette section, on se fixe une petite catégorie A. On note $\widehat{A}$ la catégorie des préfaisceaux sur A. On rappelle qu'on a un couple de foncteurs adjoints

$$i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at, \qquad i_A^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A}$$
$$X \longmapsto A/X, \qquad C \longmapsto \big(a \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/a, C)\big).$$

On dit qu'un préfaisceau X sur A est *asphérique* si la catégorie $i_A(X) = A/X$ est asphérique. Si le préfaisceau X est représentable, il est asphérique, puisque alors la catégorie A/X admet un objet final. On dit qu'un morphisme de préfaisceaux sur A est une *équivalence faible* si son image par le foncteur i_A est une équivalence faible de $\mathcal{C}at$. On note $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ la classe des équivalences faibles de $\widehat{A}$, de sorte que $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W})$. La saturation forte de $\mathcal{W}$ implique alors celle de la classe $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Si A est la catégorie Δ des simplexes, de sorte que $\widehat{A}$ soit la catégorie des ensembles simpliciaux, $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est formée exactement des équivalences faibles simpliciales [10, chapitre 6, section 3].

2.3. On dit que A est une *catégorie test faible* si $\mathcal{W} = (i_A^*)^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}})$, et si les foncteurs i_A et i_A^* induisent des équivalences de catégories

$$\overline{i}_A : \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \longrightarrow \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at = \mathsf{Hot}, \qquad \overline{i}_A^* : \mathsf{Hot} = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A},$$

quasi-inverses l'une de l'autre. En particulier, les préfaisceaux sur A sont alors des modèles pour les types d'homotopie.

Proposition 2.4 (*Grothendieck*)**.** *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est une catégorie test faible ;*
(ii) *A satisfait aux conditions suivantes :*
  (a) *A est asphérique ;*
  (b) *$i_A^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$;*
(iii) *pour toute petite catégorie C ayant un objet final, le préfaisceau $i_A^*(C)$ est asphérique.*

Voir [9], section 44, (a), ou [13], proposition 1.3.9.

2.5. On dit que A est une *catégorie test locale* si pour tout objet a de A, la catégorie A/a est une catégorie test faible. On dit que A est une *catégorie test* si elle est à la fois une *catégorie test locale* et une *catégorie test faible*. On dit que A est une *catégorie test stricte* si elle est une catégorie test et si le foncteur canonique de localisation $\widehat{A} \longrightarrow \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \simeq \mathsf{Hot}$ commute aux produits binaires.

2.6. On dit que la catégorie A est *totalement asphérique* si elle est non vide, et si tout produit binaire dans $\widehat{A}$ dont les facteurs sont des préfaisceaux représentables est un préfaisceau asphérique. Une catégorie totalement asphérique est asphérique. Si A est totalement asphérique, alors le produit de deux équivalences faibles de $\widehat{A}$ est une équivalence faible, et en particulier le foncteur de localisation $\widehat{A} \longrightarrow \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \simeq \mathsf{Hot}$ commute aux produits binaires [13, propositions 1.6.1, 2.1.3 et 2.1.8].

2.7. Un *segment* de $\widehat{A}$ est un triplet (I, d^0, d^1), où I est un préfaisceau sur A, et $d^0, d^1 : e_{\widehat{A}} \longrightarrow I$ des morphismes de préfaisceaux, de l'objet final $e_{\widehat{A}}$ de $\widehat{A}$ vers I. On dit que ce segment est *séparant* si l'égalisateur de la double flèche (d^0, d^1) est le préfaisceau vide. On dit qu'il est *asphérique* si le préfaisceau I est asphérique.

Théorème 2.8 (*Grothendieck*)**.** *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *A est une catégorie test stricte ;*
(b) *A est une catégorie test faible totalement asphérique ;*
(c) *A est totalement asphérique et il existe un segment séparant asphérique de $\widehat{A}$.*

Voir [9], section 44, (c), ou [13], proposition 1.6.8.

Exemples 2.9. L'exemple le plus important de catégorie test stricte est celui de la catégorie Δ des simplexes [9, section 36], ou [13, proposition 1.6.13, exemple 1.7.18]. Un autre exemple est celui de la catégorie des cubes avec connexions [16], tandis que la catégorie «classique» des cubes est une catégorie test [6, corollaire 8.4.13, ou proposition 8.4.27], mais n'est *pas* une catégorie test stricte [16]. Enfin, la sous-catégorie Δ' de la catégorie Δ des simplexes, ayant mêmes objets que Δ, et comme flèches les applications croissantes engendrées par les seuls opérateurs de face, est un exemple de catégorie test faible qui n'est *pas* une catégorie test [9, section 98], ou [13, proposition 1.7.25 et remarque 1.7.26].

Théorème 2.10 (*Grothendieck–Cisinski*)**.** *Soit A une catégorie test locale. Alors la catégorie $\widehat{A}$ des préfaisceaux sur A admet une structure de catégorie de modèles fermée, à engendrement cofibrant, propre, dont les cofibrations sont les monomorphismes et dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W})$. De plus, si A est une catégorie test* stricte *le produit cartésien de deux équivalences faibles est une équivalence faible.*

Démonstration. L'existence de la structure de catégorie de modèles à engendrement cofibrant résulte de [6, corollaire 4.2.18], et la propreté de [6, théorème 4.3.24] et du résultat analogue pour les ensembles simpliciaux. La dernière assertion est immédiate. □

3. Décalages, asphéricité, et catégories test

3.1. Soit A une petite catégorie. Un *décalage sur A* est la donnée d'un endofoncteur $D : A \longrightarrow A$, d'un objet a_0 de A, et de morphismes de foncteurs

$$1_A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} a_0$$

(où a_0 désigne aussi l'endofoncteur constant de A de valeur a_0). On dira parfois que le quintuplet $\mathcal{D} = (A, a_0, D, \alpha, \beta)$ est un décalage, et que le quadruplet (a_0, D, α, β), ou plus simplement, quand aucune confusion n'en résulte, le couple (α, β), est un décalage sur A. On dit que l'objet a_0 de A est le *centre* du décalage $\mathcal{D}$, ou que le décalage $\mathcal{D}$ est *centré* sur a_0. Un *scindage* du décalage $\mathcal{D}$ est la donnée pour tout objet a de A, d'une rétraction $r_a : D(a) \longrightarrow a$ de α_a. (On ne demande *pas* que le morphisme r_a soit fonctoriel en a). On dit qu'un décalage est *scindable* s'il admet un scindage, et qu'il est *scindé* s'il est *muni* d'un scindage.

3.2. Soient $\mathcal{D} = (A, a_0, D, \alpha, \beta)$ et $\mathcal{E} = (B, b_0, E, \gamma, \delta)$ deux décalages,

$$1_A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} a_0 \,, \qquad 1_B \xrightarrow{\gamma} E \xleftarrow{\delta} b_0 \,.$$

Un *morphisme de décalages* du premier vers le second est un foncteur $u : A \longrightarrow B$ satisfaisant aux relations

$$Eu = uD, \qquad b_0 = u(a_0), \qquad \gamma * u = u * \alpha, \qquad \delta * u = u * \beta.$$

Si p et q sont des scindages de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ respectivement, on dit que u est un *morphisme de décalages scindés* si u est un morphisme de décalages, et si pour tout objet a de A, on a l'égalité $q_{u(a)} = u(p_a)$. La catégorie des décalages, ainsi que celle de décalages scindés, admet des petites limites inductives et projectives qui se «calculent argument par argument». En revanche, la sous-catégorie pleine de la catégorie des décalages formée des décalages scindables n'est *pas* stable par limites inductives ou projectives.

3.3. Soit A une petite catégorie. Un *décalage séparant sur A* est un décalage

$$1_A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} a_0$$

sur A tel que :

(i) pour tout objet a de A, la flèche $\alpha_a : a \longrightarrow D(a)$ est un monomorphisme ;
(ii) pour toute flèche $f : a \longrightarrow a'$ de A, le carré

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\alpha_a} & D(a) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D(f)} \\ a' & \xrightarrow[\alpha_{a'}]{} & D(a') \end{array}$$

est cartésien ;
(iii) pour tout objet a de A, il n'existe aucun carré commutatif dans A de la forme

$$\begin{array}{ccc} a' & \longrightarrow & a_0 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_a} \\ a & \xrightarrow[\alpha_a]{} & D(a) \end{array} ,$$

autrement dit, le produit fibré $(a, \alpha_a) \times_{D(a)} (a_0, \beta_a)$ dans la catégorie $\widehat{A}$ des préfaisceaux sur A est le préfaisceau vide.

En présence de la condition (i), la condition (ii) équivaut à la condition :

(ii′) pour toute flèche $f : a \longrightarrow a'$ de A, si un morphisme $a'' \longrightarrow D(a)$ de A ne se factorise pas par $\alpha_a : a \longrightarrow D(a)$, alors le morphisme composé

$$a'' \longrightarrow D(a) \xrightarrow{D(f)} D(a')$$

ne se factorise pas par $\alpha_{a'} : a' \longrightarrow D(a')$.

On dit que le décalage (α, β) sur A est *cartésien* s'il satisfait aux seules deux premières conditions (i) et (ii) ci-dessus, ou de façon équivalente aux conditions (i) et (ii′).

Proposition 3.4. *Une limite inductive filtrante de décalages séparants* (resp. *cartésiens*) *est un décalage séparant* (resp. *cartésien*).

Démonstration. La proposition résulte facilement de la propriété de commutativité des limites inductives filtrantes et des limites projectives finies dans la catégorie des ensembles, et du «calcul» des limites inductives filtrantes dans la catégorie des petites catégories. Les détails sont laissés au lecteur. □

3.5. La notion de décalage admet la généralisation suivante, qui sera utile par la suite. Soit $I : A' \longrightarrow A$ un foncteur entre petites catégories. Un *décalage* sur I est la donnée d'un foncteur $D : A' \longrightarrow A$, d'un objet a_0 de A, et de morphismes de foncteurs

$$I \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} a_0$$

(où a_0 désigne aussi le foncteur constant de A' vers A de valeur a_0). On dit que l'objet a_0 de A est le *centre* du décalage, ou que le décalage est *centré* sur a_0. On dira parfois que le quadruplet (a_0, D, α, β), ou plus simplement, quand aucune confusion n'en résulte, le couple (α, β), est un décalage sur I, et que le quintuplet $\mathcal{D} = (I, a_0, D, \alpha, \beta)$ est un *décalage généralisé*. Un *scindage* du décalage généralisé $\mathcal{D}$ est la donnée pour tout objet a de A', d'une rétraction $r_a : D(a) \longrightarrow I(a)$ de α_a. On dit qu'un décalage généralisé est *scindable* s'il admet un scindage, et qu'il est *scindé* s'il est *muni* d'un scindage. On dit que le décalage généralisé $\mathcal{D} = (I, a_0, D, \alpha, \beta)$ est *séparant* si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) pour tout objet a de A', la flèche $\alpha_a : I(a) \longrightarrow D(a)$ est un monomorphisme de A ;
(ii) pour toute flèche $f : a \longrightarrow a'$ de A', le carré

$$\begin{tikzcd} I(a) \arrow[r, "\alpha_a"] \arrow[d, "I(f)"'] & D(a) \arrow[d, "D(f)"] \\ I(a') \arrow[r, "\alpha_{a'}"'] & D(a') \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien de A ;
(iii) pour tout objet a de A', il n'existe aucun carré commutatif dans A de la forme

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[r] \arrow[d] & a_0 \arrow[d, "\beta_a"] \\ I(a) \arrow[r, "\alpha_a"'] & D(a) \end{tikzcd} ,$$

autrement dit, le produit fibré $(I(a), \alpha_a) \times_{D(a)} (a_0, \beta_a)$ dans la catégorie $\widehat{A}$ des préfaisceaux sur A est le préfaisceau vide.

On dit que le décalage généralisé $\mathcal{D} = (I, a_0, D, \alpha, \beta)$ est *cartésien* s'il satisfait aux seules deux premières conditions (i) et (ii) ci-dessus.

Soient $\mathcal{D} = (I : A' \longrightarrow A, a_0, D, \alpha, \beta)$ et $\mathcal{E} = (J : B' \longrightarrow B, b_0, E, \gamma, \delta)$ deux décalages généralisés,

$$I \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} a_0 , \qquad J \xrightarrow{\gamma} E \xleftarrow{\delta} b_0 .$$

Un *morphisme de décalages généralisés* du premier vers le second est un couple de foncteurs (u', u), $u' : A' \longrightarrow B'$, $u : A \longrightarrow B$, satisfaisant aux relations

$$Ju' = uI, \quad Eu' = uD, \quad b_0 = u(a_0), \quad \gamma * u' = u * \alpha, \quad \delta * u' = u * \beta.$$

Si p et q sont des scindages de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ respectivement, on dit que (u', u) est un *morphisme de décalages généralisés scindés* si (u', u) est un morphisme de décalages généralisés, et si pour tout objet a de A', on a l'égalité $q_{u'(a)} = u(p_a)$. La catégorie des décalages généralisés, ainsi que celle des décalages généralisés scindés, admet des petites limites inductives et projectives qui se «calculent argument par argument». La sous-catégorie pleine de la catégorie des décalages généralisés formée des décalages généralisés séparants (resp. cartésiens) est stable par limites inductives filtrantes. On remarque qu'un décalage sur une petite catégorie A n'est rien d'autre qu'un décalage sur l'endofoncteur identique de A. La catégorie des décalages s'identifie ainsi à une sous-catégorie pleine de la catégorie des décalages généralisés.

Proposition 3.6. *Soit A une petite catégorie. Si A admet un décalage, alors A est asphérique. Si A admet un décalage scindable, alors A est totalement asphérique.*

Démonstration. Si la catégorie A admet un décalage elle est contractile, et en particulier asphérique. Pour montrer la deuxième assertion, il suffit donc de prouver qu'un décalage scindé sur A induit pour tout couple d'objets a_1, a_2 de A, un décalage sur $A/a_1 \times a_2$. Soit donc

$$\begin{tikzcd} 1_A \arrow[r, "\alpha"] & D \arrow[l, bend left, "r"] & a_0 \arrow[l, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

(r non nécessairement fonctoriel) un décalage scindé sur A. On rappelle qu'un objet de $A/a_1 \times a_2$ est un triplet

$$(a,\ p_1 : a \longrightarrow a_1,\ p_2 : a \longrightarrow a_2), \qquad a \in \mathrm{Ob}\,A, \quad p_1, p_2 \in \mathrm{Fl}\,A,$$

un morphisme $f : (a, p_1, p_2) \longrightarrow (a', p'_1, p'_2)$ étant une flèche $f : a \longrightarrow a'$ telle que

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & a' \arrow[dl, "p'_1"] \\ & a_1 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_2"'] & & a' \arrow[dl, "p'_2"] \\ & a_2 & \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} p_1 = p'_1 f \\ p_2 = p'_2 f\,. \end{array}$$

On définit

$$D' : A/a_1 \times a_2 \longrightarrow A/a_1 \times a_2$$

par

$$D'(a, p_1, p_2) = \big(D(a),\ r_{a_1} D(p_1),\ r_{a_2} D(p_2)\big), \qquad D'(f) = D(f).$$

On définit des morphismes de foncteurs

$$1_{A/a_1 \times a_2} \xrightarrow{\alpha'} D' \xleftarrow{\beta'} (a_0,\ r_{a_1}\beta_{a_1},\ r_{a_2}\beta_{a_2})$$

par

$$\alpha'_{(a,p_1,p_2)} = \alpha_a, \qquad \beta'_{(a,p_1,p_2)} = \beta_a,$$

qui sont bien des morphismes de $A/a_1 \times a_2$

$$(a, p_1, p_2) \xrightarrow{\alpha_a} D'(a, p_1, p_2) = \big(D(a),\ r_{a_1} D(p_1),\ r_{a_2} D(p_2)\big) \xleftarrow{\beta_a} (a_0,\ r_{a_1}\beta_{a_1},\ r_{a_2}\beta_{a_2})\ ,$$

car en vertu de la fonctorialité de α et β, on a

$$r_{a_i} D(p_i)\alpha_a = r_{a_i}\alpha_{a_i} p_i = p_i \quad \text{et} \quad r_{a_i} D(p_i)\beta_a = r_{a_i}\beta_{a_i}, \quad i = 1, 2.$$

La fonctorialité de α' et β' résulte de celle de α et β. □

Corollaire 3.7. *Soit A une petite catégorie admettant un décalage scindable. S'il existe un segment séparant asphérique de $\widehat{A}$, alors A est une catégorie test stricte.*

Démonstration. Le corollaire résulte aussitôt des propositions 2.8 et 3.6. □

Proposition 3.8. *Soient A, B deux petites catégories,*

$$1_A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} a_0\,, \qquad 1_B \xrightarrow{\gamma} E \xleftarrow{\delta} b_0$$

des décalages sur A et B respectivement, et $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de décalages. Si le décalage (γ, δ) est scindable, alors u est un foncteur asphérique.

Démonstration. Soit b un objet de B. Il s'agit de montrer que la catégorie A/b est asphérique, et pour cela, en vertu de la proposition 3.6, il suffit de construire un décalage sur A/b. Choisissons un scindage q (non nécessairement fonctoriel) du décalage scindable (γ, δ). On définit un décalage

$$1_{A/b} \xrightarrow{\alpha'} D' \xleftarrow{\beta'} a'_0$$

sur la catégorie A/b comme suit. L'objet a'_0 de A/b est défini par $a'_0 = (a_0,\ q_b\delta_b)$.

$$u(a_0) = b_0 \xrightarrow{\delta_b} E(b) \xrightarrow{q_b} b$$

Le foncteur $D' : A/b \longrightarrow A/b$ est défini en posant, pour tout objet $(a, g : u(a) \longrightarrow b)$ de A/b,

$$D'(a,g) = (D(a), q_bE(g)), \qquad u(D(a)) = E(u(a)) \xrightarrow{E(g)} E(b) \xrightarrow{q_b} b,$$

et pour toute flèche $f : (a, g) \longrightarrow (a', g')$ de A/b, $D'(f) = D(f)$. Les morphismes de foncteurs α' et β' sont définis par

$$\alpha'_{(a,g)} = \alpha_a, \qquad \beta'_{(a,g)} = \beta_a, \qquad (a,g) \in \mathsf{Ob}(A/b),$$

qui sont bien des morphismes de A/b

$$(a,g) \xrightarrow{\alpha_a} D'(a,g) = \big(D(a),\ q_bE(g)\big) \xleftarrow{\beta_a} (a_0,\ q_b\delta_b),$$

car le fait que u soit un morphisme de décalages, et la fonctorialité de γ et δ impliquent les égalités

$$q_bE(g)u(\alpha_a) = q_bE(g)\gamma_{u(a)} = q_b\gamma_b g = g,$$
$$q_bE(g)u(\beta_a) = q_bE(g)\delta_{u(a)} = q_b\delta_b.$$

La fonctorialité de α' et β' résulte de celle de α et β, ce qui achève la preuve. □

3.9. Soit A une catégorie. On rappelle qu'un *crible* U de A est une sous-catégorie pleine de A telle que pour toute flèche $a \longrightarrow a'$ de A, si a' est dans U, alors il en est de même de a. La notion de *cocrible* est définie de façon duale. Pour tout crible U de A, on note $A - U$ la sous-catégorie pleine de A définie par $\mathsf{Ob}(A - U) = \mathsf{Ob}\ A - \mathsf{Ob}\ U$, et on vérifie aussitôt que $A - U$ est un cocrible de A. Cette convention permet d'énoncer le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate.

Lemme 3.10. *Soient A une catégorie, U un crible de A, et $u : U \longrightarrow C$ un foncteur dont le but est une catégorie admettant un objet final e_C. Alors il existe un unique foncteur $v : A \longrightarrow C$ tel que $v\,|\,U = u$ et tel que $v\,|\,A - U$ soit le foncteur constant de valeur e_C.*

Proposition 3.11. *Une petite catégorie admettant un décalage séparant est une catégorie test faible.*

Démonstration. Soit A une petite catégorie admettant un décalage séparant

$$1_A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} a_0.$$

En vertu de la proposition 2.4, pour montrer que la catégorie A est une catégorie test faible, il suffit de prouver que pour toute petite catégorie C admettant un objet final e_C, la catégorie $A/i^*_A(C)$ est asphérique, et pour cela il suffit de montrer qu'elle admet un décalage (3.6). On définit un foncteur $D_C : A/i^*_A(C) \longrightarrow A/i^*_A(C)$ comme suit. Soit $(a,\ p : A/a \longrightarrow C)$ un objet de $A/i^*_A(C)$. Comme $\alpha_a : a \longrightarrow D(a)$ est un monomorphisme, le foncteur $A/\alpha_a : A/a \longrightarrow A/D(a)$, induit par α_a, identifie A/a à un crible de $A/D(a)$, et il résulte du lemme 3.10 que le foncteur $p : A/a \longrightarrow C$ se prolonge en un foncteur unique $\overline{p} : A/D(a) \longrightarrow C$, induisant p sur le crible A/a, et le foncteur constant de valeur l'objet final e_C de C sur le cocrible complémentaire. On pose $D_C(a, p) = (D(a), \overline{p})$. Soit

$$(a,\ p : A/a \longrightarrow C) \xrightarrow{\ f\ } (a',\ p' : A/a' \longrightarrow C)$$

un morphisme de $A/i^*_A(C)$, autrement dit, une flèche $f : a \longrightarrow a'$ de A telle que le triangle

$$\begin{tikzcd} A/a \arrow[rr, "A/f"] \arrow[dr, "p"'] & & A/a' \arrow[dl, "p'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Il résulte aussitôt de la fonctorialité de α et de la condition (ii′), 3.3, que le triangle

$$\begin{tikzcd}
A/D(a) \arrow[rr, "A/D(f)"] \arrow[dr, "\overline{p}"'] & & A/D(a') \arrow[dl, "\overline{p'}"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

est commutatif, autrement dit que la flèche $D(f) : (D(a), \overline{p}) \longrightarrow (D(a'), \overline{p'})$ est un morphisme de la catégorie $A/i_A^*(C)$. On pose $D_C(f) = D(f)$, définissant ainsi un foncteur $D_C : A/i_A^*(C) \longrightarrow A/i_A^*(C)$. Comme par construction, pour tout objet (a, p) de $A/i_A^*(C)$, le triangle

$$\begin{tikzcd}
A/a \arrow[rr, "A/\alpha_a"] \arrow[dr, "p"'] & & A/D(a) \arrow[dl, "\overline{p}"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

est commutatif, le morphisme de foncteurs α induit un morphisme de foncteurs $\alpha_C : 1_{A/i_A^*(C)} \longrightarrow D_C$. Enfin, la condition (iii), 3.3, implique que pour tout objet (a, p) de $A/i_A^*(C)$, le triangle

$$\begin{tikzcd}
A/a_0 \arrow[rr, "A/\beta_a"] \arrow[dr, "e_C"'] & & A/D(a) \arrow[dl, "\overline{p}"] \\
& C &
\end{tikzcd},$$

où $e_C : A/a_0 \longrightarrow C$ désigne aussi le foncteur constant de valeur e_C, est commutatif, ce qui implique que le morphisme de foncteurs $\beta : a_0 \longrightarrow D$ induit un morphisme de foncteurs $\beta_C : (a_0, e_C) \longrightarrow D_C$, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 3.12. *Une petite catégorie admettant un décalage à la fois séparant et scindable est une catégorie test stricte.*

Démonstration. Le corollaire est conséquence immédiate des propositions 2.8, 3.6 et 3.11. □

Corollaire 3.13. *Soit A une petite catégorie admettant un décalage à la fois séparant et scindable. Alors la catégorie $\widehat{A}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée, à engendrement cofibrant, propre, dont les cofibrations sont les monomorphismes et dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W})$* (cf. 2.2)*. De plus, le produit cartésien de deux équivalences faibles est une équivalence faible.*

Démonstration. Le corollaire est conséquence directe du théorème 2.10 et du corollaire précédent. □

Exemple 3.14. On rappelle que la catégorie Δ des simplexes est la sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles ordonnés dont les objets sont les ensembles

$$\Delta_m = \{0, 1, \ldots, m\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

ordonnés par l'ordre naturel, de sorte que les ensembles simpliciaux soient les préfaisceaux sur Δ. Soit $D : \Delta \longrightarrow \Delta$ le foncteur défini en posant pour tout $m, m \in \mathbb{N}$,

$$D(\Delta_m) = \Delta_{m+1},$$

et en définissant pour toute application croissante $\varphi : \Delta_m \longrightarrow \Delta_n$, $D(\varphi)$ par

$$D(\varphi)(k) = \begin{cases} \varphi(k), & 0 \leqslant k \leqslant m, \\ n+1, & k = m+1. \end{cases}$$

L'inclusion naturelle

$$\Delta_m \hookrightarrow \Delta_{m+1}, \qquad k \longmapsto k, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

définit un morphisme fonctoriel $\alpha : 1_\Delta \longrightarrow D$, et l'application

$$\Delta_0 \longrightarrow \Delta_{m+1}, \qquad 0 \longmapsto m+1,$$

un morphisme fonctoriel β de l'endofoncteur constant de Δ, de valeur Δ_0, vers D. On obtient ainsi un décalage de centre Δ_0

$$1_\Delta \xrightarrow{\ \alpha\ } D \xleftarrow{\ \beta\ } \Delta_0 .$$

Ce décalage est scindable. En effet, pour tout entier $m \geqslant 0$, l'application croissante $r_m : \Delta_{m+1} \longrightarrow \Delta_m$ définie par

$$r_m(k) = \begin{cases} k, & 0 \leqslant k \leqslant m, \\ m, & k = m+1, \end{cases}$$

est une rétraction (non fonctorielle) de α_{Δ_m}. Comme il est facile de vérifier que ce décalage est également séparant, le corollaire 3.12 fournit une nouvelle preuve du fait que Δ est une catégorie test stricte (*cf.* [9, section 36], ou [13, proposition 1.6.13, exemple 1.7.18]).

Exemple 3.15. On note Δ' la sous-catégorie de la catégorie Δ des simplexes, ayant mêmes objets que Δ, et comme flèches les monomorphismes de Δ, autrement dit, les applications *strictement* croissantes. Le foncteur $D : \Delta \longrightarrow \Delta$ de l'exemple précédent induit par restriction un foncteur $D' : \Delta' \longrightarrow \Delta'$, et les morphismes de foncteurs α, β des morphismes de foncteurs

$$1_{\Delta'} \xrightarrow{\alpha'} D' \xleftarrow{\beta'} \Delta_0 \ .$$

On vérifie aussitôt que le décalage ainsi défini sur Δ' est un décalage séparant, et la proposition 3.11 fournit une nouvelle preuve du fait que Δ' est une catégorie test faible (*cf.* [9, section 98], ou [13, proposition 1.7.25 et remarque 1.7.26]). En revanche, on remarque que les rétractions r_m ne sont pas des morphismes de Δ', et que le décalage induit n'est pas scindable. L'inclusion $\Delta' \hookrightarrow \Delta$ est un morphisme de décalages de $(\Delta', \Delta_0, D', \alpha', \beta')$ vers $(\Delta, \Delta_0, D, \alpha, \beta)$. En particulier, la proposition 3.8 implique que cette inclusion est un foncteur asphérique.

Exemple 3.16. Soit A la sous-catégorie pleine de celle des ensembles ordonnés, et applications croissantes, dont le seul objet est l'ensemble ordonné $\mathbb{N}$ des entiers naturels. En d'autres termes, A est le monoïde des applications croissantes $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, considéré comme catégorie à un seul objet. On définit un décalage scindé sur A

$$\begin{tikzcd} 1_A \arrow[r, "\alpha"] & D \arrow[l, bend left, "r"] & a_0 \arrow[l, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

comme suit. Le foncteur D est défini en posant pour toute application croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$D(\varphi)(i) = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ \varphi(i-1)+1, & i \geqslant 1. \end{cases}$$

Le morphisme de foncteurs α, qui est tout simplement une application croissante $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, est défini par $\alpha(i) = i+1$, $i \geqslant 0$. L'objet a_0 est l'unique objet $a_0 = \mathbb{N}$ de A, et le morphisme β est l'application constante de valeur 0. Enfin, le scindage r est défini par

$$r(i) = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ i-1, & i \geqslant 1. \end{cases}$$

On vérifie aussitôt que ce décalage est séparant. Le corollaire 3.12 implique alors que la catégorie A est une catégorie test stricte. En particulier, la catégorie des ensembles munis d'une action à droite du monoïde des applications croissantes $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ modélise les types d'homotopie!

Exemple 3.17. Pour toute catégorie C, on note $C^\star$ la catégorie obtenue de C par adjonction formelle d'un objet final. On remarque que C s'identifie à un crible de $C^\star$, et que si C a déjà un objet final, ce dernier n'est plus un objet final de $C^\star$. Soit A une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) la catégorie ponctuelle e est dans A ;
(ii) pour tout objet a de A, la catégorie $a^\star$ est dans A.

Soit $D : A \longrightarrow A$ le foncteur défini en posant pour tout objet a de A, $D(a) = a^\star$, et en définissant pour tout morphisme $f : a \longrightarrow a'$ de A, $D(f)$ comme étant le foncteur envoyant l'objet final de $D(a)$ sur l'objet final de $D(a')$ et induisant f sur le crible de $D(a)$ défini par l'inclusion $a \hookrightarrow D(a)$. On note α_a cette inclusion, et $\beta_a : e \longrightarrow D(a)$ le foncteur défini par l'objet final de $D(a)$. On définit ainsi un décalage sur A, de centre la catégorie ponctuelle e,

$$1_A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} e \,,$$

où e désigne aussi l'endofoncteur constant de A de valeur e. On vérifie aussitôt que ce décalage est cartésien, et qu'il est séparant si la catégorie vide n'est pas dans A. En particulier, la catégorie A est alors, en vertu de la proposition 3.11, une catégorie test faible. Si tout objet de A admet un objet final, alors ce décalage est scindable. En effet, en vertu du lemme 3.10, pour tout objet a de A, le morphisme identique de a se prolonge alors en une rétraction $D(a) \longrightarrow a$ de l'inclusion $a \hookrightarrow D(a)$, envoyant l'objet final de $D(a)$ sur un objet final de a. Ainsi, le corollaire 3.12 implique que sous ces hypothèses, A est une catégorie test strict. On remarque que cet exemple généralise l'exemple 3.14.

Exemple 3.18. Soit A une catégorie ayant un objet *initial* a_0. Alors

$$\begin{tikzcd} 1_A \arrow[r, "1_{1_A}"] & 1_A \arrow[l, bend left, "1_{1_A}"] & a_0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

est un décalage scindé cartésien (mais pas séparant) sur A, de centre l'objet initial de A. En particulier, il résulte de la proposition 3.6 que la catégorie A est totalement asphérique. D'ailleurs, ce dernier résultat est *a priori* évident, puisque pour tout couple d'objets $a_1,\ a_2$ de A, l'objet initial de A induit un objet initial de $A/_{a_1 \times a_2}$, et par suite cette catégorie est asphérique. En revanche, une telle catégorie A n'est *jamais* une catégorie test, ni même une catégorie test faible. En effet, soit $L_A = i_A^*(\Delta_1)$ *l'objet de Lawvere* de $\widehat{A}$ (*cf.* [13, 1.5.5]). Pour tout objet a de A, l'ensemble $L_A(a)$ est formé des sous-objets X du préfaisceau représentable représenté par a, et comme a_0 est un objet initial de A, un tel sous-objet est non vide si et seulement si l'ensemble $X(a_0)$ est non vide. On en déduit facilement que

$$\begin{aligned} a \longmapsto\ & \{\text{sous-objets non vides du préfaisceau représentable } a\} \\ \simeq\ & \{\text{cribles non vides de la catégorie } A/a\} \\ =\ & \{\text{cribles de la catégorie } A/a \text{ contenant l'objet } (a_0, a_0 \longrightarrow a)\} \end{aligned}$$

définit un sous-préfaisceau de L_A, et que le préfaisceau L_A est somme disjointe de ce sous-préfaisceau et du sous-préfaisceau défini par les sous-objets vides, ce qui prouve que L_A n'est pas connexe. En particulier, le préfaisceau $L_A = i_A^*(\Delta_1)$ n'est pas asphérique, et il résulte de la proposition 2.4 que A n'est *pas* une catégorie test faible.

3.19. Soit m un entier, $m \geqslant 0$. On note $\mathscr{P}_m$ l'ensemble des parties de l'ensemble

$$\Gamma_m = \{1, 2, \dots, m\} \qquad (\Gamma_m = \varnothing \text{ si } m = 0)$$

(y compris la partie pleine et la partie vide). On rappelle que la *catégorie de Segal* Γ est la catégorie dont les objets sont les ensembles Γ_m, $m \geqslant 0$, un morphisme $\Gamma_m \longrightarrow \Gamma_n$ étant une application $\varphi : \Gamma_m \longrightarrow \mathscr{P}_n$ telle que pour tout couple i, i', $1 \leqslant i < i' \leqslant m$, on ait $\varphi(i) \cap \varphi(i') = \varnothing$. Le composé de deux morphismes composables

$$\Gamma_m \xrightarrow{\varphi} \Gamma_n \xrightarrow{\psi} \Gamma_r$$

de Γ est défini par

$$(\psi \circ \varphi)(i) = \bigcup_{j \in \varphi(i)} \psi(j), \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

On remarque que Γ_0 est un objet *nul* (à la fois initial et final) de Γ. La catégorie Γ est équivalente à la catégorie opposée à celle des ensembles finis pointés, et plus précisément, isomorphe à la catégorie opposée de celle dont les objets sont les ensembles $\{0, 1, \dots, m\}$, $m \geqslant 0$, et les morphismes les applications envoyant 0 sur 0. À une telle application

$$\{0, 1, \dots, n\} \xrightarrow{f} \{0, 1, \dots, m\},$$

on associe le morphisme $\Gamma_m \longrightarrow \Gamma_n$ de Γ, défini par $i \longmapsto f^{-1}(i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, et à un morphisme $\varphi : \Gamma_m \longrightarrow \Gamma_n$ de Γ, on associe l'application $f : \{0, \dots, n\} \longrightarrow \{0, \dots, m\}$, définie par

$$f(j) = \begin{cases} i, & \text{si } j \in \varphi(i), \\ 0, & \text{si } j \notin \displaystyle\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} \varphi(i). \end{cases}$$

Exemple 3.20. L'objet Γ_0 de la catégorie de Segal Γ étant en particulier un objet initial, cette catégorie admet un décalage scindé «évident» (exemple 3.18). Mais elle admet aussi un décalage scindé non trivial, également centré sur Γ_0,

$$\begin{tikzcd} 1_\Gamma \arrow[r, "\gamma"] & E \arrow[l, bend left, "r"] & \Gamma_0 , \arrow[l] \end{tikzcd}$$

défini comme suit. Le foncteur $E : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ est défini en posant pour tout m, $m \in \mathbb{N}$,

$$E(\Gamma_m) = \Gamma_{m+1},$$

et en définissant pour tout morphisme $g : \Gamma_m \longrightarrow \Gamma_n$ de Γ, $E(g)$ par

$$E(g)(k) = \begin{cases} g(k), & 0 \leqslant k \leqslant m, \\ \{n+1\}, & k = m+1. \end{cases}$$

Pour tout entier $m \geqslant 0$, les morphismes

$$\begin{tikzcd} \Gamma_m \arrow[r, "\gamma_{\Gamma_m}"] & E(\Gamma_m) \arrow[l, bend left, "r_m"] \end{tikzcd}$$

sont définis par

$$\gamma_{\Gamma_m}(k) = \{k\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$
$$r_m(k) = \begin{cases} \{k\}, & 0 \leqslant k \leqslant m, \\ \varnothing, & k = m+1. \end{cases}$$

On remarque que dans cet exemple la rétraction r est fonctorielle, et on vérifie facilement que le décalage ainsi défini est cartésien (mais pas séparant).

4. Produits en couronnes et la catégorie cellulaire

4.1. Soient A une catégorie, et $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur. Le *produit en couronnes* $F \int A$, noté parfois $B \int A$, quand il n'y a aucune ambiguïté sur le foncteur F, est la catégorie dont les objets sont les couples $[\,b;\,(a_1,\ldots,a_m)\,]$, où b est un objet de B tel que $F(b) = \Gamma_m$, et $(a_1,\ldots,a_m)$ un m-uplet d'objets de A. Un morphisme

$$[\,b;\,(a_1,\ldots,a_m)\,] \longrightarrow [\,b';\,(a'_1,\ldots,a'_{m'})\,]$$

est un couple $[\,g;\,\mathbf{f}\,]$, où $g : b \longrightarrow b'$ est un morphisme de B, et

$$\mathbf{f} = (f_{i'i} : a_i \longrightarrow a_{i'})_{1\leqslant i\leqslant m,\, i'\in F(g)(i)}$$

une famille de morphismes de A. Si

$$[\,b;\,(a_1,\ldots,a_m)\,] \xrightarrow{[g;\mathbf{f}]} [\,b';\,(a'_1,\ldots,a'_{m'})\,] \xrightarrow{[g';\mathbf{f}']} [\,b'';\,(a''_1,\ldots,a''_{m''})\,]$$

est un couple de morphismes composables,

$$\mathbf{f} = (f_{i'i})_{1\leqslant i\leqslant m,\, i'\in F(g)(i)}, \qquad \mathbf{f}' = (f'_{i''i'})_{1\leqslant i'\leqslant m',\, i''\in F(g')(i')},$$

le composé

$$[\,g'';\,\mathbf{f}''\,] := [\,g';\,\mathbf{f}'\,] \circ [\,g;\,\mathbf{f}\,]$$

est défini par

$$g'' = g'g, \qquad \mathbf{f}'' = (f''_{i''i})_{1\leqslant i\leqslant m,\, i''\in F(g'')(i)},$$

où $f''_{i''i} = f'_{i''i'}f_{i'i}$, i' étant l'unique entier dans $F(g)(i)$ tel que $i'' \in F(g')(i')$.

On remarque que si A est la catégorie ponctuelle e, alors le produit en couronnes $B \int e$ est canoniquement isomorphe à la catégorie B.

4.2. La construction du produit en couronnes est fonctorielle : Soient A, A' et B des petites catégories, et

$$A' \xrightarrow{G} A\,, \qquad B' \xrightarrow{H} B \xrightarrow{F} \Gamma$$

des foncteurs. On en déduit un foncteur

$$K = H \textstyle\int G \,:\, B' \int A' = FH \int A' \longrightarrow F \int A = B \int A\,,$$

en posant

$$K[\,b;\,(a_1,\ldots,a_m)\,] = [\,H(b);\,(G(a_1),\ldots,G(a_m))\,], \quad [\,b;\,(a_1,\ldots,a_m)\,] \in \mathsf{Ob}\big(B' \textstyle\int A'\big),$$

et

$$K[\,g;\ \mathbf{f} = (f_{ji})_{i,j}\,] = [\,H(g);\ G(\mathbf{f}) = (G(f_{ji}))_{i,j}\,], \quad [\,g;\,\mathbf{f}\,] \in \mathsf{Fl}\big(B' \textstyle\int A'\big).$$

Si les foncteurs G et H sont fidèles (resp. pleinement fidèles), alors il en est de même du foncteur $H \int G$.

En particulier, soit a un objet de A, et notons aussi $a : e \longrightarrow A$ le foncteur de la catégorie ponctuelle vers A, défini par cet objet. On en déduit un foncteur fidèle

$$I_a = 1_B \textstyle\int a : B \int e \simeq B \longrightarrow B \int A\,,$$

qui est pleinement fidèle si a est un objet *rigide* de A (n'admettant pas d'autre endomorphisme que l'identité). Explicitement, pour tout objet b de B tel que $f(b) = \Gamma_m$,

$$I_a(b) = [\,b;\,(\underbrace{a, a, \dots, a}_{m \text{ fois}})\,],$$

et pour tout morphisme $g : b \longrightarrow b'$ de B tel que $F(b) = \Gamma_m$ et $F(b') = \Gamma_{m'}$,

$$I_a(g) : [\,b;\,(\underbrace{a, a, \dots, a}_{m \text{ fois}})\,] \longrightarrow [\,b';\,(\underbrace{a, a, \dots, a}_{m' \text{ fois}})\,]$$

est défini par

$$I_a(g) = [\,g;\,(1_a)_{1\leqslant i\leqslant m,\, i'\in F(g)(i)}\,].$$

4.3. Soient B une petite catégorie, b un objet de B, et $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur. En vertu de ce qui précède, le foncteur $b : e \longrightarrow B$ définit un foncteur fidèle

$$I_b : B \longrightarrow B\textstyle\int B,$$

d'où, par fonctorialité du produit en couronnes, un foncteur

$$1_B \textstyle\int I_b : B\int B \longrightarrow B\int\big(B\int B\big),$$

et par suite, un foncteur

$$1_B \textstyle\int\big(1_B\int I_b\big) : B\int\big(B\int B\big) \longrightarrow B\int\Big(B\int\big(B\int B\big)\Big),$$

et ainsi de suite. De façon plus précise, on définit une suite de catégories B_n, $n \geqslant 0$, par

$$B_0 = e = \text{catégorie ponctuelle}\,,$$

$$B_{n+1} = B\textstyle\int B_n,$$

et une suite de foncteurs $I_n : B_n \longrightarrow B_{n+1}$, $n \geqslant 0$, par

$$I_0 = b : e \longrightarrow B, \quad \text{foncteur défini par l'objet } b \text{ de } B\,,$$

$$I_{n+1} = 1_B\textstyle\int I_n.$$

On obtient ainsi une tour de catégories

$$B_0 = e \xrightarrow{I_0=b} B_1 = B \xrightarrow{I_1=I_b} B_2 = B\textstyle\int B \xrightarrow{I_2} \cdots \xrightarrow{I_{n-1}} B_n \xrightarrow{I_n} B_{n+1} \xrightarrow{I_{n+1}} \cdots.$$

Le *produit en couronnes infini*, défini par la catégorie pointée (B, b) (et le foncteur $F : B \longrightarrow \Gamma$), est la catégorie limite inductive

$$\mathsf{C}(B, b) := \mathsf{C}(B, b, F) := B_\infty := \varinjlim B_n.$$

La fonctorialité du produit en couronnes implique que cette construction est fonctorielle. Si $H : (B', b') \longrightarrow (B, b)$ est un morphisme de catégories pointées (un foncteur $H : B' \longrightarrow B$ tel que $H(b') = b$), on en déduit un foncteur

$$\mathsf{C}(H) : \mathsf{C}(B', b') = \mathsf{C}(B', b', FH) \longrightarrow \mathsf{C}(B, b).$$

Si le foncteur H est fidèle (resp. pleinement fidèle), il en est de même du foncteur $\mathsf{C}(H)$.

Exemple 4.4. On définit un foncteur $F : \Delta \longrightarrow \Gamma$ par

$$F(\Delta_m) = \Gamma_m, \quad m \geqslant 0,$$
$$F(\varphi)(i) = \{j \mid \varphi(i-1) < j \leqslant \varphi(i)\}, \quad \varphi : \Delta_m \longrightarrow \Delta_n \in \mathsf{Fl}(\Delta), \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

On pose

$$\Theta = \mathsf{C}(\Delta, \Delta_0) = \mathsf{C}(\Delta, \Delta_0, F).$$

Il résulte des considérations développées dans [4,5] que cette catégorie coïncide avec la *catégorie cellulaire* introduite par Joyal dans [11].

L'inclusion $\Delta' \hookrightarrow \Delta$ induit un foncteur $F' = F|\Delta' : \Delta' \longrightarrow \Gamma$, d'où une catégorie

$$\Theta' = \mathsf{C}(\Delta', \Delta_0) = \mathsf{C}(\Delta', \Delta_0, F'),$$

et un foncteur fidèle $\Theta' \longrightarrow \Theta$. En vertu de la définition des produits en couronnes infinis, on a un diagramme commutatif de foncteurs fidèles

$$\begin{tikzcd} \Theta'_0 \arrow[r] \arrow[d] & \Theta'_1 \arrow[r] \arrow[d] & \Theta'_2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \Theta'_n \arrow[r] \arrow[d] & \Theta'_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \Theta_0 \arrow[r] & \Theta_1 \arrow[r] & \Theta_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Theta_n \arrow[r] & \Theta_{n+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} ,$$

avec $\Theta'_0 = \Theta_0 = e$ la catégorie ponctuelle, $\Theta'_1 = \Delta'$, $\Theta_1 = \Delta$, et

$$\Theta'_{n+1} = \Delta' \textstyle\int \Theta'_n, \quad \Theta_{n+1} = \Delta \textstyle\int \Theta_n, \quad n \geqslant 0,$$
$$\Theta' = \varinjlim \Theta'_n, \qquad \Theta = \varinjlim \Theta_n.$$

Comme Δ_0 est un objet rigide, aussi bien de Δ' que de Δ, les flèches horizontales sont des foncteurs pleinement fidèles, et les catégories Θ'_n (resp. Θ_n) s'identifient à des sous-catégories pleines de Θ' (resp. de Θ).

5. Produits en couronnes et décalages

5.1. Soient B une petite catégorie, et $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur. On dit qu'un décalage

$$1_B \xrightarrow{\beta} L \xleftarrow{\beta'} b_0$$

sur la catégorie B est *adapté* au foncteur F, ou plus simplement, quand il n'y a aucune ambiguïté sur le foncteur F, qu'il est un *Γ-décalage*, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $F(b_0) = \Gamma_0$;
(ii) pour tout objet b de B tel que $F(b) = \Gamma_m$, on a $FL(b) = \Gamma_{m+1}$, et pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m$, $F(\beta_b)(i) = \{i\}$.

On dit qu'il est *strictement adapté* au foncteur F, ou qu'il est un *Γ-décalage strict*, si de plus la condition suivante est satisfaite :

(iii) pour tout couple d'objets b, b' de B tels que $F(b) = \Gamma_m$ et $F(b') = \Gamma_{m'}$, et toute flèche $g : b \longrightarrow b'$ de B, on a $m' + 1 \in FL(g)(m + 1)$.

Si le foncteur F est un morphisme de décalages, du décalage $\mathcal{L} = (B, b_0, L, \beta, \beta')$ sur B vers le décalage sur la catégorie Γ défini dans l'exemple 3.20, alors le décalage $\mathcal{L}$ est strictement adapté au foncteur F (mais la réciproque n'est pas vraie en général ; voir exemple ci-dessous). En particulier, le décalage de l'exemple 3.20 est strictement adapté au foncteur identique de Γ.

Exemple 5.2. Les décalages des exemples 3.14 et 3.15 sur Δ et Δ' sont strictement adaptés respectivement aux foncteurs $F : \Delta \longrightarrow \Gamma$ et $F' : \Delta' \longrightarrow \Gamma$ de l'exemple 4.4. En revanche, les foncteurs F et F' ne sont *pas* des morphismes de décalages, de ces décalages vers le décalage sur Γ de l'exemple 3.20.

Lemme 5.3. *Soient B une petite catégorie, $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur, et*

$$1_B \xrightarrow{\beta} L \xleftarrow{\beta'} b_0 \quad ,$$

un Γ-décalage sur la catégorie B. Si $g : b \longrightarrow b'$ est une flèche de B et si $F(b) = \Gamma_m$, alors pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m$, on a $FL(g)(i) = F(g)(i)$. De plus, si $(q_b : L(b) \longrightarrow b)_{b \in \mathrm{Ob}(B)}$ est un scindage du décalage (β, β'), et b un objet de B tel que $F(b) = \Gamma_m$, alors pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m$, on a $F(q_b)(i) = \{i\}$ et $F(q_b)(m + 1) = \varnothing$.

Démonstration. Soit $g : b \longrightarrow b'$ une flèche de B telle que $F(b) = \Gamma_m$, $F(b') = \Gamma_{m'}$. En vertu de la fonctorialité de β, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} F(b) \arrow[r, "F(\beta_b)"] \arrow[d, "F(g)"'] & FL(b) \arrow[d, "FL(g)"] \\ F(b') \arrow[r, "F(\beta_{b'})"'] & FL(b') \end{tikzcd} ,$$

et comme (β, β') est un Γ-décalage, on a

$$F(\beta_b)(i) = \{i\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad \text{et} \quad F(\beta_{b'})(i') = \{i'\}, \quad 1 \leqslant i' \leqslant m'.$$

On en déduit que pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m$, on a

$$\big(FL(g) \circ F(\beta_b)\big)(i) = \bigcup_{i' \in F(\beta_b)(i)} FL(g)(i') = FL(g)(i),$$

$$\big(F(\beta_{b'}) \circ F(g)\big)(i) = \bigcup_{i' \in F(g)(i)} F(\beta_{b'})(i') = F(g)(i),$$

d'où $FL(g)(i) = F(g)(i)$.

Soient maintenant $(q_b : L(b) \longrightarrow b)_{b \in \mathrm{Ob}(B)}$ un scindage du décalage (β, β'), et b un objet de B tel que $F(b) = \Gamma_m$. Comme (β, β') est un Γ-décalage, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m$, on a $F(\beta_b)(i) = \{i\}$, et la relation $q_b\beta_b = 1_b$ implique que

$$\{i\} = F(q_b\beta_b)(i) = \bigcup_{j \in F(\beta_b)(i)} F(q_b)(j) = F(q_b)(i),$$

ce qui implique en particulier que $F(q_b)(m+1) = \varnothing$ (puisque par définition des morphismes de Γ, les ensembles $F(q_b)(j)$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, sont deux à deux disjoints). $\square$

Proposition 5.4. *Soient A, A', B des petites catégories, $I : A' \longrightarrow A$ et $F : B \longrightarrow \Gamma$ des foncteurs, $C = B\int A$, $C' = B\int A'$, et*

$$I \xrightarrow{\ \alpha\ } K \xleftarrow{\ \alpha'\ } a_0 \quad (\text{resp.} \quad 1_B \xrightarrow{\ \beta\ } L \xleftarrow{\ \beta'\ } b_0)$$

un décalage sur le foncteur I (resp. *un Γ-décalage sur la catégorie B*). *Alors il existe un unique décalage sur le foncteur $J = 1_B\int I : C' \longrightarrow C$*

$$J \xrightarrow{\ \gamma\ } M \xleftarrow{\ \gamma'\ } [\,b_0;\,(\,)\,]$$

(où $(\,)$ désigne l'unique «0-uplet» d'objets de A) *tel que pour tout objet $[\,b;\,(a_1,\ldots,a_m)\,]$ de C', on ait*

$$M[\,b;\,(a_1,\ldots,a_m)\,] = [\,L(b);\,(K(a_1),\ldots,K(a_m),a_0)\,], \tag{5.4.1}$$
$$\gamma_{[\,b;(a_1,\ldots,a_m)\,]} = [\,\beta_b;\,(\alpha_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant m}\,], \tag{5.4.2}$$
$$\gamma'_{[\,b;(a_1,\ldots,a_m)\,]} = [\,\beta'_b;\,(\,)\,], \tag{5.4.3}$$

et pour toute flèche

$$[\,b;\,(a_1,\ldots,a_m)\,] \xrightarrow{[g;\mathbf{f}]} [\,b';\,(a'_1,\ldots,a'_{m'})\,], \quad g : b \longrightarrow b', \quad \mathbf{f} = (f_{i'i} : a_i \longrightarrow a'_{i'})_{1\leqslant i\leqslant m,\ i'\in F(g)(i)}$$

de C', on ait

$$M[\,g;\mathbf{f}\,] = [\,g';\mathbf{f}'\,], \quad g' = L(g), \quad \mathbf{f}' = (f'_{i'i})_{1\leqslant i\leqslant m+1,\ i'\in FL(g)(i)}, \tag{5.4.4}$$

où pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, et tout i', $i' \in FL(g)(i)$,

$$f'_{i'i} = \begin{cases} K(f_{i'i}), & si\ \ i \leqslant m, \\ \alpha'_{a'_{i'}}, & si\ \ i = m+1\ \ et\ \ i' \neq m'+1, \\ 1_{a_0}, & si\ \ i = m+1\ \ et\ \ i' = m'+1. \end{cases} \tag{5.4.5}$$

De plus, si les décalages (α,α') et (β,β') admettent des scindages p et q respectivement, alors le décalage (γ,γ') admet un scindage r défini en posant, pour tout objet $[\,b;\,(a_1,\ldots,a_m)\,]$ de C',

$$r_{[\,b;(a_1,\ldots,a_m)\,]} = [\,q_b;\,(p_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant m}\,]. \tag{5.4.6}$$

Enfin, si le décalage (α,α') est cartésien, et si (β,β') est un Γ-décalage strict *et s'il est séparant, alors le décalage (γ,γ') est séparant.*

Démonstration. (a) **Définition du foncteur *M*.** Pour tout objet $[\,b;\,(a_1,\ldots,a_m)\,]$ de C', on définit $M[\,b;\,(a_1,\ldots,a_m)\,]$ par l'égalité (5.4.1). Soit

$$[\,g;\mathbf{f}\,] : [\,b;\,(a_1,\ldots,a_m)\,] \longrightarrow [\,b';\,(a'_1,\ldots,a'_{m'})\,]$$

un morphisme de C', où $g : b \longrightarrow b'$ est une flèche de B, $F(b) = \Gamma_m$, $F(b') = \Gamma_{m'}$, et

$$\mathbf{f} = (f_{i'i} : a_i \longrightarrow a'_{i'})_{1\leqslant i\leqslant m,\ i'\in F(g)(i)}$$

est une famille de flèches de A'. Vérifions que les formules (5.4.4) et (5.4.5) définissent bien un morphisme $M[\,g;\mathbf{f}\,]$ de C. En vertu de la première partie du lemme précédent, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m$, on a $FL(g)(i) = F(g)(i)$, et par suite, on peut définir un morphisme

$$\begin{array}{ccccc} M[\,g;\mathbf{f}\,] & : & M[\,b;\,(a_1,\ldots,a_m)\,] & \longrightarrow & M[\,b';\,(a'_1,\ldots,a'_{m'})\,] \\ \| & & \| & & \| \\ [\,g';\mathbf{f}'\,] & : & [\,L(b);\,(K(a_1),\ldots,K(a_m),a_0)\,] & \longrightarrow & [\,L(b');\,(K(a'_1),\ldots,K(a'_{m'}),a_0)\,], \end{array}$$

en posant $g' = L(g) : L(b) \longrightarrow L(b')$ et en définissant

$$\mathbf{f}' = (f'_{i'i})_{1 \leqslant i \leqslant m+1,\ i' \in F(g')(i) = FL(g)(i)},$$

comme suit. Pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant m$, et $i' \in FL(g)(i) = F(g)(i)$, on pose

$$f'_{i'i} = K(f_{i'i}) : K(a_i) \longrightarrow K(a'_{i'}),$$

et pour $i = m+1$, $i' \in FL(g)(m+1)$, on pose

$$f'_{i',m+1} = \alpha'_{a'_{i'}} : a_0 \longrightarrow K(a'_{i'}), \quad \text{si } i' \neq m'+1,$$

et

$$f'_{i',m+1} = 1_{a_0} : a_0 \longrightarrow a_0, \qquad \text{si } i' = m'+1,$$

(chacun de ces deux cas pouvant se présenter ou pas). La compatibilité de M aux unités est évidente, et sa compatibilité à la composition résulte de celle de K et L, et de la fonctorialité de α'. Cela achève la définition du foncteur $M : C' \longrightarrow C$.
(b) **Définition du morphisme de foncteurs $\boldsymbol{\gamma}$.** Comme (β, β') est un Γ-décalage, la condition (ii) de la définition d'un tel décalage implique aussitôt que pour tout objet $[\,b;\, (a_1, \ldots, a_m)\,]$ de C', la formule (5.4.2) définit un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{[\,b;(a_1,\ldots,a_m)\,]} : J[\,b;\, (a_1, \ldots, a_m)\,] & \longrightarrow & M[\,b;\, (a_1, \ldots, a_m)\,] \\ \| & & \| \\ [\,b;\, (I(a_1), \ldots, I(a_m))\,] & \longrightarrow & [\,L(b);\, (K(a_1), \ldots, K(a_m), a_0)\,] \end{array}$$

de C, et la fonctorialité de α et β implique immédiatement celle de γ.
(c) **Définition du morphisme de foncteurs $\boldsymbol{\gamma'}$.** Comme (β, β') est un Γ-décalage, on a $F(b_0) = \Gamma_0$, et par suite $[\,b_0;\, (\,)\,]$ est un objet de C, et la formule (5.4.3) définit un morphisme

$$\gamma'_{[\,b;(a_1,\ldots,a_m)\,]} : [\,b_0;\, (\,)\,] \longrightarrow M[\,b;\, (a_1, \ldots, a_m)\,] = [\,L(b);\, (K(a_1), \ldots, K(a_m), a_0)\,]$$

de C. La fonctorialité de β' implique aussitôt celle de γ'.
(d) **Le cas scindé.** Soient maintenant p et q des scindages des décalages (α, α') et (β, β') respectivement, et $[\,b;\, (a_1, \ldots, a_m)\,]$ un objet de C'. En vertu de la deuxième partie du lemme précédent, la formule (5.4.6) définit un morphisme

$$\begin{array}{ccc} r_{[\,b;(a_1,\ldots,a_m)\,]} : M[\,b;\, (a_1, \ldots, a_m)\,] & \longrightarrow & J[\,b;\, (a_1, \ldots, a_m)\,] \\ \| & & \| \\ [\,L(b);\, (K(a_1), \ldots, K(a_m), a_0)\,] & \longrightarrow & [\,b;\, (I(a_1), \ldots, I(a_m))\,] \end{array}$$

de C, et il est alors immédiat que ce morphisme est une rétraction de $\gamma_{[\,b;(a_1,\ldots,a_m)\,]}$.
(e) **Le cas séparant.** Il reste à montrer que si le décalage (α, α') est cartésien, et si (β, β') est un Γ-décalage *strict* et séparant, alors le décalage (γ, γ') est séparant.
(i) Soit $[\,b;\, (a_1, \ldots, a_m)\,]$ un objet de C'. Montrons que

$$\gamma_{[\,b;(a_1,\ldots,a_m)\,]} : [\,b;\, (I(a_1), \ldots, I(a_m))\,] \longrightarrow [\,L(b);\, (K(a_1), \ldots, K(a_m), a_0)\,]$$

est un monomorphisme de C. Pour toute flèche

$$[\,t;\, \mathbf{s} = (s_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n,\ i \in F(t)(j)}\,] : [\,y;\, (x_1, \ldots, x_n)\,] \longrightarrow [\,b;\, (I(a_1), \ldots, I(a_m))\,]$$

de but $[\,b;\, (I(a_1), \ldots, I(a_m))\,]$ de C, on a

$$\gamma_{[\,b;(a_1,\ldots,a_m)\,]}[\,t;\, \mathbf{s}\,] = [\,\beta_b t;\, (\alpha_{a_i} s_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n,\ i \in F(t)(j)}\,].$$

Comme par hypothèse les flèches β_b et α_{a_i}, $1 \leqslant i \leqslant m$, sont des monomorphismes, il en est de même de $\gamma_{[\,b;(a_1,\ldots,a_m)\,]}$.
(ii) Soit $[\,g;\, \mathbf{f} = (f_{i'i})_{1 \leqslant i \leqslant m,\ i' \in F(g)(i)}\,] : [\,b;\, (a_1, \ldots, a_m)\,] \longrightarrow [\,b';\, (a'_1, \ldots, a'_{m'})\,]$ une flèche de C'. Montrons que le carré

$$\begin{array}{ccc} [\,b;\, (I(a_1), \ldots, I(a_m))\,] & \xrightarrow{\gamma_{[\,b;(a_1,\ldots,a_m)\,]}} & [\,L(b);\, (K(a_1), \ldots, K(a_m), a_0)\,] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle J[g;\mathbf{f}]} & & \Big\downarrow{\scriptstyle M[g;\mathbf{f}]} \\ [\,b';\, (I(a'_1), \ldots, I(a'_{m'}))\,] & \xrightarrow[\gamma_{[\,b';(a'_1,\ldots,a'_{m'})\,]}]{} & [\,L(b');\, (K(a'_1), \ldots, K(a'_{m'}), a_0)\,] \end{array}$$

est un carré cartésien de C. Soient donc

$$[\,l;\, \mathbf{k} = (k_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n,\ i \in F(l)(j)}\,] : [\,y;\, (x_1, \ldots, x_n)\,] \longrightarrow [\,L(b);\, (K(a_1), \ldots, K(a_m), a_0)\,],$$
$$[\,t';\, \mathbf{s}' = (s'_{i'j})_{1 \leqslant j \leqslant n,\ i' \in F(t')(j)}\,] : [\,y;\, (x_1, \ldots, x_n)\,] \longrightarrow [\,b';\, (I(a'_1), \ldots, I(a'_{m'}))\,]$$

deux flèches de C telles que

$$M[g; \mathbf{f}] \circ [l; \mathbf{k}] = \gamma_{[b'; (a'_1, \ldots, a'_{m'})]} \circ [t'; \mathbf{s}']. \tag{5.4.7}$$

Cette égalité implique en particulier que

$$L(g)l = \beta_{b'} t', \tag{5.4.8}$$

d'où $FL(g)F(l) = F(\beta_{b'})F(t')$. Comme (β, β') est un Γ-décalage, la condition (ii) de la définition de cette notion implique donc que pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$\bigcup_{i \in F(l)(j)} FL(g)(i) = F(t')(j).$$

En particulier, comme (β, β') est un Γ-décalage *strict*, on en déduit que

$$m + 1 \notin \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant n} F(l)(j).$$

L'égalité (5.4.7) implique donc que pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant n$, tout $i \in F(l)(j)$, et tout $i' \in FL(g)(i)$ $(= F(g)(i)$ par le lemme 5.3), on a $i' \in F(t')(j)$ et

$$K(f_{i'i})k_{ij} = \alpha_{a'_{i'}} s'_{i'j}. \tag{5.4.9}$$

Comme le décalage (β, β') est séparant, et en particulier cartésien, l'égalité (5.4.8) implique l'existence d'un morphisme unique $t : y \longrightarrow b$ de B tel que

$$l = \beta_b t \quad \text{et} \quad t' = gt. \tag{5.4.10}$$

La première de ces deux égalités implique alors que $F(\beta_b)F(t) = F(l)$, et par suite, comme (β, β') est un Γ-décalage, que pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant n$, $F(t)(j) = F(l)(j)$. Ainsi, comme le décalage (α, α') est cartésien, pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant n$, tout $i \in F(t)(j) = F(l)(j)$, et tout $i' \in F(g)(i) = FL(g)(i)$, l'égalité (5.4.9) implique l'existence d'un morphisme unique $s_{i'ij} : x_j \longrightarrow I(a_i)$ de A tel que

$$k_{ij} = \alpha_{a_i} s_{i'ij} \quad \text{et} \quad s'_{i'j} = I(f_{i'i}) s_{i'ij}. \tag{5.4.11}$$

Comme α_{a_i} est un monomorphisme, la première de ces deux égalités implique que le morphisme $s_{i'ij}$ est indépendant de $i' \in F(g)(i)$, et on pose donc $s_{ij} = s_{i'ij}$. On définit ainsi un morphisme

$$[t; \mathbf{s} = (s_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n,\, i \in F(t)(j)}] : [y; (x_1, \ldots, x_n)] \longrightarrow [b; (I(a_1), \ldots, I(a_m))]$$

de C, qui en vertu des égalités (5.4.10) et (5.4.11), satisfait aux relations

$$[l; \mathbf{k}] = \gamma_{[b; (a_1, \ldots, a_m)]}[t; \mathbf{s}] \quad \text{et} \quad [t'; \mathbf{s}'] = J[g; \mathbf{f}] \circ [t; \mathbf{s}],$$

ce qui prouve l'assertion. La vérification de la dernière propriété d'un décalage séparant étant immédiate, ceci achève la démonstration de la proposition. □

Remarque 5.5. On vérifie aussitôt que le décalage (γ, γ') défini dans la proposition précédente dépend fonctoriellement des décalages (α, α') et (β, β') en un sens facile à préciser.

Corollaire 5.6. *Soient A et B deux petites catégories, et $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur.*

(a) *Si A admet un décalage et B un Γ-décalage, alors $B \int A$ admet un décalage.*
(b) *Si A admet un décalage, B un Γ-décalage, et si ces deux décalages sont scindables, alors $B \int A$ admet un décalage scindable.*
(c) *Si A admet un décalage cartésien et B un Γ-décalage strict et séparant, alors $B \int A$ admet un décalage séparant.*

Démonstration. Le corollaire est conséquence immédiate de la proposition précédente appliquée à $A' = A$, et à $I = 1_A$, l'endofoncteur identique de A. □

Corollaire 5.7. *Soient A et B deux petites catégories, et $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur.*

(a) *Si A admet un décalage et B un Γ-décalage, alors $B \int A$ est une catégorie asphérique.*
(b) *Si A admet un décalage, B un Γ-décalage, et si ces deux décalages sont scindables, alors $B \int A$ est une catégorie totalement asphérique.*
(c) *Si A admet un décalage cartésien et B un Γ-décalage strict et séparant, alors $B \int A$ est une catégorie test faible.*
(d) *Si A admet un décalage cartésien, B un Γ-décalage strict et séparant, et si ces deux décalages sont scindables, alors $B \int A$ est une catégorie test stricte.*

Démonstration. Ce corollaire résulte aussitôt du corollaire précédent, des propositions 3.6, 3.11, et du corollaire 3.12. □

Exemple 5.8. Le corollaire 5.6 implique aussitôt par récurrence que comme Δ admet un Γ-décalage strict séparant et scindable (exemples 3.14 et 5.2), pour tout entier $n \geqslant 1$, la catégorie Θ_n de l'exemple 4.4 admet un décalage séparant et scindable, et est donc en vertu du corollaire 3.12, une catégorie test stricte. De même, comme Δ' admet un Γ-décalage strict séparant (exemples 3.15 et 5.2), pour tout entier $n \geqslant 1$, la catégorie Θ'_n de l'exemple 4.4 admet un décalage séparant, et est donc en vertu de la proposition 3.11, une catégorie test faible. De plus, en vertu de la proposition 3.8 et de la remarque 5.5, l'inclusion $\Theta'_n \longrightarrow \Theta_n$ (exemple 4.4) est un foncteur asphérique.

Exemple 5.9. Soit A une catégorie admettant un objet initial. Alors le produit en couronnes $\Delta \int A$ est une catégorie test stricte. En effet, la catégorie Δ admet un Γ-décalage strict séparant et scindable (exemples 3.14 et 5.2), et A un décalage cartésien (exemple 3.18). L'assertion résulte donc du corollaire 5.7 (d). De même, comme Δ' admet un Γ-décalage strict séparant (exemples 3.15 et 5.2), le corollaire 5.7 (c) implique que $\Delta' \int A$ est une catégorie test faible.

Proposition 5.10. *Soient B une petite catégorie, $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur, et b_0 un objet de B.*

(a) *Si B admet un Γ-décalage, centré sur b_0, alors le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ admet un décalage.*
(b) *Si B admet un Γ-décalage scindable, centré sur b_0, alors le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ admet un décalage scindable.*
(c) *Si B admet un Γ-décalage strict séparant, centré sur b_0, alors le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ admet un décalage séparant.*

Démonstration. Considérons la tour de catégories

$$A_0 = e \xrightarrow{I_0 = b_0} A_1 = B \xrightarrow{I_1 = I_{b_0}} A_2 = B \textstyle\int B \xrightarrow{I_2} \cdots \xrightarrow{I_{n-1}} A_n \xrightarrow{I_n} A_{n+1} \xrightarrow{I_{n+1}} \cdots$$

(où $A_{n+1} = B \int A_n$, $I_{n+1} = 1_B \int I_n$, $n \geqslant 0$) définissant le produit en couronnes infini

$$A = \mathsf{C}(B, b_0) = \varinjlim A_n,$$

et soit

$$1_B \xrightarrow{\beta} L \xleftarrow{\beta'} b_0$$

un Γ-décalage sur B. On définit par récurrence une suite de décalages sur les foncteurs I_n, $n \geqslant 0$,

$$\mathcal{D}_n = \quad I_n \xrightarrow{\alpha_n} K_n \xleftarrow{\alpha'_n} e_n$$

(où $K_n : A_n \longrightarrow A_{n+1}$ est un foncteur, e_n un objet de A_{n+1}, considéré comme foncteur constant $A_n \longrightarrow A_{n+1}$, et α_n et α'_n des morphismes de foncteurs) comme suit :

$$\mathcal{D}_0 = \quad b_0 \xrightarrow{\beta_{b_0}} L(b_0) \xleftarrow{\beta'_{b_0}} b_0 \ ,$$

et pour tout $n \geqslant 0$, le décalage $\mathcal{D}_{n+1}$ sur $I_{n+1} = 1_B \int I_n$ est obtenu du Γ-décalage donné sur B, et du décalage $\mathcal{D}_n$ sur I_n, par le procédé de la proposition 5.4. Un calcul direct montre par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, le couple (I_n, I_{n+1}) est un morphisme de décalages généralisés de $\mathcal{D}_n$ vers $\mathcal{D}_{n+1}$. On obtient ainsi un système inductif de décalages généralisés, et par passage à la limite, on déduit un décalage sur le foncteur $\varinjlim I_n : \varinjlim A_n \longrightarrow \varinjlim A_{n+1}$, qui n'est autre que le foncteur identique de $A = \varinjlim A_n = \mathsf{C}(B, b_0)$. On obtient ainsi un décalage sur $\mathsf{C}(B, b_0)$, ce qui prouve déjà l'assertion (a) de la proposition.

Si le décalage donné sur B admet un scindage $r = (r_b : L(b) \longrightarrow b)_{b \in B}$, ce scindage induit un scindage r_{b_0} du décalage généralisé $\mathcal{D}_0$

$$\begin{tikzcd} b_0 \arrow[r, "\beta_{b_0}"] & L(b_0) \arrow[l, bend left, "r_{b_0}"] & b_0 \arrow[l, "\beta'_{b_0}"'] \end{tikzcd} ,$$

et le procédé de la proposition 5.4 permet de définir, par récurrence, des scindages sur les décalages $\mathcal{D}_n$. On vérifie alors facilement que les couples (I_n, I_{n+1}) sont des morphismes de décalages généralisés scindés, d'où par passage à la limite, un scindage du décalage sur $\mathsf{C}(B, b_0)$, ce qui prouve l'assertion (b). Enfin, si le décalage donné sur B est un Γ-décalage strict séparant, il résulte de la proposition 5.4 que les décalages $\mathcal{D}_n$ sont séparants. La stabilité des décalages séparants par limites inductives filtrantes implique alors que le décalage sur $\mathsf{C}(B, b_0)$ l'est également, ce qui démontre la dernière assertion de la proposition. □

Corollaire 5.11. *Soient B une petite catégorie, $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur, et b_0 un objet de B.*

(a) *Si B admet un Γ-décalage, centré sur b_0, alors le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ est une catégorie asphérique.*
(b) *Si B admet un Γ-décalage scindable, centré sur b_0, alors le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ est un catégorie totalement asphérique.*

(c) *Si B admet un Γ-décalage strict séparant, centré sur b_0, alors le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ est une catégorie test faible.*
(d) *Si B admet un Γ-décalage strict séparant et scindable, centré sur b_0, alors le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ est une catégorie test stricte.*

Démonstration. Ce corollaire résulte de la proposition précédente, des propositions 3.6, 3.11, et du corollaire 3.12. □

Exemple 5.12. Comme la catégorie Δ admet un Γ-décalage strict séparant et scindable, centré sur Δ_0 (exemples 3.14 et 5.2), il résulte du corollaire précédent que la catégorie Θ (exemple 4.4) est une catégorie test stricte. De même, comme la catégorie Δ' admet un Γ-décalage strict séparant, centré sur Δ_0 (exemples 3.15 et 5.2), il résulte du corollaire précédent que la catégorie Θ' (exemple 4.4) est une catégorie test faible. D'ailleurs, la proposition 5.10 implique que les catégories Θ et Θ' admettent des décalages séparants, celui sur Θ étant même scindable, et grâce à la fonctorialité des constructions (*cf.* remarque 5.5) l'inclusion $\Theta' \longrightarrow \Theta$ est un morphisme de décalages. Il résulte donc de la proposition 3.8 que cette inclusion est un foncteur asphérique.

Proposition 5.13. *La catégorie $\widehat{\Theta}$ des ensembles cellulaires, préfaisceaux sur Θ, admet une structure de catégorie de modèles fermée, à engendrement cofibrant, propre, dont les cofibrations sont les monomorphismes et dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_{\widehat{\Theta}} = i_{\Theta}^{-1}(\mathcal{W})$ (cf. 2.2). De plus, le produit cartésien de deux équivalences faibles est une équivalence faible.*

Démonstration. Comme en vertu de l'exemple précédent Θ est une catégorie test stricte, la proposition est un cas particulier du théorème 2.10. □

Remarque 5.14. Il est facile de prouver que la catégorie Θ est une catégorie squelettique régulière au sens de [6, définition 8.2.3] (pour une définition équivalente plus directe, voir [16, 6.4]). La proposition précédente permet ainsi de retrouver de façon purement combinatoire la structure de catégorie de modèles fermée que Clemens Berger construit dans [4, théorème 3.9], à l'aide de méthodes topologiques (la description explicite d'un ensemble générateur des cofibrations triviales pouvant être obtenu à l'aide de [6, théorème 8.2.18]). Cela illustre la force des méthodes issues de la théorie des catégories test, initiée par Grothendieck.

Exemple 5.15. Une catégorie *directe finie* est une catégorie C dont le nerf est un ensemble simplicial *fini*, autrement dit, ayant un nombre fini de simplexes non dégénérés. De façon équivalente, cela signifie que le graphe orienté ayant comme sommets les objets de C, et comme arêtes les flèches non identiques de C, est fini et n'a pas de cycles orientés, ou encore que la catégorie libre engendrée par ce graphe est finie. On peut alors définir une fonction *dimension* $\lambda_C : \mathsf{Ob}(C) \longrightarrow \mathbb{N}$ comme suit. Pour tout objet c de C, $\lambda_C(c)$ est le plus grand entier n tel qu'il existe un n-simplexe non dégénéré du nerf de C (autrement dit une suite composable de n flèches non identiques de C)

$$c_0 \longrightarrow c_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow c_n$$

tel que $c = c_n$. On vérifie facilement que pour toute flèche non identique $c \longrightarrow c'$ de C, on a $\lambda_C(c) < \lambda_C(c')$. Si la catégorie C est non vide, on désigne par m_C l'entier naturel $m_C = \max\{\lambda_C(c) \mid c \in \mathsf{Ob}(C)\}$, et on remarque que l'application λ_C induit alors une surjection $\mathsf{Ob}(C) \longrightarrow \Delta_{m_C}$, et définit un foncteur noté aussi $\lambda_C : C \longrightarrow \Delta_{m_C}$.

Soient A une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée de catégories directes finies non vides, et A' la sous-catégorie de A ayant mêmes objets que A, et dont les flèches sont les morphismes $f : a \longrightarrow a'$ de A satisfaisant à la condition suivante :

(H) Si x, y sont deux objets de a tels que $\lambda_a(x) = \lambda_a(y)$, alors $\lambda_{a'}(f(x)) = \lambda_{a'}(f(y))$.

La condition (H) implique aussitôt que pour toute flèche $f : a \longrightarrow a'$ de A', il existe un unique morphisme $\bar{f} : \Delta_{m_a} \longrightarrow \Delta_{m_{a'}}$ de Δ tel que le carré suivant de foncteurs

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda_a"'] & a' \arrow[d, "\lambda_{a'}"] \\ \Delta_{m_a} \arrow[r, "\bar{f}"'] & \Delta_{m_{a'}} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On en déduit un foncteur

$$A' \longrightarrow \Delta, \qquad a \longmapsto \Delta_{m_a}, \quad f \longmapsto \bar{f},$$

et en composant avec le foncteur $\Delta \longrightarrow \Gamma$ de l'exemple 4.4, on obtient un foncteur $A' \longrightarrow \Gamma$. Pour tout objet $a_0 \in \mathsf{Ob}(A') = \mathsf{Ob}(A)$, on peut donc considérer le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(A', a_0)$.

Supposons maintenant que la catégorie A satisfait aussi aux conditions (i) et (ii) de l'exemple 3.17, et considérons le décalage sur A,

$$1_A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} e\,,$$

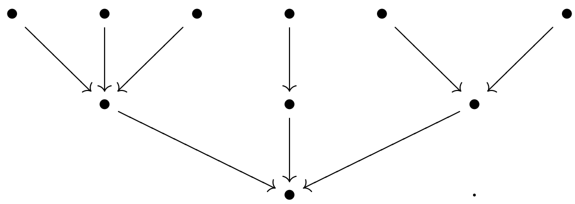
défini dans cet exemple, qui est séparant puisque A est formée de catégories non vides. Pour tout objet a de A, α_a et β_a satisfont à la condition (H), et si $f : a \longrightarrow a'$ est une flèche de A satisfaisant à cette condition, il en est de même de $D(f)$, et par suite le décalage (α, β) sur A induit un décalage séparant,

$$1_{A'} \xrightarrow{\alpha'} D' \xleftarrow{\beta'} e\,,$$

sur A'. En particulier, il résulte de la proposition 3.11 que A' est une catégorie test faible. D'autre part, le foncteur $A' \longrightarrow \Delta$, défini ci-dessus, est un morphisme de décalages du décalage (α', β') sur A' vers le décalage de l'exemple 3.14 sur Δ. Comme ce dernier est un Γ-décalage strict (*cf.* exemple 5.2), on en déduit facilement qu'il en est de même de (α', β'), et par suite, en vertu du corollaire 5.11 (c), le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(A', e)$ est une catégorie test faible.

Enfin, supposons de plus que tout objet de A admet un objet final. Alors, conformément à l'exemple 3.17, le décalage (α, β) est scindable, et on remarque que la rétraction de α_a, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, définie dans cet exemple satisfait à la condition (H). On en déduit que le décalage (α', β') sur A' est également scindable, et par suite A', et le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(A', e)$ sont des catégories test strictes (corollaires 3.12 et 5.11 (d)).

Un exemple remarquable de catégorie A satisfaisant à toutes les conditions ci-dessus est la catégorie A_0, définie comme suit. On dit qu'une sous-catégorie pleine A de $\mathcal{C}at$ formée de catégories directes finies est *stable par regroupement familial* si pour toute famille finie $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, $m \geqslant 0$, d'objets de A, telle que $m_{a_i} = m_{a_{i'}}$, pour $1 \leqslant i, i' \leqslant m$, la catégorie $(\amalg_{1 \leqslant i \leqslant m} a_i)^\star$ est encore dans A. La catégorie A_0 est la plus petite sous-catégorie pleine de la catégorie des catégories directes finies, stable par regroupement familial. Les objets de A_0 sont les ensembles ordonnés correspondant aux arbres finis «bien taillés». Voici un exemple d'un tel ensemble ordonné



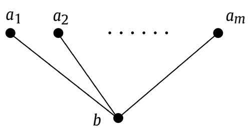
.

Les morphismes de A_0 sont les applications croissantes entre ces ensembles ordonnés. La catégorie A'_0 a les mêmes objets que A_0, et comme morphismes les applications croissantes envoyant les sommets de «même hauteur» sur des sommets de même hauteur.

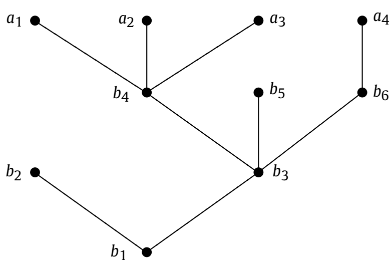
6. Description combinatoire du produit en couronnes infini

Cette section, plus heuristique, esquisse une description combinatoire du produit en couronnes, du produit en couronnes infini, ainsi que des décalages des propositions 5.4 et 5.10.

6.1. Soient A une catégorie, et $F : B \longrightarrow \Gamma$ un foncteur. On représente un objet $[\,b; (a_1, \ldots, a_m)\,]$ du produit en couronnes $B \int A$ par l'arbre planaire de hauteur au plus un avec m «branches»



dont les «feuilles» sont décorées par les objets $a_1, \ldots, a_m$ de A, et la «racine» par l'objet b de B, et qui est réduit à sa simple racine si $m = 0$. Plus généralement, si on définit par récurrence les catégories produit en couronnes itéré B_n en posant $B_0 = A$, et pour $n > 0$, $B_n = B \int B_{n-1}$, les objets de B_n sont représentés par des arbres planaires de hauteur au plus n, dont les sommets de hauteur n sont décorés par des objets de A et les sommets de hauteur strictement plus petite par des objets b de B tels que si $F(b) = \Gamma_m$, alors il y a exactement m branches (le «tronc» n'étant pas considéré comme une branche) partant du sommet décoré par b. En particulier, si $m = 0$, ce sommet est un sommet maximal. On remarque que l'orientation du plan induit un ordre total sur les ensembles de sommets de même hauteur. Voici un exemple pour $n = 3$:



,

où $a_i \in \mathsf{Ob}(A)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, $b_j \in \mathsf{Ob}(B)$, $1 \leqslant j \leqslant 6$, et

$$F(b_2) = F(b_5) = \Gamma_0, \quad F(b_6) = \Gamma_1, \quad F(b_1) = \Gamma_2, \quad F(b_3) = F(b_4) = \Gamma_3.$$

Revenons au cas général. La description des morphismes est plus délicate. Soient X et X' deux arbres ainsi décorés. Les morphismes de B_n de source l'objet représenté par X et de but l'objet représenté par X' sont en bijection avec les couples $(E, \mathbf{g})$, où E est un ensemble de couples (s', s) formés d'un sommet s' de X' et d'un sommet s de X de *même hauteur*, et $\mathbf{g} = (g_{s's})_{(s',s)\in E}$ est une famille indexée par l'ensemble E, avec $g_{s's} : x_s \longrightarrow x'_{s'}$, où x_s (resp. $x'_{s'}$) est la décoration du sommet s (resp. s'), et $g_{s's}$ un morphisme de A ou de B, selon que la hauteur commune de s et s' est égale à n ou strictement inférieure, ces données étant assujetties aux deux conditions suivantes :

(i) le couple formé par la racine de X' et la racine de X appartient à l'ensemble E ;
(ii) pour tout couple $(s', s) \in E$, si la hauteur commune p de s et s' est strictement plus petite que n, et si $F(x_s) = \Gamma_m$ et $F(x'_{s'}) = \Gamma_{m'}$, alors pour tous i, i', $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant i' \leqslant m'$, on a l'équivalence

$$i' \in F(g_{s's})(i) \iff (s'_{i'}, s_i) \in E,$$

où s_i (resp. $s'_{i'}$) désigne le sommet de hauteur $p+1$, extrémité de la i-ème (resp. i'-ème) branche issue du sommet s (resp. s'), pour l'ordre induit par l'orientation du plan.

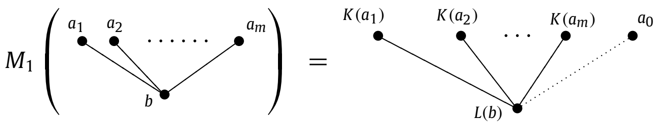
6.2. En gardant les notations du paragraphe précédent, supposons que

$$1_A \xrightarrow{\alpha} K \xleftarrow{\alpha'} a_0 \qquad (\text{resp. } 1_B \xrightarrow{\beta} L \xleftarrow{\beta'} b_0 \ )$$

soit un décalage (resp. un Γ-décalage) sur la catégorie A (resp. B), et soit

$$1_{B_1} \xrightarrow{\gamma_1} M_1 \xleftarrow{\gamma'_1} [\,b_0; (\,)\,]$$

le décalage sur $B_1 = B\int A$ obtenu en appliquant la construction de la proposition 5.4 au foncteur identique $I = 1_A$ de A. Alors on a



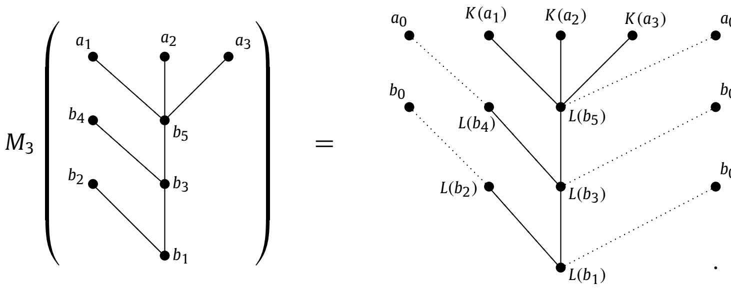
(le tracé en pointillé de la dernière branche étant purement pictural, et n'ayant pas une signification mathématique particulière) et

$$[\,b_0; (\,)\,] \quad = \quad \overset{b_0}{\bullet}.$$

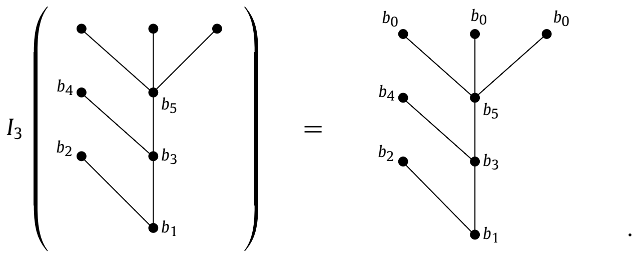
Soit maintenant

$$1_{B_n} \xrightarrow{\gamma_n} M_n \xleftarrow{\gamma'_n} [\,b_0; (\,)\,]$$

le décalage sur B_n obtenu par itération de cette construction. Si X est l'arbre décoré associé à un objet de B_n, alors l'arbre décoré correspondant à l'image de cet objet par le foncteur de décalage M_n, noté aussi $M_n(X)$, est obtenu comme suit. On forme d'abord l'arbre décoré X' obtenu de X en remplaçant les décorations des sommets de hauteur n (qui sont des objets de A) par leurs images par le décalage K, et celles des sommets de hauteur strictement plus petite (qui sont des objets de B) par leurs images par le décalage L. Alors $M_n(X)$ s'obtient de X' en ajoutant à chaque sommet de hauteur strictement plus petite que n une nouvelle branche, à droite de toutes les autres issues de ce sommet, dont on décore l'autre extrémité par a_0 si elle est de hauteur n, par b_0 sinon. Voici un exemple pour $n = 3$:



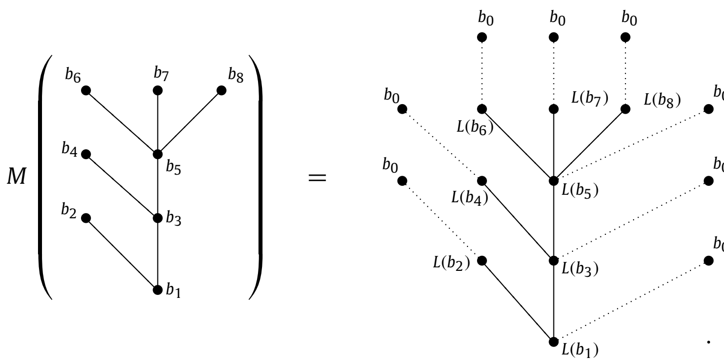
6.3. En gardant toujours les notations du paragraphe 6.1, on suppose désormais que la catégorie A est la catégorie ponctuelle. Dans ce cas, les sommets de hauteur n d'un arbre décoré représentant un objet de B_n n'ont plus besoin d'être décorés, puisqu'il n'y a aucune ambiguïté sur l'objet de A qui les décore. De plus, dans ce cas, le choix d'un objet b_0 de B définit, conformément au paragraphe 4.3, pour tout n, $n \geqslant 0$, un foncteur fidèle (pleinement si b_0 est un objet rigide de B) $I_n : B_n \longrightarrow B_{n+1}$. Si X est un arbre décoré représentant un objet de B_n, l'arbre décoré représentant l'image dans B_{n+1} de cet objet par le foncteur I_n est obtenu de X en décorant tous les sommets (non décorés) de hauteur n par b_0, et en laissant les décorations des autres sommets inchangées. Par exemple, pour $n = 3$,



Ainsi, par passage à la limite inductive, les objets du produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$ sont en bijection avec les arbres finis de hauteur arbitraire, dont *tous* les sommets sont décorés par des objets de B, avec la seule restriction que si un sommet est décoré par un objet b de B tel que $F(b) = \Gamma_m$, alors il y a exactement m branches partant de ce sommet. Soit maintenant

$$1_B \xrightarrow{\beta} L \xleftarrow{\beta'} b_0$$

un Γ-décalage sur B, de centre b_0. Conformément à la preuve de la proposition 5.10, en itérant la construction de la proposition 5.4 et en passant à la limite inductive, on en déduit un décalage M sur le produit en couronnes infini $\mathsf{C}(B, b_0)$. Si X est un arbre décoré représentant un objet de $\mathsf{C}(B, b_0)$, l'arbre décoré représentant l'image de cet objet par le foncteur M est obtenu en remplaçant les décorations des sommets de X par leurs images par le décalage L, et en ajoutant à chaque sommet de X une nouvelle branche, à droite de toutes les autres issues de ce sommet, dont on décore l'autre extrémité par b_0. Voici un exemple pour $n = 3$:



References

[1] D. Ara, Sur les ∞-groupoïdes de Grothendieck, thèse, sous la direction de G. Maltsiniotis, 2010.
[2] M.A. Batanin, Monoidal globular categories as natural environment for the theory of weak n-categories, Adv. Math. 136 (1998) 39–103.
[3] M.A. Batanin, R. Street, The universal property of the multitude of trees, J. Pure Appl. Alg. 154 (2000) 3–13.
[4] C. Berger, A cellular nerve for higher categories, Adv. Math. 169 (2002) 118–175.
[5] C. Berger, Iterated wreath product of the simplex category and iterated loop spaces, Adv. Math. 213 (2007) 230–270.
[6] D.-C. Cisinski, Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie, in: Astérisque, vol. 308, Soc. Math., France, 2006.
[7] D.-C. Cisinski, Batanin higher groupoids and homotopy types, Contemp. Math. 431 (2007) 171–186.
[8] A. Grothendieck, Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. III. Préschemas quotients, Séminaire Bourbaki, 13e année, 1960/61, no. 212, Février 1961.
[9] A. Grothendieck, Pursuing stacks, Manuscript, 1983, à paraître dans *Documents Mathématiques*.
[10] L. Illusie, Complexe cotangent et déformations I, II, in: Lecture Notes in Mathematics, vol. 239 et 283, Springer-Verlag, 1971–1972.
[11] A. Joyal, Disks, duality and Θ-categories, Prépublication, 1997.
[12] M. Makkai, M. Zawadowsky, Duality for simple ω-categories and disks, Theory Appl. Categ. 8 (2001) 114–243.
[13] G. Maltsiniotis, La théorie de l'homotopie de Grothendieck, in: Astérisque, vol. 301, Soc. Math, France, 2005.
[14] G. Maltsiniotis, Infini groupoïdes d'après Grothendieck, Prépublication, 2007, www.math.jussieu.fr/~maltsin.
[15] G. Maltsiniotis, Infini catégories non strictes, une nouvelle définition, Prépublication, 2007, www.math.jussieu.fr/~maltsin.
[16] G. Maltsiniotis, La catégorie cubique avec connexions est une catégorie test stricte, Homology, Homotopy Appl. 11 (2) (2009) 309–326.
[17] D. Quillen, Higher algebraic K-theory: I, in: Algebraic K-theory I, in: Lecture Notes in Mathematics, vol. 341, Springer-Verlag, 1973, pp. 85–147.
[18] C. Rezk, A cartesian presentation of weak n-categories, Geom. Topol. 14 (2010) 21–571.
[19] R. Steiner, Simple omega-categories and chain complexes, Homology, Homotopy Appl. 9 (2007) 451–465.