

Algèbre homotopique
et catégories supérieures
(Notes du cours donné au printemps 2003)
D.-C. Cisinski

Rappels sur les préfaisceaux	11
Ensembles simpliciaux	17
Filtration cellulaire	23
Définition des ∞ -catégories	33
La construction de Boardman-Vogt	39
Catégories de modèles	47
Construction de catégories de modèles	65
Extensions anodines fondamentales	85
Propriétés élémentaires des fibrations de Kan	97
Opérations de recollement	101
∞ -catégories de foncteurs	113
Limites homotopiques	125
Propriété	138
Fibrations de Kan fibre à fibre	141
Caractérisation locale des équivalences de ∞ -catégories	147

Joins épais	169
Objets initiaux	177
Limites projectives dans les ∞ -catégories	187
Préchamps	189
Localisation (version très succincte)	203

Algèbre homotopique et catégories supérieures.

La topologie algébrique étudie les correspondances de la forme

$$\{\text{objets géométriques}\} \longrightarrow \{\text{objets algébriques}\}$$

Exemple. L'homologie singulière définit un foncteur

$$\{\text{espaces topologiques}\} \longrightarrow \{\text{complexes de groupes abéliens}\}$$

$$X \longmapsto \mathbb{Z}(X)$$

Les groupes d'homologie du complexe $\mathbb{Z}(X)$ définissent les groupes d'homologie singulière de X

$$H_i(X) = H_i(X, \mathbb{Z}) := H_i(\mathbb{Z}(X)), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

On désire obtenir par ces correspondances des informations qualitatives sur les objets de la géométrie. On veut en particulier interpréter du côté algébrique les constructions et les opérations qui nous intéressent du point de vue géométrique.

Exemple. L'opération de recollement.

Soit $X = U \cup V$ un espace topologique recouvert par deux ouverts U et V . On a un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} U \cup V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & X \end{array}$$

Ce carré cocartésien donne lieu à un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}(U \cup V) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}(V) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(X) \end{array} ,$$

lequel permet d'obtenir la longue suite exacte de Mayer-Vietoris

$$\dots \rightarrow H_{i+1}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(U \cup V, \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(U, \mathbb{Z}) \oplus H_i(V, \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Exemple. La formule de Künneth.

Si X et Y sont deux espaces topologiques, on a

$$\mathbb{Z}(X \times Y) = \mathbb{Z}(X) \otimes \mathbb{Z}(Y)$$

d'où une suite exacte courte (recadrée)

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \rightarrow H_n(X \times Y) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} \text{Tor}_1(H_p(X), H_{q-1}(Y)) \rightarrow 0.$$

Les opérations de recollement et de produit sont des cas particuliers des notions catégoriques de limite projective et de limite inductive.

Rappel. Soit \mathcal{C} une catégorie. On considère une petite catégorie I (i.e. on demande que $\text{Ob}(I)$ et $\text{Fl}(I)$ soient des ensembles, et non des classes). On dispose alors de la catégorie $\underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C})$ des foncteurs $I \rightarrow \mathcal{C}$ (les morphismes sont les transformations naturelles).
On a alors un foncteur "diagramme constant"

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\longrightarrow \underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C}) \\ x &\longmapsto x_I = \text{le foncteur constant } I \rightarrow \mathcal{C} \\ &\quad \text{de valeur } x \end{aligned}$$

On dit que \mathcal{C} admet des limites inductives (resp. projectives) de type I si le foncteur ci-dessus admet un adjoint à gauche (resp. à droite), noté alors

$$\varinjlim_I : \underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

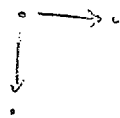
$$\text{(resp. } \varprojlim_I : \underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C} \text{)}.$$

Remarque: si $F: I \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur, on notera parfois

$$\varinjlim_I F = \varinjlim F = \varinjlim_{i \in I} F(i)$$

$$\varprojlim_I F = \varprojlim F = \varprojlim_{i \in I} F(i)$$

Exemple. soit I la catégorie librement engendrée par le graphe



Un foncteur $I \rightarrow \mathcal{C}$ est simplement un diagramme de \mathcal{C} de la forme

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \\ C & & \end{array}$$

$$\text{et } \varinjlim_I \left(\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \\ C & & \end{array} \right) = C \amalg_A B.$$

Par exemple, si $X = U \cup V$ est un espace topologique recouvert par des espaces topologiques ouverts U et V , alors

$$\lim_{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc} U \cup V & \longrightarrow & U \\ & \downarrow & \\ & V & \end{array} \right) = X$$

dans la catégorie des espaces topologiques.

La longue suite exacte de Mayer-Vietoris peut s'interpréter en disant que le foncteur homologie singulière commute aux limites inductives, et donc, en particulier, que

$$\lim_{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}(U \cup V) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(U) \\ & \downarrow & \\ & \mathbb{Z}(V) & \end{array} \right) \simeq \mathbb{Z}(X).$$

Sauf que cette interprétation est totalement fautive si on considère le foncteur homologie singulière comme allant de la catégorie des espaces topologiques vers celle des complexes de groupes abéliens. On peut aussi voir l'homologie singulière comme un foncteur

$$Ho(Top) \longrightarrow D(Ab),$$

où $Ho(Top)$ est la catégorie obtenue en inversant formellement les équivalences d'homotopie faible dans Top (c'est la catégorie des CW-complexes à homotopie près), et où $D(Ab)$ est la catégorie obtenue en inversant formellement les quasi-isomorphismes (appelée aussi la catégorie dérivée de la catégorie des groupes abéliens).

Le problème, dans cette seconde interprétation, c'est que les catégories $H_0(\text{Top})$ et $D(\text{Ab})$ n'admettent pas de limites inductives.

On peut cependant résoudre ce problème conceptuel de la manière suivante.

La théorie de l'homotopie des espaces topologiques permet de définir une ∞ -catégorie $\underline{H_0}(\text{Top})$, dont les objets sont les espaces topologiques, et une ∞ -catégorie $\underline{D}(\text{Ab})$, dont les objets sont les complexes de groupes abéliens, de sorte que l'homologie singulière définisse un " ∞ -foncteur"

$$\underline{Z}: \underline{H_0}(\text{Top}) \longrightarrow \underline{D}(\text{Ab})$$

qui commute aux limites inductives.

Les catégories homotopiques classiques $H_0(\text{Top})$ et $D(\text{Ab})$ peuvent être retrouvées canoniquement à partir de $\underline{H_0}(\text{Top})$ et de $\underline{D}(\text{Ab})$ respectivement. Elles en sont une version tronquée.

Le point de vue des ∞ -catégories trivialisé les problèmes posés par l'homologie singulière.

En effet, tout espace topologique X est équivalent dans $\underline{H_0}(\text{Top})$ à un espace topologique localement contractile (e.g. un CW-complexe).

Si X est localement contractile, notons $\mathcal{Q}(X)$ l'ensemble des ouverts contractiles de X , ordonné par l'inclusion.

On dispose alors d'un foncteur

$$\varphi_x : Q_c(x) \longrightarrow \text{Top}$$

$$U \longmapsto U$$

On a $\varinjlim \varphi_x \xrightarrow{\sim} X$ dans Top .

Théorème. $\varinjlim \varphi_x \xrightarrow{\sim} X$ dans $\underline{\text{Ho}}(\text{Top})$

(où $\varinjlim \varphi_x$ désigne la limite inductive du foncteur φ_x dans $\underline{\text{Ho}}(\text{Top})$ au sens des ∞ -catégories).

Mais pour $U \in Q_c(x)$, on a $U \simeq \text{pt}$ dans $\underline{\text{Ho}}(\text{Top})$.

Donc

Corollaire. $\varinjlim_{Q_c(x)} \text{pt} \simeq X$ dans $\underline{\text{Ho}}(\text{Top})$.

On déduit de ce corollaire toutes les propriétés fondamentales de l'homologie singulière.

Exemple. La formule de Künneth.

Soient X, Y deux espaces topologiques localement contractiles. On a alors dans $\underline{\text{Ho}}(\text{Top})$ ~~$\underline{\text{Ho}}(\text{Top})$~~ $\underline{D}(\mathcal{A}b)$

$$\mathbb{Z}(X) \otimes \mathbb{Z}(Y) \cong \mathbb{Z} \left(\varinjlim_{Q_c(X)} \text{pt} \right) \otimes \mathbb{Z} \left(\varinjlim_{Q_c(Y)} \text{pt} \right)$$

$$\cong \varinjlim_{Q_c(X)} \varinjlim_{Q_c(Y)} \mathbb{Z}(\text{pt}) \otimes \mathbb{Z}(\text{pt})$$

$$\cong \varinjlim_{Q_c(X)} \varinjlim_{Q_c(Y)} \mathbb{Z}(\text{pt}) \cong \varinjlim_{\text{Fubini } Q_c(X) \times Q_c(Y)} \mathbb{Z}(\text{pt})$$

$$\cong \varinjlim_{Q_c(X \times Y)} \mathbb{Z}(\text{pt}) \text{ car l'inclusion } Q_c(X) \times Q_c(Y) \hookrightarrow Q_c(X \times Y) \text{ est isomorphe}$$

$$\cong \mathbb{Z}(X \times Y).$$

Exemple: l'unicité de l'homologie singulière (Eilenberg-Steenrod)

$$\text{Si } E: H_0(\text{Top}) \rightarrow \underline{\mathcal{D}}(\text{Ab})$$

commute aux limites inductives, et si on se donne

$$\text{un isomorphisme } E(\text{pt}) \cong \mathbb{Z}(\text{pt}),$$

alors pour X localement contractile, on aura

$$E(X) \cong E\left(\varinjlim_{Q(X)} \text{pt}\right)$$

$$\cong \varinjlim_{Q(X)} E(\text{pt})$$

$$\cong \varinjlim_{Q(X)} \mathbb{Z}(\text{pt})$$

$$\cong \mathbb{Z}(X).$$

La théorie des ∞ -catégories est une extension de la théorie des catégories dans le sens suivant.

- 1) toutes les notions et constructions connues en théorie des catégories s'étendent au cas des ∞ -catégories. Par exemple, on dispose du produit $A \times B$ de deux ∞ -catégories, et d'un Hom interne $\underline{\text{Hom}}(A, B)$ (la ∞ -catégorie des foncteurs $A \rightarrow B$), on a la notion de foncteurs adjoints entre ∞ -catégories, etc.
- 2) Toute catégorie est une ∞ -catégorie, de sorte que la théorie des catégories habituelle est un cas particulier de la théorie des ∞ -catégories.

3) Les ∞ -groupoïdes : c'est-à-dire les ∞ -catégories dans lesquelles toutes les flèches sont inversibles sont des modèles pour le type d'homotopie : on a une équivalence de ∞ -catégories

$$\{\infty\text{-groupoïdes}\} \cong \underline{\text{Ho}}(\text{Top})$$

4) Les catégories de modèles au sens de Quillen définissent des ∞ -catégories admettant des limites inductives et projectives. Réciproquement, toute ∞ -catégorie admettant des limites inductives et projectives provient d'une catégorie de modèles.

Philosophie: en théorie des ∞ -catégories, tout repose sur la notion de ∞ -groupoïdes : la ∞ -catégorie des ∞ -groupoïdes joue le même rôle que la catégorie des ensembles en théorie des catégories.

Par exemple, si \mathcal{C} est une catégorie, et si x, y sont deux objets de \mathcal{C} , $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ est un ensemble.

Si \mathcal{C} est une ∞ -catégorie, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ est un ∞ -groupoïde.

Autre exemple : la catégorie des ensembles est la catégorie universelle qui contient le point et qui est stable par limites inductives. Autrement dit, si \mathcal{C} est une catégorie admettant des limites inductives, se donner un foncteur

$F: \text{Ens} \rightarrow \mathcal{C}$ commutant aux limites inductives revient au même que se donner un objet de \mathcal{C} :

$$F(E) = F\left(\coprod_E \text{pt}\right) = \coprod_E F(\text{pt}).$$

F est donc totalement déterminé par l'objet $F(\text{pt})$.

De manière analogue, si \mathcal{C} est une ∞ -catégorie admettant des limites inductives, se donner un foncteur

$F: \{\infty\text{-groupoïdes}\} \rightarrow \mathcal{C}$ commutant aux limites inductives

revient au même que se donner un objet de \mathcal{C} (c'est ce qui explique la formule de Künneth et l'unicité de l'homologie singuläre dans le cas $\mathcal{C} = \underline{D}(AB)$).

La théorie n'est pas cependant qu'une extension de la théorie des catégories.

Par exemple, la notion de ∞ -catégorie stable (i.e. de ∞ -catégorie dans laquelle les notions de carré cocartésien et de carré cartésien coïncident) : une catégorie au sens usuel est stable si et seulement si elle est triviale.

Un autre exemple : dans un ∞ -topos toute donnée de descente est effective.

Rappels sur les préfaisceaux

Soit A une petite catégorie.

Un préfaisceau sur A est un foncteur $F: A^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$.

On désigne par $\hat{A} = \underline{\mathrm{Hom}}(A^{op}, \mathbf{Ens})$ la catégorie des préfaisceaux (dont les morphismes sont les transformations naturelles).

Notation.

Si $F: A^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est un préfaisceau, et si $a \xrightarrow{f} a'$ est une flèche de A , on notera

$$f^*: F(a') \rightarrow F(a)$$

l'application induite.

On dispose d'un foncteur canonique

$$h: A \longrightarrow \hat{A}$$

$$a \longmapsto h_a = \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(-, a).$$

Lemme de Yoneda.

Pour tout préfaisceau F sur A et pour tout objet a de A , on a une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(h_a, F) \xrightarrow{\sim} F(a)$$

$$h_a \xrightarrow{u} F \longmapsto u_a(1_a)$$

où $u_a: \mathrm{Hom}_A(a, a) \rightarrow F(a)$ désigne l'application induite par $h_a \xrightarrow{u} F$, et 1_a désigne l'identité de a .

Corollaire. Le foncteur $h: A \rightarrow \hat{A}$ est pleinement fidèle.

Rappel: Soit $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur.

Pour chaque paire d'objets x, y de \mathcal{C} , on a une application

$$(*) \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), F(y))$$

On dit que F est plein (resp. fidèle) si $(*)$ est surjective (resp. injective) pour tous x, y .

On dit que F est pleinement fidèle s'il est à la fois plein et fidèle.

On fera souvent l'abus de notation qui consiste à voir le foncteur $h: A \rightarrow \hat{A}$ comme une inclusion.

Autrement dit, on écrira $a = h_a$ pour un objet a de A , de sorte que le lemme de Yoneda s'écrit:

$$\text{Hom}_{\hat{A}}(a, F) \simeq F(a).$$

Pour un préfaisceau $F: A^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$, on note A/F la catégorie suivante.

objets: couples (a, s) , où a est un objet de A , et $s: a \rightarrow F$ une section de F au-dessus de a .

$$\text{morphismes: } (a, s) \xrightarrow{f} (b, t)$$

ce sont les morphismes $a \xrightarrow{f} b$ dans A tels que $t \circ f = s$ dans \hat{A} (ou encore, tels que

l'application $F(b) \xrightarrow{f^*} F(a)$ envoie t sur s , si on préfère voir s et t comme des éléments de $F(a)$ et $F(b)$ respectivement).

La composition dans A/F est induite par la composition dans A . On a donc, par définition, un foncteur fidèle

$$\begin{aligned} A/F &\rightarrow A \\ (a, s) &\mapsto a \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

En composant ce dernier avec le plongement de Yoneda, on obtient un foncteur

$$\begin{aligned} \varphi_F : A/F &\longrightarrow \hat{A} \\ (a, s) &\longmapsto a \end{aligned}$$

D'autre part, la famille de morphismes $a \xrightarrow{s} F$, pour $a \in \text{ob } A$, définit une transformation naturelle du foncteur φ_F vers le foncteur constant $A/F \rightarrow \hat{A}$ de valeur F , d'où un morphisme de préfaisceaux

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ A/F}} \varphi_F = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ (a, s)}} a \longrightarrow F$$

Proposition: le morphisme ci-dessus est un isomorphisme.

Rappel: la catégorie \hat{A} admet des limites inductives et projectives qui se calculent terme à terme: si I est une petite catégorie, et si $\varphi: I \rightarrow \hat{A}$ est un foncteur, alors $\varinjlim \varphi_i$ et $\varprojlim \varphi_i$ existent dans \hat{A} , et pour tout objet a de A , on a:

$$\left(\varinjlim \varphi_i \right)(a) = \varinjlim \varphi_i(a)$$

et

$$\left(\varprojlim \varphi_i \right)(a) = \varprojlim \varphi_i(a).$$

La catégorie \hat{A} admet un Hom interne relativement au produit cartésien: si F et G sont deux préfaisceaux sur A , on note $\underline{\text{Hom}}(F, G)$ le préfaisceau défini par

$$\underline{\text{Hom}}(F, G)(a) = \text{Hom}_{\hat{A}}(a \times F, G).$$

Pour tout préfaisceau E sur A , on a alors une bijection naturelle:

$$\text{Hom}_{\hat{A}}(E \times F, G) \cong \text{Hom}_{\hat{A}}(E, \underline{\text{Hom}}(F, G)).$$

Soit \mathcal{C} une catégorie admettant des petites limites inductives. On se donne un foncteur

$$u: A \longrightarrow \mathcal{C}.$$

On lui associe un foncteur

$$\begin{aligned} u^*: \mathcal{C} &\longrightarrow \hat{A} \\ x &\longmapsto u^*(x) \end{aligned}$$

$$\text{où } u^*(x)(a) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(u(a), x).$$

Théorème. Le foncteur $u^*: \mathcal{C} \longrightarrow \hat{A}$ admet un adjoint à gauche

$$u_!: \hat{A} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

En outre $u_!(h_a) = u(a)$ pour tout objet a de A
(on encore: $u_! \circ h = u$).

preuve: il suffit de montrer que, pour tout objet X de \mathcal{C} , le foncteur

$$\begin{aligned} \hat{A}^{op} &\longrightarrow \text{Ens} \\ F &\longmapsto \text{Hom}_{\hat{A}}(F, u^*X) \end{aligned}$$

est représentable.

$$\text{Pours } u_!(F) = \varinjlim_{A/F} u \varphi_F = \varinjlim_{(a,s)} u(a).$$

on a alors

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(u_!(F), X) &= \varprojlim_{(a,s)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(u(a), X) \\
 &= \varprojlim_{(a,s)} \text{Hom}_{\hat{A}}(a, u^*X) \quad (\text{par la lemme de Yoneda}) \\
 &= \text{Hom}_{\hat{A}}(\varinjlim_{(a,s)} a, u^*X) \\
 &= \text{Hom}_{\hat{A}}(F, u^*X).
 \end{aligned}$$

Si $A \xrightarrow{u} B$ est un foncteur entre petites catégories, on lui associe un foncteur image inverse

$$\begin{aligned}
 u^*: \hat{B} &\longrightarrow \hat{A} \\
 F &\longmapsto F \circ u
 \end{aligned}
 \qquad
 u^*(F)(a) = F(u(a))$$

lequel admet un adjoint à gauche

$$u_!: \hat{A} \longrightarrow \hat{B}$$

$$\text{défini par } u_!(F) = \varinjlim_{(a,s) \in A/F} u(a)$$

et un adjoint à droite

$$u_*: \hat{A} \longrightarrow \hat{B}$$

défini par

$$u_*(F)(b) = \text{Hom}_{\hat{A}}(u^*(b), F).$$

Ensembles simpliciaux

On note Δ la catégorie dont les objets sont les ensembles

$[n] = \{i \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq i \leq n\} = \{0, \dots, n\}$, $n \geq 0$, munis de l'ordre naturel, et dont les morphismes sont les applications croissantes.

Définition. Un ensemble simplicial est un préfaisceau sur la catégorie Δ .

On note $\hat{\Delta}$ la catégorie des ensembles simpliciaux.

Notations.

Pour $n \geq 0$, on désigne par $\Delta_n = h_{[n]} = \text{Hom}_{\Delta}(-, [n])$ le n -simplexe standard.

Si X est un ensemble simplicial, on note

$$X_n = X([n]) \cong \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta_n, X)$$

l'ensemble des n -simplexes de X .

Pour $n \geq 1$ et $0 \leq i \leq n$, on note

$$\partial_n^i : [n-1] \rightarrow [n]$$

l'unique application strictement croissante qui ne prend pas la valeur i .

Pour $n \geq 0$ et $0 \leq i \leq n$, on note

$$\sigma_n^i: [n+1] \rightarrow [n]$$

l'unique application croissante et surjective qui atteint deux fois la valeur i .

On a alors les relations fondamentales suivantes.

$$\begin{aligned}
 \partial_{n+1}^j \partial_n^i &= \partial_{n+1}^i \partial_n^{j-1} & i < j \\
 (*) \quad \sigma_n^j \sigma_{n+1}^i &= \sigma_n^i \sigma_{n+1}^{j+1} & i \leq j \\
 \sigma_{n-1}^j \partial_n^i &= \begin{cases} \partial_{n-1}^i \sigma_{n-2}^{j-1} & i < j \\ 1_{[n-1]} & i \in \{j, j+1\} \\ \partial_{n-1}^{i-1} \sigma_{n-2}^j & i > j+1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Proposition: tout morphisme de Δ admet une factorisation de la forme

$$[m] \xrightarrow{\sigma} [p] \xrightarrow{\partial} [n]$$

où ∂ est injectif et σ est surjectif et scindé dans Δ (i.e. il existe $\tau: [p] \rightarrow [m]$ tel que $\sigma\tau = 1_{[p]}$).

Théorème. La catégorie Δ est la catégorie librement engendrée par les opérations de type ∂_n^i et σ_n^i , modulo les relations (*) données ci-dessus.

Corollaire. La donnée d'un ensemble simplicial X équivaut à la donnée d'une famille d'ensembles

$$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

et d'une famille d'opérations

$$X_n \xrightarrow{s_n^i} X_{n+1} \quad \text{et} \quad X_n \xrightarrow{d_n^i} X_{n-1}$$

satisfaisant aux relations duales de (*):

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \quad i < j$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i \quad i \leq j$$

$$d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & i < j \\ 1 & j \leq i \leq j+1 \\ s_j d_{i-1} & i > j+1 \end{cases}$$

Exemple 1.

On désigne par Cat la catégorie des petites catégories.

objets: petites catégories.

flèches: foncteurs.

On a un foncteur $i: \Delta \rightarrow \text{Cat}$, et comme Cat admet des limites inductives, on obtient une adjonction

$$\hat{\Delta} \begin{matrix} \xrightarrow{\tau} \\ \xleftarrow{N} \end{matrix} \text{Cat}$$

définie par $\tau = i_!$ et par $N = i^*$.

Le foncteur $i: \Delta \rightarrow \text{Cat}$ est défini en envoyant $[n]$ sur la catégorie libre engendrée par le graphe

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n$$

Ce foncteur est pleinement fidèle.

Si C est une petite catégorie, $N(C)$ est appelé le nerf de C . Les n -simplexes de $N(C)$ sont, par définition, les suites de n morphismes composables dans C .

$$(\gamma) \quad c_0 \rightarrow c_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_n$$

$$d_i: N(C)_n \rightarrow N(C)_{n-1} \text{ envoie } (\gamma) \text{ sur}$$

$$(d_i \gamma) \quad c_0 \rightarrow c_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_{i-1} \rightarrow c_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow c_n$$

$$s_i: N(C)_n \rightarrow N(C)_{n+1} \text{ envoie } (\gamma) \text{ sur}$$

$$(s_i \gamma) \quad c_0 \rightarrow c_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_i = c_i \rightarrow c_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow c_n$$

Les opérations d_i décrivent donc la composition dans C , et les opérateurs s_i décrivent les identités dans C .

Exemple 2.

Soit $r: \Delta \rightarrow \text{Top}$ le foncteur défini par

$$r(\Delta_n) = |\Delta_n|$$

$$\text{où } |\Delta_n| = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i x_i = 1, \forall i, x_i \geq 0\}$$

On a donc

$$|\Delta_0| = \text{pt}$$

$$|\Delta_1| = [0, 1]$$

$$|\Delta_2| = \triangle$$

$$|\Delta_3| = \triangle$$

Pour $\varphi: \Delta_n \rightarrow \Delta_m$ dans Δ , $|\varphi|: |\Delta_n| \rightarrow |\Delta_m|$ est l'application définie par $|\varphi|(x_0, \dots, x_n) = (y_0, \dots, y_m)$

$$\text{où } y_i = \sum_{j \in \varphi^{-1}(i)} x_j$$

On obtient un couple de foncteurs adjoints

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Delta} & \xrightleftharpoons[\text{Sing}]{|-|} & \text{Top} \end{array}$$

défini par les formules $|X| = r_!(X)$ et $\text{Sing}(Y) = r^*(Y)$.

Si Y est un espace topologique, les n -simplexes de $\text{Sing}(Y)$ sont donc les applications continues

$$|\Delta_n| \rightarrow Y.$$

$\text{Sing}(Y)$ est appelé le complexe singulier associé à Y . C'est à partir de $\text{Sing}(Y)$ que l'on définit généralement le complexe d'homologie singulière de Y .

$\text{Sing}(Y)$ est un exemple de ∞ -groupeïde, et on verra que tout ∞ -groupeïde est équivalent à un ∞ -groupeïde de cette forme.

Filtration cellulaire des ensembles simpliciaux.

Pour $n \geq -1$, on note $\Delta^{\leq n}$ la sous-catégorie pleine de Δ formée des objets $[m]$ pour $m \leq n$.

On a donc $\Delta^{\leq -1} = \emptyset$

$\Delta^{\leq 0} = e$ (la catégorie avec un seul objet, et pour seul morphisme, l'identité).

L'inclusion $i_n: \Delta^{\leq n} \hookrightarrow \Delta$ induit un foncteur de restriction

$$i_n^*: \hat{\Delta} \longrightarrow \hat{\Delta}^{\leq n},$$

lequel admet un adjoint à gauche

$$i_{n!}: \hat{\Delta}^{\leq n} \longrightarrow \hat{\Delta}$$

et un adjoint à droite

$$i_{n*}: \hat{\Delta}^{\leq n} \longrightarrow \hat{\Delta}.$$

Lemme. Les foncteurs $i_{n!}$ et i_{n*} sont pleinement fidèles.

preuve: il suffit de prouver que les morphismes d'adjonction

$$\eta: 1_{\hat{\Delta}^{\leq n}} \longrightarrow i_n^* i_{n!} \quad \text{et} \quad \varepsilon: i_n^* i_{n*} \longrightarrow 1_{\hat{\Delta}^{\leq n}}$$

sont des isomorphismes. Comme ε est obtenue de η par transposition, il suffit de le prouver pour η . Comme i_n^* et $i_{n!}$ commutent aux limites inductives, et comme tout préfaisceau est une limite inductive de préfaisceaux représentables, il suffit de montrer que

$$\eta_{[m]}: i_n^* i_{n!} h_{[m]} \longrightarrow h_{[m]} = i_n^* \Delta_m \quad \text{est un isomorphisme pour } 0 \leq m \leq n.$$

or c'est évident.

Définition. Soit X un ensemble simplicial. On pose :

$$Sk^n X = i_n! i_n^* (X) \text{ et } Cosk^n X = i_{n*} i_n^* (X).$$

On a, par construction, des morphismes naturels

$$Sk^n X \longrightarrow X \longrightarrow Cosk^n X.$$

Définition. Un n -simplexe $\Delta_n \xrightarrow{\alpha} X$ est dégénéré s'il existe une factorisation de la forme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \varphi \searrow & & \nearrow g \\ & \Delta_m & \end{array}$$

avec $m < n$.

Un n -simplexe de X est non-dégénéré s'il n'est pas dégénéré.

Remarque : un n -simplexe $\Delta_n \xrightarrow{\alpha} X$ est dégénéré si et seulement s'il existe une factorisation de la forme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \varphi \searrow & & \nearrow g \\ & \Delta_m & \end{array}$$

où φ est un épimorphisme de Δ avec $m < n$.

Lemme d'Eilenberg-Zilber.

Par tout simplexe $\Delta_n \xrightarrow{\alpha} X$, il existe un unique couple (γ, φ) , où $\Delta_n \xrightarrow{\varphi} \Delta_m$ est un épimorphisme de Δ , et $\Delta_m \xrightarrow{\gamma} X$ est non-dégénéré, tel que

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \varphi \downarrow & \nearrow \gamma & \\ & \Delta_m & \end{array} \quad \text{commute.}$$

On appelle (γ, φ) la décomposition d'Eilenberg-Zilber de α .

Preuve: soit $m \geq 0$ le plus petit entier tel qu'il existe une factorisation de la forme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \varphi \downarrow & \nearrow \gamma & \\ & \Delta_m & \end{array}$$

Il est clair que γ est non-dégénéré, et φ est un épimorphisme de Δ : si ce n'était pas le cas, φ admettrait une factorisation de la forme

$$\Delta_n \xrightarrow{\text{epi}} \Delta_p \xrightarrow{\text{non-epi}} \Delta_m \quad \text{avec } p < m,$$

ce qui contredirait la minimalité de m .

Considérons deux factorisations

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \varphi \downarrow & \nearrow \gamma & \\ & \Delta_m & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \Delta_n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \varphi' \downarrow & \nearrow \gamma' & \\ & \Delta_{m'} & \end{array}$$

avec γ et γ' non-dégénérés, et φ, φ' , des épimorphismes.

Si $s: \Delta_m \rightarrow \Delta_n$ est une section de φ , on a

$$\alpha s = y \varphi s = y \quad \text{d'où} \quad y' \varphi' s = y.$$

Comme y est non-dégénéré, cela implique que $m' \geq m$.

Par symétrie, on en déduit que $m = m'$.

On a aussi $\varphi' s = 1_{\Delta_m}$, car sinon, y serait dégénéré.

Par symétrie, on en déduit que φ et φ' sont deux applications croissantes surjectives $[n] \rightarrow [m]$ qui admettent les mêmes ensembles de sections, ce qui implique que $\varphi = \varphi'$.

On note $X^{(n)}$ le sous-ensemble simplicial de X dont les n -simplexes sont les $\Delta_n \xrightarrow{\alpha} X$ admettant une décomposition d'Eilenberg-Zilber

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \varphi \searrow & & \nearrow \gamma \\ & \Delta_p & \end{array} \quad \text{avec } p \leq n.$$

Corollaire. L'application $Sk^n X \rightarrow X$ est injective, et induit un isomorphisme $Sk^n X \cong X^{(n)}$.

Définition. Le bord de Δ_n est

$$\partial \Delta_n = Sk^{n-1} \Delta_n.$$

On a donc $\partial \Delta_0 = \emptyset$, $\partial \Delta_1 \cong \Delta_0 \cup \Delta_0$.

D'une manière générale, pour $n \geq 1$, on a

$$\partial \Delta_n = \bigcup_{0 \leq i \leq n} \text{Im} \left(\Delta_{n-1} \xrightarrow{\partial_n^i} \Delta_n \right).$$

Exercice. $|\partial \Delta_n| = \partial |\Delta_n| \cong S^{n-1}$

Soit $X \hookrightarrow Y$ une inclusion d'ensembles simpliciaux.

Pour $n \geq 0$, on note Σ_n l'ensemble des n -simplexes non-dégénérés de Y qui ne sont pas dans X .

On a alors un carré commutatif

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \coprod_{\Sigma_n} \partial \Delta_n & \longrightarrow & Sk^{n-1}(Y) \cup X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\Sigma_n} \Delta_n & \longrightarrow & Sk^n(Y) \cup X \end{array}$$

Proposition: le carré (*) est cocartésien.

La preuve est laissée à titre d'exercice (c'est un corollaire du Lemme d'Eilenberg-Zilber).

Remarque: on a toujours $X = \bigcup_n Sk^n X$.

Corollaire. $|X|$ est un CW-complexe pour tout ensemble simplicial X .

La filtration cellulaire par le squelette permet de mieux comprendre le foncteur

$\tau: \hat{\Delta} \rightarrow \text{Cat}$,
adjoint à gauche du foncteur nerf .

Lemme. Pour $n > 2$, le foncteur

$\tau(\partial \Delta_n) \rightarrow \tau(\Delta_n) = i[n]$
est un isomorphisme.

Proposition. Pour tout ensemble simplicial X

$\tau(\text{Sk}^2(X)) \rightarrow \tau(X)$
est un isomorphisme.

Plus précisément $\tau(X)$ peut être décrit de la manière suivante.

On considère la catégorie librement engendrée par le graphe $X_1 \xrightleftharpoons[d'_1]{d_1} X_0$, puis on quotiente par les relations

$$d_2^1 = d_2^0 d_2'.$$

Corollaire. Le foncteur nerf est pleinement fidèle. Autrement dit, pour toute petite catégorie C , on a un isomorphisme $\tau N(C) \xrightarrow{\sim} C$.

On peut encore caractériser l'image essentielle du foncteur nerf comme suit.

Por $n \geq 2$, on note $\bar{I}_n \subset \Delta_n$ en

$$I_n = \bigcup_{i=1}^n I_m \times \mathbb{Z}_i$$

$$\text{cu} \quad \alpha_i: \Delta_i \rightarrow \Delta_n$$

Si X est un ensemble simplicial, on a

$$\text{Hom}_{\hat{\Delta}}(I_n, X) \cong \overbrace{X_1 \times X_1 \times \dots \times X_1}^{n \text{ times}}$$

où les produits fibres sur le droit dirigent la
liant du diagramme

(1) $X_0 \xrightarrow{d'_1} X_1 \xrightarrow{d'_0} X_0 \xrightarrow{d'_1} X_1 \xrightarrow{d'_0} \dots \xrightarrow{d'_1} X_0 \xrightarrow{d'_1} X_1 \xrightarrow{d'_0} X_0$

Si $X = N(C)$, le diagramme (1) se réduit

(2) $\begin{array}{c} \text{source} \swarrow \text{FRC} \searrow \text{but} \\ \text{abc} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{source} \swarrow \text{FRC} \searrow \text{but} \\ \text{abc} \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} \text{source} \swarrow \text{FRC} \searrow \text{but} \\ \text{abc} \end{array}$

On voit donc que le flicke canonique

$$N(C)_n = \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta_n, N(C)) \longrightarrow \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(I_n, N(C))$$

est bijective.

Caractérisation de Grothendieck - Segal des catégories :

Proposition. Soit X un ensemble simplicial.

Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) il existe une petite catégorie C , et un isomorphisme

$$X \cong N(C).$$

(ii) le morphisme canonique $X \rightarrow N\tau(X)$ est un isomorphisme.

(iii) pour tout entier $n \geq 2$, l'application

$$X_n = \operatorname{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta_n, X) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\hat{\Delta}}(I_n, X)$$

est bijective.

preuve.

Il est clair que $(ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii)$.

Il suffit donc de prouver que $(iii) \Rightarrow (ii)$, ce qui résulte formellement de la description explicite de $\tau(X)$.

Exercice: le foncteur $\tau: \hat{\Delta} \rightarrow \mathbf{Cat}$ commute aux produits finis.

Définition des ∞ -Catégories et ∞ -Groupoïdes.

Pour $0 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, on note le "corno" :

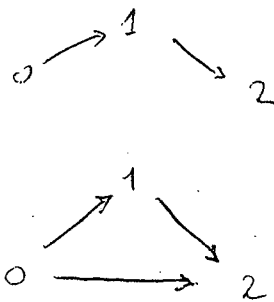
$$\Lambda_n^k = \bigcup_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \text{Im}(\Delta_{n-1} \xrightarrow{\partial_n^i} \Delta_n)$$

On a donc une inclusion

$$\Lambda_n^k \hookrightarrow \Delta_n.$$

Exemple: $n=1$: $\Lambda_1^0 = \{0\} \rightarrow \Delta_1$ et $\Lambda_1^1 = \{1\} \rightarrow \Delta_1$.
Exemple: $n=2$.

$$\begin{array}{c} \Lambda_2^1 \\ \downarrow \\ \Delta_2 \end{array}$$



Si C est une catégorie, se donner une section

$$\Delta_2 \rightarrow NC,$$

c'est se donner un triangle commutatif dans C

$$\begin{array}{ccc} & c_1 & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ c_0 & \xrightarrow{\quad} & c_2 \\ & \downarrow \text{id} & \end{array}$$

Se donner une section $\Lambda_2^1 \xrightarrow{\varphi} NC$, c'est se donner

un diagramme de C de la forme $c_0 \xrightarrow{f} c_1 \xrightarrow{g} c_2$.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_2^1 & \xrightarrow{\varphi} & NC \\ \downarrow & \nearrow \varphi & \\ \Delta_2 & & \end{array}$$

Il existe alors un unique morphisme φ tel que le diagramme ci-dessus commute.

Cela se reformule en disant que le foncteur

$$\tau(\Lambda'_2) \rightarrow \tau(\Delta_2)$$

est un isomorphisme de catégories (ce que l'on a déjà vu, puisque $\Lambda'_2 = I_2 \cdots$).

Remarque: pour $n \geq 3$, le foncteur

$$\tau(\Lambda_n^k) \rightarrow \tau(\Delta_n)$$

est toujours un isomorphisme de catégories: on a en effet pour $n \geq 3$:

$$Sk^2(\Lambda_n^k) = Sk^2(\partial\Delta_n) = Sk^2\Delta_n,$$

d'où $\tau(\Lambda_n^k) \cong \tau(\partial\Delta_n) \cong \tau(\Delta_n)$. Le cas $n=3$ se démontre directement (exercice).

Définition. Un cornet intérieur est une inclusion de la forme $\Lambda_n^k \hookrightarrow \Delta_n$ pour $n \geq 2$ et $0 < k < n$.

Proposition.

Un ensemble simplicial X est le nerf d'une catégorie si et seulement si pour tout cornet intérieur $\Lambda_n^k \hookrightarrow \Delta_n$, et pour tout morphisme $\Lambda_n^k \xrightarrow{\varphi} X$, il existe un unique morphisme $\Delta_n \xrightarrow{\psi} X$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n^k & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow & \nearrow \psi & \\ \Delta_n & & \end{array}$$

preuve: c'est une reformulation de la condition de Grothendieck-Segal.

Rappel: un groupoïde est une catégorie \mathcal{C} dans laquelle toute flèche est un isomorphisme.

Proposition.

Une petite catégorie \mathcal{C} est un groupoïde si et seulement si pour tout cornet $\Lambda_n^k \rightarrow \Delta_n$, $n \geq 1$, et pour tout morphisme $\Lambda_n^k \xrightarrow{\varphi} NC$, il existe $\psi: \Delta_n \rightarrow NC$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n^k & \xrightarrow{\varphi} & NC \\ \downarrow & \nearrow \psi & \\ \Delta_n & & \end{array}$$

Démonstration. La condition de relèvement pour $n=1$ est vide: $\{e\} \hookrightarrow \Delta_1$ admet une rétraction par $e=0,1$. Comme $\tau(\Lambda_n^k) = \tau(\Delta_n)$ pour $n \geq 3$, la condition de relèvement n'est significative que pour $n=2$.

Si on a une telle condition de relèvement, alors \mathcal{C} est un groupoïde. On le voit en considérant

$$\varphi: \Lambda_2^0 \rightarrow NC \text{ correspondant à } \begin{array}{ccc} & f & b \\ a & \xrightarrow{1_a} & a \end{array}$$

$$\text{et } \varphi': \Lambda_2^2 \rightarrow NC$$

$$\begin{array}{ccc} & a & f \\ b & \xrightarrow{1_b} & b \end{array}$$

La réciproque correspond aux situations suivantes.

$$\begin{array}{ccc} & f & h \circ f^{-1} \\ c_1 & \xrightarrow{h} & c_2 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} & g^{-1} \circ h & g \\ c_1 & \xrightarrow{h} & c_2 \end{array}$$

Définition (Boardman-Voigt, Joyal)

Une quasi-catégorie (on dira aussi une ∞ -catégorie) est un ensemble simplicial X tel que, pour tout cornet intérieur $\Lambda_n^k \hookrightarrow \Delta_n$ et tout morphisme $\varphi: \Lambda_n^k \rightarrow X$, il existe un morphisme $\psi: \Delta_n \rightarrow X$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n^k & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow & \nearrow \psi & \\ \Delta_n & & \end{array} \quad \begin{array}{l} n \geq 2 \\ 0 \leq k < n. \end{array}$$

Définition.

Un complexe de Kan (on dira aussi un ∞ -groupeïde) est un ensemble simplicial X tel que, pour tout cornet $\Lambda_n^k \hookrightarrow \Delta_n$, pour tout morphisme $\varphi: \Lambda_n^k \rightarrow X$, il existe $\psi: \Delta_n \rightarrow X$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n^k & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow & \nearrow \psi & \\ \Delta_n & & \end{array} \quad \begin{array}{l} n \geq 1 \\ 0 \leq k \leq n. \end{array}$$

Exemple 1: pour toute petite catégorie C , $N(C)$ est une ∞ -catégorie. C'est un ∞ -groupeïde si et seulement si C est un groupeïde.

Exemple 2 :

On peut démontrer que $|\Delta^n| \cong B^n \cong I^n$ où $I = [0, 1]$
et que

$$\begin{array}{ccc} |\Lambda_n^k| & \cong & I^{n-1} \times \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ |\Delta_n| & \cong & I^n \end{array}$$

On en déduit que, pour tout espace topologique X ,
 $S(X)$ est un complexe de Kan (i.e. un ∞ -groupoïde)

On a en effet une correspondance (par adjonction) :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n^k & \xrightarrow{\varphi} & S(X) \\ \downarrow & \nearrow \psi & \\ \Delta_n & & \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} I^{n-1} \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & X \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\psi} & \\ I^n & & \end{array}$$

Or $I^{n-1} \times \{0\} \hookrightarrow I^n$ admet une rétraction $r: I^n \rightarrow I^{n-1} \times \{0\}$.

On pose $\tilde{\psi} = \tilde{\varphi} \circ r \dots$

On verra qu'en un certain sens, tous les ∞ -groupoïdes sont essentiellement de cette forme.

Soit $p: \Delta \rightarrow \Delta$ le foncteur défini par

$$p([n]) = [n], \quad n \geq 0.$$

$$\text{et } [m] \xrightarrow{f} [n] \longmapsto [m] \xrightarrow{p(f)} [n]$$

$$\text{où } p(f)(i) = n - f(m-i).$$

On a $p^2 = 1_\Delta$.

Exercice: p est le seul automorphisme non trivial de Δ .

On en déduit une adjonction:

$$\hat{\Delta} \begin{array}{c} \xrightarrow{p!} \\ \xleftarrow{p^*} \end{array} \hat{\Delta}$$

Comme $p^2 = 1_\Delta$, on a un isomorphisme de foncteurs

conséquence $p! \cong p^*$. On a aussi $p^* p^* = 1_{\hat{\Delta}}$.

Si X est un ensemble simplicial, on note

$$X^{op} = p^*(X).$$

Si $X \xrightarrow{f} Y$ est un isomorphisme, on note

$$X^{op} \xrightarrow{f^{op}} Y^{op} \text{ son image par } p.$$

Exercice. Si C est une petite catégorie, alors

$$N(C)^{op} = N(C^{op}).$$

Exercice. Soit X un ensemble simplicial.

X est une ∞ -catégorie (resp. un ∞ -groupoïde)

si et seulement si X^{op} a cette propriété.

Conventions: si X est une ∞ -catégorie, on appellera

objets de X ses 0-simplices $\Delta_0 \xrightarrow{\alpha} X$. Les flèches

de X sont les 1-simplices $\Delta_1 \xrightarrow{f} X$; f a pour

source $f_0: \Delta_0 \xrightarrow{\alpha'_0} \Delta_1 \xrightarrow{f} X$, et pour cible $f_1: \Delta_0 \xrightarrow{\alpha'_1} \Delta_1 \xrightarrow{f} X$.

La construction de Boardman-Vogt

Soit X une ∞ -catégorie. On va décrire explicitement sa catégorie associée $\tau(X)$.

La donnée d'un morphisme $\partial\Delta_2 \xrightarrow{(f,g,h)} X$ équivaut à la donnée de trois flèches de X

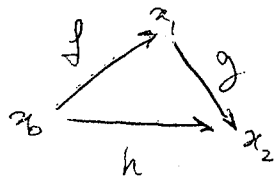
$$f, g, h : \Delta_1 \rightarrow X$$

(correspondant aux trois faces de Δ_2) telles que :

- f et h aient la même source;
- le but de f est la source de g ;
- g et h aient le même but.

Un morphisme $\partial\Delta_2 \xrightarrow{(f,g,h)} X$ sera appelé un triangle de X .

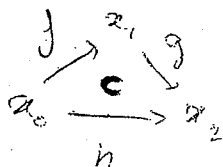
Il sera représenté par un diagramme de la forme



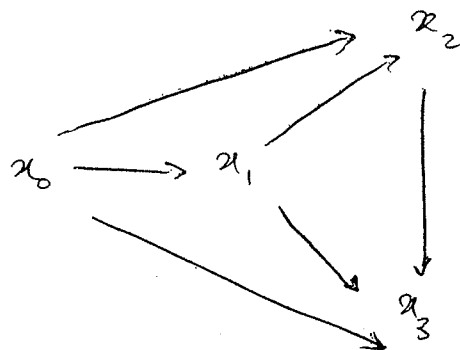
On dit qu'un triangle de X $\partial\Delta_2 \xrightarrow{(f,g,h)} X$ commute s'il existe un morphisme $\Delta_2 \xrightarrow{c} X$ tel que

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_2 & \xrightarrow{(f,g,h)} & X \\ \downarrow & \nearrow c & \\ \Delta_2 & & \end{array} \quad \text{commute dans } \hat{\Delta}.$$

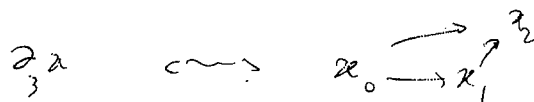
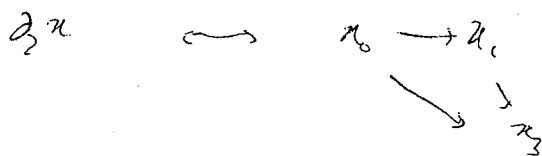
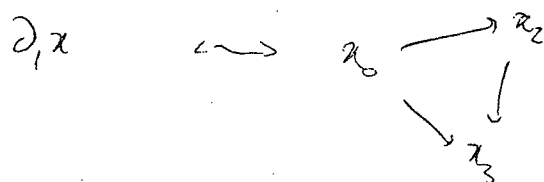
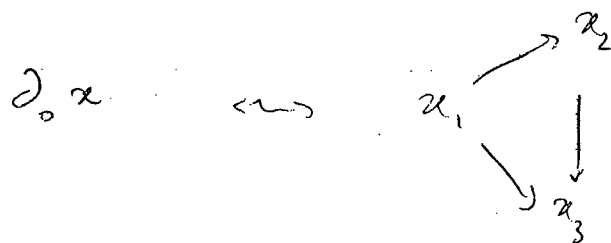
On parlera alors de triangle commutatif dans X :



La donnée d'un morphisme $Sk^1 \Delta_3 \xrightarrow{x} X$
 correspond à la donnée d'un diagramme "non commutatif"
 dans X de la forme



Chaque face de ce diagramme correspond à un
 triangle $\partial_k x : \partial \Delta_2 \rightarrow X$, $0 \leq k \leq 3$.



On se donne un diagramme $x : Sk^1 \Delta_3 \rightarrow X$
 comme ci-dessus.

Lemme de cohérence.

Supposons que dans le diagramme x , les triangles $\partial_0 x$ et $\partial_3 x$ commutent. Alors le triangle $\partial_1 x$ commute si et seulement si le triangle $\partial_2 x$ commute.

Démonstration.

On se donne

$$\begin{array}{ccc} \partial \Delta_2 & \xrightarrow{\partial_0 x} & X \\ \downarrow & \nearrow y_0 & \\ \Delta_2 & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \partial \Delta_2 & \xrightarrow{\partial_3 x} & X \\ \downarrow & \nearrow y_3 & \\ \Delta_2 & & \end{array}$$

Supposons que $\partial_1 x$ commute, et choisissons un relèvement:

$$\begin{array}{ccc} \partial \Delta_2 & \xrightarrow{\partial_1 x} & X \\ \downarrow & \nearrow y_1 & \\ \Delta_2 & & \end{array}$$

La donnée de y_0, y_1, y_3 définit un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_3^{(y_0, y_1, y_3)} & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & \nearrow y & \\ \Delta_3 & & \end{array}$$

La face $y_2: \Delta_2 \xrightarrow{\partial_2^3} \Delta_3 \xrightarrow{y} X$ montre que le triangle $\partial_2 x$ commute. Le cas où $\partial_2 x$ commute s'en déduit par symétrie ($\partial_2 x$ devient $\partial_1 x$ dans X^{op} ...).

Soient a et b deux objets de X . On note $X(a, b)_0$ l'ensemble des flèches de X de source a et de but b .

$$\begin{array}{ccc} X(a, b)_0 & \longrightarrow & X_1 \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow (d_0, d_1) \\ \text{pt} & \xrightarrow{(a, b)} & X_0 \times X_0 \end{array}$$

On note $1_a \in X(a, a)_0$ l'identité de a

$$1_a : \Delta_1 \longrightarrow \Delta_0 \xrightarrow{a} X$$

On définit une relation sur les flèches de X en posant

$$gf \sim h \iff \text{le triangle } d\Delta_2 \xrightarrow{(f, g, h)} X \text{ commute}$$

On définit quatre relations sur l'ensemble $X(a, b)_0$ en posant

$$f \sim_1 g \iff f 1_a \sim g$$

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ 1_a \nearrow & & \searrow f \\ a & \xrightarrow{c} & b \\ & g \nearrow & \end{array}$$

$$f \sim_2 g \iff 1_b f \sim g$$

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ f \nearrow & & \searrow 1_b \\ a & \xrightarrow{c} & b \\ & g \nearrow & \end{array}$$

$$f \sim_3 g \iff \cancel{f} \sim \cancel{g} \iff g 1_a \sim f$$

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ 1_a \nearrow & & \searrow g \\ a & \xrightarrow{c} & b \\ & f \nearrow & \end{array}$$

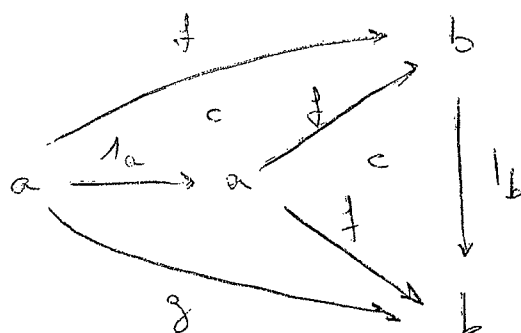
$$f \sim_4 g \iff 1_b g \sim f$$

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ g \nearrow & & \searrow 1_b \\ a & \xrightarrow{c} & b \\ & f \nearrow & \end{array}$$

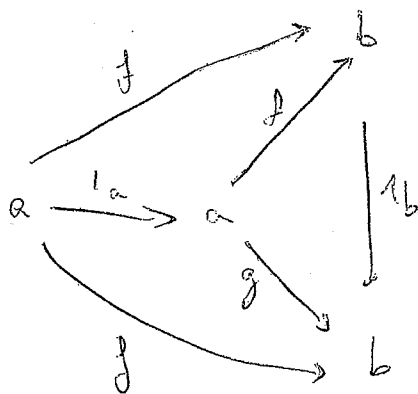
Lemme: Les quatre relations ci-dessus sont égales et sont des relations d'équivalence sur l'ensemble $X(a, b)_0$

Démonstration.

Soient $f, g \in X(a, b)_0$. On a alors un diagramme de flèches de X de la forme :



ainsi que



Le lemme précédent appliqué à chacun de ces diagrammes montre que $1_b f \sim g \Leftrightarrow f 1_a \sim g$

$$\text{et } 1_b f \sim g \Rightarrow g 1_a \sim f$$

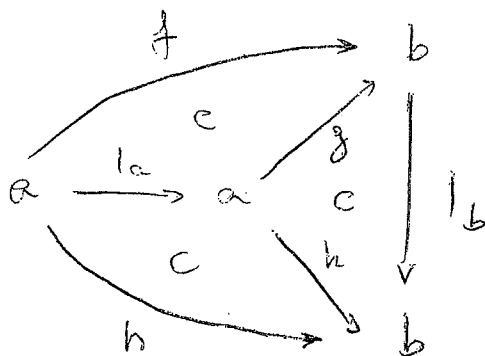
Par symétrie, on en déduit que $\sim_1 = \sim_2 = \sim_3 = \sim_4$.

Notons \simeq cette relation. Il reste à prouver que \simeq est une relation d'équivalence. La réflexivité et la symétrie est immédiate. Démontrons la transitivité.

Si on a $f \simeq g$ et $g \simeq h$, alors :

$g \circ l_a \sim f$ et $l_b \circ g \sim h$, et $h \circ l_a \sim h$.

On peut alors considérer le diagramme



et à l'anneau précédent nous dit que $l_b \circ f \sim h$.

On dira que deux flèches $f, g \in X(a, b)_0$ sont homotopes si $f \sim g \iff f \sim_i g$ pour $i=1, 2, 3, 4$.

On note $\text{Hom}_{\text{ho}X}(a, b) = X(a, b)_0 / \sim$.

et $X(a, b)_0 \longrightarrow \text{Hom}_{\text{ho}X}(a, b)$
 $f \longmapsto [f]$

Si on a trois objets $a, b, c \in X_0$, on définit une loi de composition

$$X(a, b)_0 \times X(b, c)_0 \longrightarrow \text{Hom}_{\text{ho}X}(a, c)$$

$$f, g \longmapsto [g] \circ [f]$$

où $[g] \circ [f] = [h]$ pour $h \in X(a, c)_0$ vérifie

$g \circ f \sim h$ (on a h existe toujours car X est une ∞ -catégorie).

Théorème (Boardman-Vogt)

La loi de composition ci-dessus est bien définie et est compatible à la relation d'homotopie. Elle induit une loi de composition

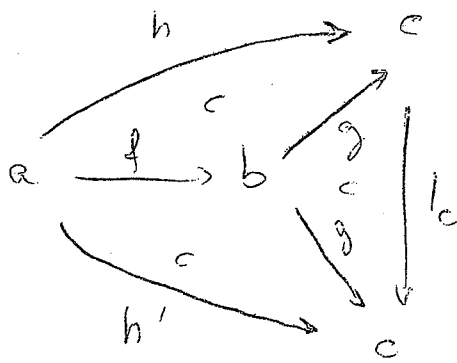
$$\text{Hom}_{\text{hoX}}(a, b) \times \text{Hom}_{\text{hoX}}(b, c) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{hoX}}(a, c) \quad (*)$$

On définit une catégorie hoX dont les objets sont ceux de X , et dont la loi de composition est définie par $(*)$. On a un isomorphisme canonique

$$\text{hoX} \simeq \tau(X).$$

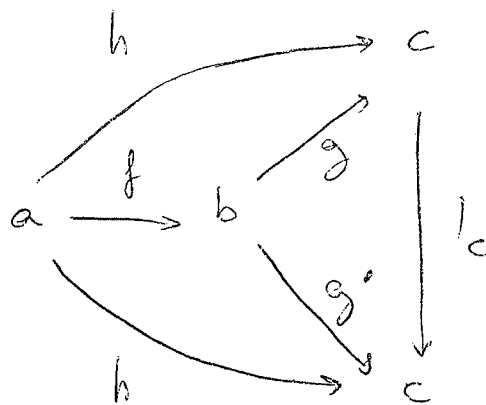
Démonstration.

Si on a $gf \sim h$ et $gf \sim h'$, le diagramme



montre que $c \circ h \sim c \circ h'$, ce qui montre que la loi de composition est bien définie.

Si $g \subseteq g'$ et si $gf \sim h$ alors on a $g'f \sim h$: on le voit en considérant le diagramme



De même, si $f \simeq f'$ et si $gf \simeq h$, alors $gf' \simeq h$.

L'identification $\tau(X) \simeq h_0 X$ est laissée à faire d'exercice.

Corollaire.

Si X est un ∞ -groupoïde, alors $\tau(X)$ est un groupoïde.

Catégories de modules.

Définition.

Soit \mathcal{C} une catégorie.

Étant donnés deux morphismes $i: A \rightarrow B$ et $p: X \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} , on dit que i a la propriété de relèvement à gauche relativement à p , ou encore, que p a la propriété de relèvement à droite relativement à i , si pour tout carré commutatif de \mathcal{C} de la forme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

il existe un relèvement, i.e. un morphisme $h: B \rightarrow X$ tel que $hi = a$ et $ph = b$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

Soit F une classe de morphismes de \mathcal{C} . On dit qu'un morphisme de \mathcal{C} a la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) relativement à F si il a cette propriété relativement à tout élément de F .

On désigne par $\ell(F)$ (resp. par $r(F)$) la classe des morphismes de \mathcal{C} qui ont la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) relativement à F .

On dit qu'un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ est un rétracté d'un morphisme $f': X' \rightarrow Y'$ s'il existe un diagramme commutatif de la forme suivante dans \mathcal{C} .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1_X & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 X & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\
 \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow 1 \\
 Y & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\
 & & 1_Y & &
 \end{array}$$

Soit F une classe de flèches de \mathcal{C} .

On dit que F est stable par rétractes si tout morphisme de \mathcal{C} qui est un rétracte d'un élément de F appartient à F .

On dit que F est stable par images directes si pour tout carré cocartésien de \mathcal{C} de la forme

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{a} & A' \\
 i \downarrow & & \downarrow i' \\
 B & \xrightarrow{b} & B'
 \end{array}$$

on a $i \in F \Rightarrow i' \in F$.

On dit que F est stable par compositions transfinies si pour tout ensemble bien ordonné α et tout foncteur $\Phi: \alpha \rightarrow \mathcal{C}$,

si $\forall \beta \in \alpha$, $\varinjlim_{i < \beta} \Phi_i$ est représentable, et la flèche canonique $\varinjlim_{i < \beta} \Phi_i \rightarrow \Phi_\beta$ est dans F , alors le morphisme $\Phi_0 \rightarrow \varinjlim_{\beta \in \alpha} \Phi_\beta$ est dans F (à condition que $\varinjlim_{\beta \in \alpha} \Phi_\beta$ soit représentable dans \mathcal{C} , et d'un α muni de l'élément initial de α).

Remarque: si \mathcal{C} admet des sommes, la stabilité par images directes et par compositions transfinies implique la stabilité par sommes.

On dit qu'une classe de flèches de \mathcal{C} est saturée si elle est stable par rétractes, par images directes, et par compositions transfinies.

Sonthe

Soit \mathcal{C} une catégorie. On considère deux classes de flèches F et F' dans \mathcal{C} . On a alors les propriétés suivantes

- a) $F \subset r(F') \Leftrightarrow F' \subset l(F)$.
- b) $F \subset F' \Rightarrow l(F') \subset l(F)$.
- c) $F \subset F' \Rightarrow r(F') \subset r(F)$.
- d) $l(r(l(F))) = l(F)$ et $r(l(r(F))) = r(F)$.
- e) $l(F)$ est stable par rétractes, par images directes et par compositions transfinies (et donc par sommes).
Autrement dit, $l(F)$ est une classe saturée.

Lemme du rétracte.

Soit \mathcal{C} une catégorie. On considère un triangle commutatif de \mathcal{C} de la forme suivante.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ f \searrow & & \swarrow p \\ & Z & \end{array}$$

Si $f \in r(i)$ (resp. $f \in l(p)$), alors f est un rétracte de p (resp. de i).

Exemple:

Si $\mathcal{C} = \text{Ens}$ et $F = \{ \phi \rightarrow \pi \}$, alors $r(F)$ est la classe des surjections, et $l(r(F))$ est la classe des injectifs. En particulier, $l(r(F))$ est la plus petite classe de flèches saturée qui contient F .

Définition.

Soit \mathcal{C} une catégorie. Un système de factorisation dans \mathcal{C} est un couple (A, B) formé de deux classes de morphismes de \mathcal{C} tel que:

- 1) A et B sont stables par rétraction;
- 2) $A \subset \ell(B) \quad (\Leftrightarrow B \subset r(A))$
- 3) tout morphisme f de \mathcal{C} admet une factorisation de la

forme $f = p \circ i$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow i & \nearrow p \\ & Z & \end{array}$$

avec $i \in A$ et $p \in B$.

Remarque: on a alors nécessairement $A = \ell(B)$ et $B = r(A)$ (par la lemma des rétractés).

Définition.

Une catégorie de modèles (fermée, au sens de Quillen) est une catégorie \mathcal{C} , munie de trois classes de flèches (W , Cof , Fib)

vérifiant les propriétés suivantes.

1) \mathcal{C} admet des limites inductives et projectives.

2) W a la "propriété du 2 sur 3": pour tout triangle commutatif de \mathcal{C} de la forme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \nearrow h \\ & Z & \end{array}$$

si deux flèches parmi f, g ou h sont dans W , alors il en est de même de la troisième.

3) $(\text{Cof} \cap W, \text{Fib})$ et $(\text{Cof}, \text{Fib} \cap W)$ sont des systèmes de factorisation faible dans \mathcal{C} .

Terminologie:

Les éléments de W sont appelés les équivalences faibles.

Les éléments de Cof sont appelés les cofibrations.

Les éléments de Fib sont appelés les fibrations.

Les éléments de $CofAN$ sont appelés les cofibrations triviales.

Les éléments de $FibNW$ sont appelés les fibrations triviales.

Notons \emptyset et $*$ l'objet initial et l'objet final de \mathcal{C} respectivement.

Un objet X de \mathcal{C} est dit cofibrant (resp. fibrant) si

la flèche $\emptyset \rightarrow X$ (resp. $X \rightarrow *$) est une cofibration (resp. une fibration).

Propriétés de stabilité.

Si \mathcal{C} est une catégorie de modèles, alors \mathcal{C}^{op} en est une (on garde la même classe d'équivalences faibles, mais on échange les classes de cofibrations et de fibrations).

Si \mathcal{C} est une catégorie de modèles, et si X est un objet de \mathcal{C} , alors \mathcal{C}/X est une catégorie de modèles, en définissant que

si
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X & \end{array}$$
 est une flèche de \mathcal{C}/X , alors f est une

équivalence faible (resp. une cofibration, resp. une fibration) de \mathcal{C}/X si et seulement si f en est une dans \mathcal{C} .

De même $X \backslash \mathcal{C}$ est une catégorie de modèles.

Lemme de Brown.

Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles, et soit $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. On suppose données une classe W' de flèches de \mathcal{D} vérifiant la propriété du 2 sur 3.

Si F envoie les cofibrations triviales entre objets cofibrants dans W' , alors

F envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants dans W' .

(et on a une version dual en termes de fibrations triviales entre objets fibrants).

Démonstration.

Soit $X \xrightarrow{s} Y$ une équivalence faible de \mathcal{C} , X et Y étant cofibrants. On a un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow j \\ X & \longrightarrow & X \amalg Y \\ & i & \end{array}$$

ce qui montre que i et j sont des cofibrations (en particulier, $X \amalg Y$ est cofibrant). On peut ensuite factoriser la flèche

$$X \amalg Y \xrightarrow{(s, t_Y)} Y$$

$$\text{en } X \amalg Y \xrightarrow{k} Z \xrightarrow{q} Y$$

avec $k \in \mathcal{C}f$ et $q \in \text{Fib} \cap W$. Les triangles commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{k_i} & Z \\ s \searrow & & \swarrow q \\ & Y & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{k_j} & Z \\ t_Y \searrow & & \swarrow q \\ & Y & \end{array}$$

Montrent que k_i et k_j sont des cofibrations triviales entre objets cofibrants. Comme $F(k_j) \in W'$ et $F(t_Y) \in W'$, $F(q) \in W'$, et comme $F(k_i) \in W'$, on en déduit que $F(s) \in W'$.

Définition.

Soit \mathcal{C} une catégorie munie d'une classe de flèches W .

Une localisation de \mathcal{C} est la donnée d'un foncteur

$$\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$$

qui envoie les éléments de W sur des isomorphismes, et qui est universel par cette propriété: si, par toute catégorie \mathcal{D} , on note $\underline{\text{Hom}}_W(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ formée des foncteurs $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ qui envoient les éléments de W sur des isomorphismes, alors le foncteur

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}(\text{Ho}(\mathcal{C}), \mathcal{D}) & \rightarrow & \underline{\text{Hom}}_W(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \\ \Phi & \mapsto & \Phi \circ \gamma \end{array}$$

est une équivalence de catégories.

Théorème. Il existe une localisation de \mathcal{C} par W . En outre, le foncteur $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$ peut être choisi de sorte que (*) soit un isomorphisme de catégories pour tout \mathcal{D} . (on parle alors de localisation stricte de \mathcal{C} par W).

La localisation stricte de \mathcal{C} par W est définie suivant le principe suivant:

- $\text{ob Ho}(\mathcal{C}) = \text{ob } \mathcal{C}$ (le foncteur γ est l'identité sur les objets).
- $\underline{\text{Hom}}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(x, y)$ est la classe des zig-zag de longueur arbitraire $x \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot \rightarrow \cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot \leftarrow \cdot \rightarrow y$, quotientée par une relation d'équivalence adéquate.

Remarque: en général, il n'y a aucune raison pour que

$\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(x, y)$ soit un (petit) ensemble.

On admettra le résultat suivant

Théorème (Quillen).

Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles. On désigne par \mathcal{C}_c la sous-catégorie pleine de \mathcal{C} formée des objets cofibrants.

Alors l'inclusion $\mathcal{C}_c \hookrightarrow \mathcal{C}$ induit une équivalence de catégories

$$i: \text{Ho}(\mathcal{C}_c) \xrightarrow{\sim} \text{Ho}(\mathcal{C})$$

(on se localise \mathcal{C} par W , et \mathcal{C}_c par $W \cap \mathcal{C}_c$).

Plus précisément, à chaque fois que l'on choisit un clivage, c'est-à-dire, pour chaque objet X de \mathcal{C} , une équivalence

$$\text{faible } \varepsilon_X: X' \xrightarrow{\sim} X \text{ avec } X' \text{ cofibrant,}$$

il existe un unique foncteur $F: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_c)$

tel que $F(X) = X'$, et tel que F envoie les équivalences faibles de \mathcal{C} sur des isomorphismes, de sorte que les flèches ε_X induisent un isomorphisme de foncteurs $i_* F \xrightarrow{\sim} \gamma$.

Le foncteur $\text{Ho}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\bar{F}} \text{Ho}(\mathcal{C}_c)$ induit par F est alors un quasi-inverse de i .

Remarque: on a aussi une version duale: si \mathcal{C}_f désigne la sous-catégorie pleine de \mathcal{C} formée des objets fibrants, alors l'inclusion $\mathcal{C}_f \hookrightarrow \mathcal{C}$ induit une équivalence de catégories $\text{Ho}(\mathcal{C}_f) \xrightarrow{\sim} \text{Ho}(\mathcal{C})$.

Définition.

Soyent \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories de modules.

Un foncteur de Quillen à gauche (resp. à droite) $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

est un foncteur qui commute aux limites inductives (resp. projectives)

tel que $\Phi(Cf) \subset Cf$ et $\Phi(Cf \cap W) \subset Cf \cap W$ (resp. tel que

$\Phi(Fib) \subset Fib$ et $\Phi(Fib \cap W) \subset Fib \cap W$).

Une adjonction de Quillen est un couple de foncteurs adjoints

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\Phi} \\ \xleftarrow{\Psi} \end{array} \mathcal{D} \quad (\Phi \text{ désignant l'adjoint à gauche})$$

tel que Φ soit un foncteur de Quillen à gauche.

Remarque: si on a une adjonction

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\Phi} \\ \xleftarrow{\Psi} \end{array} \mathcal{D}$$

et si F et G sont deux classes de flèches dans \mathcal{C} et \mathcal{D} respectivement, on a

$$G \subset r(\Phi(F)) \iff F \subset l(\Psi(G)).$$

$$\begin{array}{ccc} \Phi(A) \longrightarrow X & & A \longrightarrow \Psi(X) \\ \Phi(i) \downarrow \nearrow \downarrow \Phi(p) & \iff & i \downarrow \nearrow \downarrow \Psi(p) \\ \Phi(B) \longrightarrow Y & & B \longrightarrow \Psi(Y) \end{array}$$

On en déduit que (Φ, Ψ) est une adjonction de Quillen si et seulement si Ψ est un foncteur de Quillen à droite.

Remarque: en vertu du lemme de Brown, tout foncteur de Quillen à gauche (resp. à droite) respecte les équivalences faibles entre objets cofibrants (resp. fibrants).

Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles.

Définition.

Soit X un objet de \mathcal{C} .

Un cylindre de X (resp. un espace ou objet des chemins de X) est un diagramme de la forme

$$X \amalg X \xrightarrow{(\partial^0, \partial^1)} IX \xrightarrow{\sigma} X$$

$$(\text{resp. } X \xrightarrow{s} X \xrightarrow{I(d^0, d^1)} X \times X)$$

tel que $(\partial^0, \partial^1) \in \mathcal{G}$ et $\sigma \in \mathcal{W}$ (resp. $(d^0, d^1) \in \text{Fib}$ et $s \in \mathcal{W}$)
et $\sigma \partial^0 = \sigma \partial^1 = 1_X$ (resp. $d^0 s = d^1 s = 1_X$).

Remarque: un cylindre de X n'est rien d'autre qu'une factorisation de la codiagonale $X \amalg X \xrightarrow{(1, 1_X)} X$ en une cofibration suivie d'une équivalence faible: en particulier, tout objet de \mathcal{C} admet au moins un cylindre.

Un espace des chemins n'est rien d'autre qu'un cylindre dans \mathcal{C}^{op} .

Définition.

Soient $A \begin{smallmatrix} f \\ \rightrightarrows \\ g \end{smallmatrix} X$ deux morphismes de \mathcal{C}

On dit que f et g sont homotopes à gauche (resp. à droite) s'il existe un cylindre de A

$$A \sqcup A \xrightarrow{(d^0, d^1)} IA \xrightarrow{\sigma} A$$

(resp. un objet des chemins de X

$$X \xrightarrow{s} X^I \xrightarrow{(d^0, d^1)} X \times X \quad)$$

et un morphisme $h: IA \rightarrow X$ (resp. $h: A \rightarrow X^I$)

tl que $h d^0 = f$ et $h d^1 = g$ (resp. $d^0 h = f$ et $d^1 h = g$).

Proposition.

Soient $A \begin{smallmatrix} f \\ \rightrightarrows \\ g \end{smallmatrix} X$ deux morphismes de \mathcal{C} . On suppose que les objets A et X sont respectivement cofibrant et fibrant.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

(1) f et g sont homotopes à gauche.

(2) f et g sont homotopes à droite.

(3) Pour tout cylindre $A \sqcup A \xrightarrow{(d^0, d^1)} IA \xrightarrow{\sigma} A$, il existe un morphisme $h: IA \rightarrow X$ tl que $h d^0 = f$ et $h d^1 = g$.

(4) Pour tout espace des chemins $X \xrightarrow{s} X^I \xrightarrow{(d^0, d^1)} X \times X$, il existe un morphisme $h: A \rightarrow X^I$ tl que $d^0 h = f$ et $d^1 h = g$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $(1) \Rightarrow (4)$.

Soit $h: IA \rightarrow X$ tel que $h\partial^0 = f$ et $h\partial^1 = g$. On peut alors former le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{sg} & X^I \\ \partial' \downarrow & \nearrow \ell & \downarrow (d^0, d^1) \in \text{Fib} \\ IA & \xrightarrow{(h, g\sigma)} & X \times X \end{array}$$

GfNW

lequel admet un relèvement ℓ . Posons $k = \ell\partial^0: A \rightarrow X^I$.
On a alors $d^0 k = d^0 \ell \partial^0 = h\partial^0 = f$,
et $d^1 k = d^1 \ell \partial^0 = g\sigma \partial^0 = g1_A = g$.

On note \sim la relation d'homotopie (à gauche ou à droite) sur ~~$\text{Hom}_{\text{Hof}}(A, X)$~~ $\text{Hom}_C(A, X)$ (avec A cofibrant et X fibrant).

Lemme

\sim est une relation d'équivalence.

Démonstration: La réflexivité est évidente, et la symétrie résulte facilement de la proposition précédente. La transitivité vient du fait que si IA et $I'A$ sont deux cylindres de A , alors s'en pose

$$\begin{array}{ccc} JA = IA \amalg I'A & & \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\partial^0} & IA \\ \partial' \downarrow & & \downarrow \\ I'A & \xrightarrow{\quad} & JA \end{array} \end{array}$$

on obtient un troisième cylindre de A ...

$h: A \rightarrow X^I$ telle que $d^0 h = u$ et $d^1 h = v$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & X^I \\ i \downarrow & \nearrow h' & \downarrow (d^0, d^1) \\ A' & \xrightarrow{(u,v)} & X \times X \end{array}$$

et on a $d^0 h' = u$, $d^1 h' = v$, i.e. $u = v$ dans $[A', X]$.

Proposition.

On a un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \text{Ho}(\mathcal{C}_c)^{\text{op}} \times \text{Ho}(\mathcal{C}_f)^{\text{op}} & \longrightarrow & \text{Ens} \\ (A, X) & \longmapsto & [A, X] \end{array}$$

Corollaire.

La catégorie $\text{Ho}(\mathcal{C}_{cf})$ admet la description explicite suivante.

Les objets sont les objets à la fois fibrants et cofibrants de \mathcal{C} , et

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C}_{cf})}(A, X) = [A, X].$$

Remarque: $\text{Ho}(\mathcal{C}_{cf}) \simeq \text{Ho}(\mathcal{C})$: tout objet de \mathcal{C} est isomorphe dans $\text{Ho}(\mathcal{C})$ à un objet à la fois fibrant et cofibrant.

Théorème (Quillen).

Pour tout objet cofibrant A et tout objet fibrant X , on a une bijection naturelle:

$$[A, X] \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(A, X).$$

Notation: $[A, X] = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) / \sim$

\mathcal{C}_c = sous-catégorie pleine de \mathcal{C} formée des objets cofibrants.

\mathcal{C}_f = sous-catégorie pleine de \mathcal{C} formée des objets fibrants.

$$\mathcal{C}_{cf} = \mathcal{C}_c \cap \mathcal{C}_f.$$

On obtient un foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_c^{\text{op}} \times \mathcal{C}_f &\longrightarrow \text{Eus} \\ (A, X) &\longmapsto [A, X] \end{aligned}$$

Lemme.

Si $A \xrightarrow{i} A'$ est une cofibration triviale entre objets cofibrants
(resp. si $X' \xrightarrow{p} X$ est une fibration triviale entre objets fibrants)
alors l'application

$$[A', X] \xrightarrow{i^*} [A, X] \quad (\text{resp. } [A, X'] \xrightarrow{p_*} [A, X])$$

est bijective.

Démonstration.

Surjectivité de i^* : Soit $A \xrightarrow{u} X$. On a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & X \\ \text{Cofib} \quad \exists i \downarrow & \nearrow \sigma, \tau & \downarrow \in \text{Fib} \\ A' & \xrightarrow{\quad} & * \end{array}$$

et donc $i^*(\sigma) = u$.

Considérons deux morphismes $A' \xrightarrow{u} X$ (tels que $i^*(u) = i^*(v)$).

On peut alors choisir un espace de chemins X^I et une homotopie

Corollaire. Si \mathcal{C} est une catégorie de modèles, alors, pour tout couple d'objets (X, Y) de \mathcal{C} , $\text{Hom}_{\text{Mod}(\mathcal{C})}(X, Y)$ est un (petit) ensemble.

Corollaire. Une flèche de \mathcal{C} est une équivalence faible si et seulement si c'est un isomorphisme dans $\text{Ho}(\mathcal{C})$.

Conséquence: une structure de catégorie de modèles fermée est totalement déterminée par la classe des cofibrations et par la classe des objets fibrants.

Définition.

Soit $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur, et $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un autre foncteur.

Une extension de Kan à gauche de F le long de γ est un

couple (F', α) où $F': \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur, et

$\alpha: F' \circ \gamma \Rightarrow F$ une transformation naturelle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \gamma \downarrow & \nearrow \alpha & \uparrow F' \\ \mathcal{C}' & & \end{array}$$

satisfaisant la propriété universelle suivante: pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \gamma \downarrow & \nearrow \beta & \uparrow G \\ \mathcal{C}' & & \end{array} \quad \beta: G \circ \gamma \Rightarrow F$$

il existe une unique transformation naturelle $G \xRightarrow{\beta} F$ telle que $\alpha \circ \gamma = \beta$.

Exemple: soit $\mathcal{C} = A$ une petite catégorie, $\mathcal{C}' = \hat{A}$, et $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ le plongement de Yoneda. Si \mathcal{D} est une catégorie admettant des limites inductives, alors pour tout foncteur $u: A \rightarrow \mathcal{D}$, le foncteur $u_!: \hat{A} \rightarrow \mathcal{D}$ est l'extension de Kan à gauche de u le long du plongement de Yoneda (on peut prendre $\alpha = 1$).

Définition.

Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux catégories. On suppose \mathcal{C} et \mathcal{C}' munies de classes de flèches W et W' respectivement, et on considère un foncteur $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$. On note

$$\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}) \text{ et } \gamma': \mathcal{C}' \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}')$$

des localisations de \mathcal{C} et \mathcal{C}' respectivement.

Un foncteur dérivé (total) à gauche de F est un couple (LF, α) où $LF: \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}')$ est un foncteur, et $\alpha: LF \circ \gamma \Rightarrow \gamma' \circ F$ une transformation naturelle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}' \\ \gamma \downarrow & \alpha \nearrow & \downarrow \gamma' \\ \text{Ho}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{LF} & \text{Ho}(\mathcal{C}') \end{array}$$

et que (LF, α) soit une extension de Kan à gauche de $\gamma' \circ F$ le long de γ .

On a une version duale: celle du foncteur dérivé total à droite de F .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}' \\ \gamma \downarrow & \beta \searrow & \downarrow \gamma' \\ \text{Ho}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{RF} & \text{Ho}(\mathcal{C}') \end{array}$$

(\Rightarrow $RF^{\text{op}}: \text{Ho}(\mathcal{C})^{\text{op}} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}')^{\text{op}}$ est un foncteur dérivé à gauche de $F^{\text{op}}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}'^{\text{op}}$).

Théorème (Pillen).

Pour tout foncteur de Pillen à gauche $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$,
le foncteur dérivé à gauche $LF: Ho(\mathcal{C}) \rightarrow Ho(\mathcal{C}')$ existe
toujours.

De plus on a :

$$1) \quad L1_{\mathcal{C}} = 1_{Ho(\mathcal{C})}: Ho(\mathcal{C}) \rightarrow Ho(\mathcal{C})$$

2) Pour tous foncteurs de Pillen à gauche

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}' \xrightarrow{F'} \mathcal{C}''$$

la transformation naturelle canonique $LF' \circ LF \Rightarrow L(F' \circ F)$

$$\begin{array}{ccccc} Ho(\mathcal{C}) & \xrightarrow{LF} & Ho(\mathcal{C}') & \xrightarrow{LF'} & Ho(\mathcal{C}'') \\ & & \downarrow & \searrow & \\ & & L(F' \circ F) & & \end{array}$$

est un isomorphisme.

(et on a bien entendu la version duale : les foncteurs de
Pillen à droite admettent des foncteurs dérivés à droite).

Démonstration : par le Lemme de Brown, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$
respecte les équivalences faibles, et induit donc un unique foncteur
 $\bar{F}: Ho(\mathcal{C}) \rightarrow Ho(\mathcal{C}')$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C} & \xrightarrow{F} \mathcal{C}' \\ & \downarrow & \downarrow \gamma' \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\gamma} & Ho(\mathcal{C}) \xrightarrow{\bar{F}} Ho(\mathcal{C}') \end{array}$$

\swarrow
 $Ho(\mathcal{C}) \xrightarrow{LF} Ho(\mathcal{C}')$

6 choix d'un clivage détermine
un quasi-inverse de $\gamma: Ho(\mathcal{C}) \rightarrow Ho(\mathcal{C}')$.

Autrement dit, si pour chaque objet X de \mathcal{C} , on choisit une équivalence faible $\alpha_X: X' \xrightarrow{\sim} X$ avec X' cofibrant, on peut poser

$$LF \circ \gamma(X) = LF(X) = F(X') \xrightarrow{\alpha_X} F(X) = \gamma' \circ F(X).$$

Théorème (Quillen).

Soit $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[\Psi]{\Phi} \mathcal{C}'$ une adjonction de Quillen.

Alors le couple de foncteurs dérivés

$$\mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \xrightleftharpoons[\mathrm{R}\Psi]{\mathrm{L}\Phi} \mathrm{Ho}(\mathcal{C}')$$

forme un couple de foncteurs adjoints :

Démonstration. Si A est cofibrant dans \mathcal{C} et X fibrant dans \mathcal{C}' , alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \Psi(X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\Phi(A), X)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \Psi(X)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\Phi(A), X) \\ \parallel & & \parallel \\ [A, \Psi(X)] & & [\Phi(A), X] \end{array}$$

et comme $\mathrm{L}\Phi(A) = \Phi(A)$ et $\mathrm{R}\Psi(X) = \Psi(X)$, on en déduit

$$\text{que } \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{C})}(A, \mathrm{R}\Psi(X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{C}')}(\mathrm{L}\Phi(A), X).$$

Construction de catégories de modèles.

Soit \mathcal{C} une catégorie admettant des limites inductives.

On se donne un petit ensemble I de flèches de \mathcal{C} , et on note $\text{Sat}(I)$ la plus petite classe saturée de flèches de \mathcal{C} contenant I .

On dit qu'un ordinal α est I -admissible si, pour tout foncteur

$$F: \alpha \rightarrow \mathcal{C}$$

vérifiant $\forall i \in \alpha, i > 0, \varinjlim_{j < i} F_j \rightarrow F_i \in \text{Sat}(I)$,
pour toute flèche $A \xrightarrow{a} B \in I$, on a, pour $X = A$ ou B :

$$\varinjlim_{i \in \alpha} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F_i) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \varinjlim_{i \in \alpha} F_i).$$

On dit que I est admissible s'il existe un ordinal I -admissible (on dira aussi que I "permet l'argument du petit objet").

Théorème (l'argument du petit objet).

Si I est admissible, alors $(\text{Sat}(I), \cap(I))$ forme un système de factorisation dans \mathcal{C} .

En outre, on a $\text{Sat}(I) = \ell(\cap(I))$.

Définition. Une catégorie de modèles \mathcal{C} est engendrée par cofibrations : il existe deux petits ensembles de flèches I et J de \mathcal{C} tels que

1) $\text{Co}f = \text{Sat}(I)$ et I est admissible.

2) $\text{Co}f \cap W = \text{Sat}(J)$ et J est admissible.

On a dans ce cas: $\text{Fib} = r(J)$ et $\text{Fib} \cap W = r(I)$.

Exemple. $\mathcal{C} = \text{Top}$.

$$I = \{ S^{n-1} \hookrightarrow B^n, n \geq 0 \}$$

$$J = \{ [0, 1]^{n-1} \times \{0\} \hookrightarrow [0, 1]^n \}$$

Les équivalences faibles de Top sont les applications continues $f: X \rightarrow Y$ telles que:

a) $\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y)$ (où π_0 désigne l'ensemble des composantes connexes par arcs)

b) $\forall x \in X, \forall n \geq 1$, en posant $y = f(x)$,

$$\pi_n(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_n(Y, y).$$

Les éléments de $r(J)$ sont appelés les fibrations de Serre.

Exemple. $\mathcal{C} = \text{Comp}(\text{Ab})$

$$I = \{ \mathbb{Z}[n-1] \hookrightarrow \text{Cône}(\mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z})[n-1], n \in \mathbb{Z} \}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \circ \\ \uparrow \\ \circ \\ \uparrow \\ \mathbb{Z} \\ \uparrow \\ \circ \\ \vdots \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} \circ \\ \uparrow \\ \mathbb{Z} \\ \uparrow \parallel \\ \mathbb{Z} \\ \uparrow \\ \circ \\ \vdots \end{array} \\ & & \begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array} \end{array}$$

$$J = \{ 0 \hookrightarrow \text{Cône}(\mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z})[n], n \in \mathbb{Z} \}.$$

Les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes.
 les morphismes de complexes $A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad H^n(A^\bullet) \cong H^n(B^\bullet).$$

les fibrations sont les surjections.

Construction de catégories de modules ^{*} ^{*} ^{*} ad hoc dans \hat{A} (cf. Ast 308)

Théorème.

Si A est une petite catégorie, tout petit ensemble de flèches I de $\mathcal{C} = \hat{A}$ est admissible, et donc définit un système de factorisation $(\text{Sat}(I), \perp(I))$ dans \hat{A} .

On fixe une petite catégorie A .

Définition.

Un module cellulaire de \hat{A} est un petit ensemble de monomorphismes I de \hat{A} tel que $\text{Sat}(I)$ soit la classe des monomorphismes de \hat{A} .

Exemple. Si $A = \Delta$, $I = \{\partial \Delta_n \hookrightarrow \Delta_n, n \geq 0\}$ est un module cellulaire de $\hat{\Delta}$.

Proposition. Il existe toujours des modules cellulaires de \hat{A} .
 Plus précisément, les monomorphismes $x \hookrightarrow y$, avec y un quotient de préfaïces représentables forment un module cellulaire (utilise l'axiome du choix).

Définition. Un intervalle de \hat{A} est un préfaisceau I sur A muni de deux sections globales séparées

$$* \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^0} \\ \xrightarrow{\partial^1} \end{array} I$$

i.e. tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \hookrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \partial^0 \\ * & \xrightarrow{\partial^1} & I \end{array}$$

est cartésien.

Notations: $\{e\} = \text{Im}(* \xrightarrow{\partial^e} I)$ pour $e = 0, 1$.
 $\partial I = \{0\} \sqcup \{1\} \hookrightarrow I$.

Exemple. Pour $A = \Delta$, on peut prendre

$$I = \Delta_1, \text{ avec } * = \Delta_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^0} \\ \xrightarrow{\partial^1} \end{array} \Delta_1.$$

On a alors $\partial I = \partial \Delta_1$.

Remarque:

Soit $X \xrightarrow{j} X'$ un carré cartésien de \hat{A} , avec

$$\begin{array}{ccc} & & \\ i \downarrow & & \downarrow i' \\ Y & \xrightarrow{j'} & Y' \end{array}$$

i et j' des monomorphismes.

Alors $Y \sqcup_X X' \rightarrow Y'$ est un monomorphisme.

On note $Y \cup X'$ son image dans Y' .

Si $X \hookrightarrow Y$ et $K \hookrightarrow L$ sont deux monomorphismes de \hat{A} , le carré commutatif

$$K \times X \longrightarrow L \times X$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ K \times Y & \longrightarrow & L \times Y \end{array}$$

est cartésien, et définit donc un monomorphisme

$$K \times Y \cup L \times X \hookrightarrow L \times Y.$$

Définition. Une structure homotopique sur \hat{A} est la donnée d'un couple (I, A_n) , où I est un intervalle de \hat{A} , et A_n une classe d'extensions anodines relativement à I , c'est-à-dire une classe de flèches de \hat{A} vérifiant les conditions suivantes.

An 0 Il existe un ensemble Λ de monomorphismes de \hat{A} tel que $A_n = \text{Sat}(\Lambda)$ (en particulier, A_n est saturée, et tout élément de A_n est un monomorphisme).

An 1 Si $K \hookrightarrow L$ est un monomorphisme, alors

$$I \times K \cup \{e\} \times L \hookrightarrow I \times L \in A_n, \quad e=0,1.$$

An 2 Si $K \hookrightarrow L \in A_n$, alors

$$I \times K \cup \partial I \times L \hookrightarrow I \times L \in A_n.$$

Exemple.

Soit I un intervalle de \hat{A} , et S un ensemble de monomorphismes de \hat{A} .

On choisit un module cellulaire M de \hat{A} . On note alors

$$\Lambda_I(S, M)$$

l'ensemble des flèches de \hat{A} de la forme

$$I \times K \cup \{e\} \times L \hookrightarrow I \times L, \quad K \hookrightarrow L \in M, \quad e=0,1,$$

et de la forme

$$I \times U \cup \partial I \times V \hookrightarrow I \times V, \quad U \hookrightarrow V \in S.$$

On pose $A_{n,I}(S) = \text{Sat}(\Lambda_I(S, M))$.

Proposition.

Le couple $(I, An_I(S))$ est une structure homotopique sur \hat{A} . En outre, $An_I(S)$ est la plus petite classe d'extensions anodines relativement à I : pour toute structure homotopique de la forme (I, An) , on a en effet

$$S \subset An \Leftrightarrow \Lambda_I(S, M) \subset An \Leftrightarrow An_I(S) \subset An.$$

La preuve de la proposition repose sur le principe suivant.

Soient $U \xrightarrow{i} L$, $K \xrightarrow{j} L$ et $X \xrightarrow{p} Y$ des morphismes de \hat{A} . On a la correspondance suivante, par adjonction:

$$\begin{array}{ccc} K \times V \amalg L \times U & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow k & \nearrow & \downarrow p \\ L \times V & \xrightarrow{\quad} & Y \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad} & \underline{\text{Hom}}(L, X) \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow q \\ V & \xrightarrow{\quad} & \underline{\text{Hom}}(L, Y) \times \underline{\text{Hom}}(K, X) \\ & & \underline{\text{Hom}}(K, Y) \end{array}$$

où k et q sont les morphismes induits par les carrés commutatifs suivants.

$$\begin{array}{ccc} K \times U & \xrightarrow{\quad} & L \times U \\ \downarrow & & \downarrow \\ K \times V & \xrightarrow{\quad} & L \times V \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}(L, X) & \xrightarrow{\quad} & \underline{\text{Hom}}(K, X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\text{Hom}}(L, Y) & \xrightarrow{\quad} & \underline{\text{Hom}}(K, Y) \end{array}$$

On a donc: $k \in \ell(p) \Leftrightarrow i \in \ell(q)$.

En particulier, pour j et p fixés, la classe des flèches $U \xrightarrow{i} V$ telles que $k \in \ell(p)$ est saturée.

Exemple.

Si I est un intervalle de \hat{A} , on peut prendre $S = \emptyset$. On notera alors $An_I = An_I(\emptyset)$.

Exemple.

Si on a un ensemble de monomorphismes S que l'on veut inverser, mais pas d'intervalle préféré, on définit

$$An(S) = An_I(S)$$

où I est n'importe quel intervalle de \hat{A} qui est injectif.

Un tel intervalle I existe toujours: on factorise la codiagonale $* \amalg * \rightarrow *$ en un monomorphisme $* \amalg * \hookrightarrow I$ suivi d'une fibration triviale $I \rightarrow *$.

On peut démontrer alors que la classe $An(S)$ ne dépend pas du choix de I , et que la structure de catégorie de modèles associée à $(I, An(S))$ ne dépend que de S .

Exemple.

La structure homotopique de Gabriel-Zisman sur $\hat{\Delta}$ est

$$(\Delta, An_{\Delta}).$$

Exemple.

La structure homotopique de Joyal sur $\hat{\Delta}$ est

$$(J, An_J(\Lambda^{int}))$$

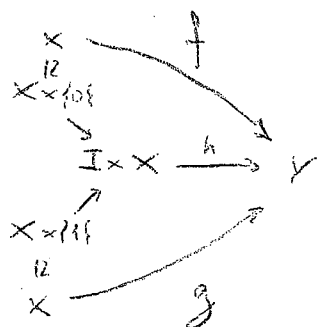
où $J = N\pi_1([1])$ et $\Lambda^{int} = \{ \Lambda_n^k \hookrightarrow \Delta_n, n \geq 2, 0 \leq k < n \}$

(avec $\pi_1[1]$ le groupoïde dont l'ensemble des objets est $\{0, 1\}$ et tel que $Hom(0, 1) = Hom(1, 0) = Hom(0, 0) = Hom(1, 1) = *$).

Revenons au cas général. On rappelle qu'un morphisme de \hat{A} est une fibration triviale s'il a la propriété de relèvement à droite relativement aux monomorphismes de \hat{A} (une fois choisi un modèle cellulaire M de \hat{A} , la classe des fibrations triviales est $\tau(M) = \tau(\text{Sat}(M))$). On appellera c-fibrations les monomorphismes de \hat{A} .

On fixe à présent une structure homotopique (I, A_n) sur \hat{A} .
On veut associer à (I, A_n) une structure de catégorie de modèles sur \hat{A} .

On dit que deux morphismes $X \xrightleftharpoons[f]{f} Y$ sont I -homotopes s'il existe une I -homotopie de f vers g , c'est-à-dire un morphisme $h: I \times X \rightarrow Y$ tel que le diagramme suivant commute.



$$h|_{I_0 \times X} = f$$

$$h|_{I_1 \times X} = g$$

On note $[X, Y]$ le quotient de $\text{Hom}_{\hat{A}}(X, Y)$ par la relation de I -homotopie. Ce passage au quotient est compatible à la composition des morphismes de \hat{A} , de sorte qu'on obtient une catégorie $h_I \hat{A}$ dont les objets sont ceux de \hat{A} , et telle que

$$\text{Hom}_{h_I \hat{A}}(X, Y) = [X, Y].$$

On a aussi un foncteur canonique $Q: \hat{A} \rightarrow h_I \hat{A}$ qui est l'identité sur les objets, induit par les projections

$$\text{Hom}_{\hat{A}}(X, Y) \rightarrow [X, Y].$$

Définition.

Un morphisme de \hat{A} est une fibration noire s'il vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à An .

Un préfibré X sur A est fibrant si $X \rightarrow *$ est une fibration noire.

Un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de \hat{A} est une équivalence faible si, pour tout objet fibrant Z , l'application

$$[Y, Z] \xrightarrow{f^*} [X, Z]$$

est bijective.

Un morphisme de \hat{A} est une cofibration triviale s'il est à la fois une cofibration et une équivalence faible.

Un morphisme de \hat{A} est une fibration s'il vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations triviales.

Remarque:

On a deux systèmes de factorisation:

- $(\{\text{cofibrations}\}, \{\text{fibrations triviales}\})$
- $(\{\text{extensions anodines}\}, \{\text{fibrations noires}\})$

Il convient de distinguer les notions d'extension anodine et de cofibration triviale, ainsi que celles de fibration noire et de fibration.

Proposition.

Soient X et Z deux préfaisceaux sur A , avec Z fibrant.

La relation de I -homotopie est une relation d'équivalence sur $\text{Hom}_A(X, Z)$.

Démonstration.

La réflexivité est immédiate: Si $f: X \rightarrow Z$ est un morphisme,

$I \times X \xrightarrow{\sigma_X} X \xrightarrow{f} Z$ est une I -homotopie de f vers f .

Montrons à présent que s'il existe une I -homotopie $h: I \times X \rightarrow Z$ de u vers v et une I -homotopie $k: I \times X \rightarrow Z$ de u vers w , alors il existe une I -homotopie $l: I \times X \rightarrow Z$ de v vers w .

On a alors un diagramme

$$\begin{array}{ccc} (I \times \partial I \times X) \cup (\{0\} \times I \times X) & \xrightarrow{(h,k), u\sigma_X} & Z \\ \text{An } \ni \downarrow & \nearrow H & \\ I \times I \times X & & \end{array}$$

avec $(h,k): I \times \partial I \times X \cong (I \times X) \amalg (I \times X) \xrightarrow{(h,k)} Z$

et $u\sigma_X: \{0\} \times I \times X \cong I \times X \xrightarrow{\sigma_X} X \xrightarrow{u} Z$.

On pose $l = H \cup \{1\} \times I \times K$ et on a alors

$$l|_{\{0\} \times K} = v \text{ et } l|_{\{1\} \times K} = w.$$

En posant $u' = u$ et $k = u\sigma_X$, on obtient la symétrie. La transitivité découle de ce même résultat et de la symétrie.

Proposition. Toute extension anodine est une cofibration triviale.

Démonstration.

Soit $j: K \rightarrow L \in \mathcal{A}n$ et Z un objet fibrant, et montrons que

$j^*: [L, Z] \rightarrow [K, Z]$ est bijective.

Injectivité: soient $\ell_0, \ell_1: L \rightarrow Z$ tels que $\varphi(\ell_0 j) = \varphi(\ell_1 j)$.

Il existe alors une I -homotopie h de $\ell_0 j$ vers $\ell_1 j$, d'où un diagramme

$$\begin{array}{ccc} I \times K \cup \partial I \times L & \xrightarrow{(h, (\ell_0, \ell_1))} & Z \\ \text{An} \ni \downarrow & \nearrow H & \\ I \times L & & \end{array}$$

tel que $H|_{\{e\} \times L} = \ell_e$, $e=0,1$, i.e. $\varphi(\ell_0) = \varphi(\ell_1)$.

surjectivité. Si $k \in \text{Hom}_{\hat{\mathcal{A}}} (K, Z)$, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k} & Z \\ j \downarrow & \nearrow \ell & \\ L & & \end{array}$$

et donc $k = j^*(\ell)$.

Corollaire: Toute fibration est une fibration naïve.

Proposition.

Un morphisme entre objets fibrants est une équivalence faible si et seulement si c'est une I -équivalence d'homotopie (i.e. un isomorphisme de $h_I \hat{\mathcal{A}}$).

Démonstration: cela résulte du lemme de Yoneda appliqué à la sous-catégorie pleine de $h_I \hat{\mathcal{A}}$ formée des objets fibrants.

Définition.

Un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de \hat{A} est un rétracté par déformation (resp. le dual d'un rétracté par déformation) s'il existe un morphisme

$g: Y \rightarrow X$ et un morphisme $h: I \times Y \rightarrow Y$ (resp. $k: I \times X \rightarrow X$) tels que:

$$(i) \quad g \circ f = 1_X \quad (\text{resp. } f \circ g = 1_Y)$$

$$(ii) \quad h|_{\{0\} \times Y} = 1_Y \quad \text{et} \quad h|_{\{1\} \times Y} = f \circ g$$

$$(\text{resp. } k|_{\{0\} \times X} = 1_X \quad \text{et} \quad k|_{\{1\} \times X} = g \circ f)$$

$$(iii) \quad h(1_I \times f) = \sigma_Y(1_I \times f) \quad (\text{resp. } f \circ k = f \circ \sigma_X).$$

Proposition.

Tout rétracté par déformation est une extension anodine

Démonstration.

Soit $i: K \rightarrow L$ un rétracté par déformation. Il existe alors des morphismes $r: L \rightarrow K$ et $h: I \times L \rightarrow L$ tels que $r \circ i = 1_K$ et $h|_{\{0\} \times L} = 1_L$, $h|_{\{1\} \times L} = i \circ r$, $h(1_I \times i) = \sigma_L(1_I \times i)$.

On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} I \times K \cup \{1\} \times L & \xrightarrow{(u \circ r, u \circ i)} & X \\ \downarrow & \nearrow k & \downarrow p \\ I \times L & \xrightarrow{\sigma \circ h} & Y \end{array}$$

associé à tout carré commutatif $\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ L & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$ avec p fibration moire.

En posant $\ell = k|_{\{0\} \times L}$ on a $\ell i = u$ et $p \ell = v$.

Proposition. Toute extension anodine de source et de but fibrants est un rétracté par déformation.

Démonstration.

Soit $i: K \rightarrow L$ une extension anodine, avec K et L fibrants.

On a alors $K \xrightarrow{\sim} iK$.

$$\begin{array}{ccc}
 & i & \nearrow r \\
 & \downarrow & \\
 & L & \\
 \text{d'où} & I \times K \cup \partial I \times L & \xrightarrow{(i\sigma_K, (1_L, i\sigma))} L \\
 & \downarrow & \nearrow h \\
 & I \times L &
 \end{array}$$

et le couple (r, h) fait de i un rétracté par déformation.

Proposition. Toute fibration triviale est le dual d'un rétracté par déformation.

Démonstration.

Soit $p: X \rightarrow Y$ une fibration triviale. On a alors

$$\begin{array}{ccc}
 \emptyset & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & \xrightarrow{s} & \downarrow p \\
 Y & \xrightarrow{=} & Y
 \end{array}
 \quad p s = 1_Y, \text{ d'où}$$

$$\begin{array}{ccc}
 I \times Y \cup \partial I \times X & \xrightarrow{(s\sigma_Y, (1_X, p))} & X \\
 \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\
 I \times X & \xrightarrow{\sigma_X} X & \xrightarrow{p} Y
 \end{array}$$

Le couple (s, h) fait de p le dual d'un rétracté par déformation.

Corollaire. Une fibration de \hat{A} est une équivalence faible si et seulement si elle est une fibration triviale.

Démonstration.

Toute fibration triviale est à la fois une fibration et une équivalence faible.

Réciproquement, si $p: X \rightarrow Y$ est une fibration et une équivalence faible, on a une factorisation

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X' \\ p \downarrow & \nearrow q & \\ Y & & \end{array}$$

avec i une cofibration, et q une fibration triviale.

Mécanisme i est une cofibration triviale, et donc p est un rétracté de q .

Lemme. Soit $p: X \rightarrow Y$ une fibration naïve. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) p est une fibration triviale.

(ii) p est le dual d'un rétracté par déformation.

Démonstration.

On sait que (i) \Rightarrow (ii). Supposons (ii) vérifié.

Considérons un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{a} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ L & \xrightarrow{b} & Y \end{array} \quad \text{avec } i \text{ une cofibration.}$$

Soyent $s: Y \rightarrow X$ et $k: I \times X \rightarrow X$ faisant de p un dual d'un rétracté par déformation. On a alors le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} I \times K \cup \{1\} \times L & \xrightarrow{(k(1_I \times a), sb)} & X \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ I \times L & \xrightarrow{\sigma_L} L \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

et on pose $h|_{\{0\} \times L} = p$. On a alors $li = a$ et $pl = b$.

Lemme. Une fibration moire de but fibrant est une équivalence faible si et seulement si c'est une fibration triviale.

Démonstration.

Soit $p: X \rightarrow Y$ une fibration moire, avec Y (et donc X) fibrant. Supposons que p soit une équivalence faible. On va montrer que p est le dual d'un rétracté par déformation.

Soyent $t: Y \rightarrow X$ et $k: I \times Y \rightarrow Y$ tels que $k|_{\{0\} \times Y} = 1_Y$ et $k|_{\{1\} \times Y} = pt$ (t et k existent, puisque p est une I -équivalence d'homotopie, i.e. un isomorphisme de $h_I \hat{A}$).

On a alors

$$\begin{array}{ccc} Y \simeq \{1\} \times Y & \xrightarrow{t} & X \\ \downarrow & \nearrow k' & \downarrow p \\ I \times Y & \xrightarrow{k} & Y \end{array}$$

et on pose $s = k'|_{\{0\} \times Y}$. On a alors $\sigma_Y = k|_{\{0\} \times Y} = pk'|_{\{0\} \times Y} = ps$.

Comme $\varphi(p)$ est un isomorphisme de $h_I \vec{A}$ et $1_Y = \varphi(ps) = \varphi(p)\varphi(s)$, on a aussi $\varphi(s)\varphi(p) = \varphi(sp) = 1_X$.

Il existe donc $h: I \times X \rightarrow X$ tel que

$$h|_{\{0\} \times X} = 1_X \text{ et } h|_{\{1\} \times X} = \varepsilon_P.$$

On obtient un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\{1\} \times I \times X) \cup (I \times 2I \times X) & \xrightarrow{(sp_{\sigma_X}, (h, sph))} & & X \\
 \downarrow & \searrow H & & \downarrow p \\
 I \times I \times X & \xrightarrow{1_I \times \sigma_X} & I \times X & \xrightarrow{h} X \xrightarrow{p} Y
 \end{array}$$

avec $Sp \sigma_x : \{1\} \times I \times X \simeq I \times X \xrightarrow{\sigma_x} X \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{s} X$.

$$\text{et } (h, \text{sph}): I \times \partial I \times X \simeq I \times X \amalg I \times X \longrightarrow X.$$

On pose $K = H \Big|_{\{0\} \times I \times X} : I \times X \longrightarrow X$. Le couple (S, K) fait alors de p le dual d'un rétract par déformation.

Proposition. Une cofibration de but fibrant est une équivalence faible si et seulement si c'est une extension anodine.

Démonstration. Soit i une cofibration de but fibrant. On la factorise en $i = qj$, avec j une extension anodine et q une fibration naïve. Soit a , d'après le lemme précédent, que c'est une équivalence faible si et seulement si q est une fibration triviale. Le lemme du stade conclut la preuve.

Théorème.

Une cofibration est une équivalence faible si et seulement si elle vérifie la propriété de relèvement à gauche relativement à la classe des fibrations naires de but fibrant.

En particulier, toute fibration naire de but fibrant est une fibration, et, pour tout pré-faisceau X sur A , la flèche $X \rightarrow *$ est une fibration si et seulement si X est fibrant.

Démonstration.

Soit $K \xrightarrow{a} X$ avec i une cofibration triviale et p une fibration naire de but fibrant.

$$\begin{array}{ccc} i \downarrow & & \downarrow p \\ L & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

On choisit une extension anodine de but fibrant $j: L \rightarrow L'$. Alors j est une extension anodine. On a donc

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{a} & X \\ i \downarrow & \nearrow l' & \downarrow p \\ L & & Y \\ j \downarrow & \nearrow b' & \\ L' & & \end{array}$$

On pose $l = l'j$ et on a $li = a$ et $pl = b$.

Réciproquement, si i vérifie la propriété de relèvement à gauche relativement aux fibrations naires de but fibrant, on choisit $j: L \rightarrow L'$ une extension anodine de but fibrant, et une factorisation $j = pk$, avec k une extension anodine, et p une fibration naire (de but fibrant).

Alors j est un rétracté de k , et donc est une extension anodine.
il en résulte que i est une équivalence faible.

Corollaire. Les cofibrations triviales forment une classe
de flèches saturées de \hat{A} .

Des considérations ensemblistes permettent de prouver la

Proposition: il existe un ensemble J de cofibrations
triviales tel que $\text{Sat}(J)$ soit la classe des cofibrations
triviales.

Autrement dit, on a le

Théorème. La structure homotopique (I, An) définit
une structure de catégorie de modèles en \hat{A} dont les
cofibrations sont les monomorphismes, les objets fibrants
sont les préfaisceaux X tels que $X \rightarrow *$ soit une fibration
nœud, et les fibrations entre objets fibrants sont les
fibrations nœuds entre objets fibrants.

Remarque: le foncteur canonique $h_I \hat{A} \rightarrow Ho(\hat{A})$
admet un adjoint à droite pleinement fidèle et identifie
 $Ho(\hat{A})$ avec la localisation de $h_I(\hat{A})$ par les équivalences
faibles. Autrement dit, si $h'_I \hat{A}$ désigne la sous-catégorie
pleine de $h_I \hat{A}$ formée des objets fibrants, alors

$$h'_I \hat{A} \rightarrow Ho(\hat{A})$$

est une équivalence de catégories.

Le foncteur $An^{-1} \hat{A} \rightarrow H_0(\hat{A})$ est une équivalence de catégories.

En effet, si $X \xrightarrow{f} Y$ est une flèche de \hat{A} , on peut former le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{j} & Y' \end{array}$$

avec i et j des extensions anodines, et p une fibration naïve de but fibrant. Si f est une équivalence faible, alors p est une fibration triviale, et donc p admet une section $s: Y' \rightarrow X'$, laquelle est une extension anodine (puisque cofibration triviale de but fibrant). En inversant i , j et s , on inverse donc nécessairement f . Cela prouve que $An^{-1} \hat{A}$ et $H_0(\hat{A})$ ont la même propriété universelle.

Remarque. Un morphisme de \hat{A} est une équivalence faible si et seulement si son image dans $H_0(\hat{A})$ est un isomorphisme.

Théorème. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles, et

$$F: \hat{A} \rightarrow \mathcal{C}$$

un foncteur qui commute aux limites inductives et qui envoie les monomorphismes sur des cofibrations.

Alors F est un foncteur de Quillen à gauche si et seulement si F envoie les extensions anodines sur des cofibrations triviales.

Proposition. Supposons que $An = \text{Sat}(A)$ et qu'il existe un module cellulaire M de \hat{A} tel que, pour tous $K \hookrightarrow L \in M$ et $U \hookrightarrow V \in A$, on ait

$$K \times V \cup L \times U \hookrightarrow L \times V \in An.$$

Alors pour tout monomorphisme $K \hookrightarrow L$ et toute extension anodine $U \hookrightarrow V$,

$$K \times V \cup L \times U \rightarrow L \times V$$

est une extension anodine, et en outre, les équivalences faibles de \hat{A} sont stables par produits finis.

Exemple: les conditions de la proposition ci-dessus sont vérifiées dans le cas où $An = An_I$ pour un intervalle I donné.

C'est donc le cas, en particulier, pour la structure homotopique de Gabriel-Zisman.

Remarque: sous les hypothèses de la proposition précédente, on a donc: pour toute fibration $p: X \rightarrow Y$ et toute cofibration $i: K \rightarrow L$, une fibration

$$q: \underline{\text{Hom}}(L, X) \rightarrow \frac{\underline{\text{Hom}}(K, X) \times \underline{\text{Hom}}(L, Y)}{\underline{\text{Hom}}(K, Y)}$$

si en outre p ou i est une équivalence faible, alors q est une fibration triviale.

En particulier, si X est fibrant, alors $\underline{\text{Hom}}(K, X)$ est fibrant pour tout K . On définit $R\underline{\text{Hom}}(K, X) = \underline{\text{Hom}}(K, X')$ pour $X \rightarrow X'$ une équivalence faible de but fibrant. On a alors pour tous X, Y, Z dans \hat{A} :

$$\text{Hom}_{\hat{A}}(X \times Y, Z) \cong \text{Hom}_{\hat{A}}(X, R\underline{\text{Hom}}(Y, Z)).$$

Extensions ordonnées fondamentales.

Présentation du nerf d'un ensemble ordonné fini.

Soit E un ensemble ordonné. On note SdE l'ensemble des sous-ensembles finis, non vides, et totalement ordonnés de E .

SdE est ordonné par l'inclusion.

Pour $S, S' \in SdE$, on a $S \cap S' \in SdE$ ou $S \cap S' = \emptyset$.

On en déduit que $N(S) \cap N(S') = N(S \cap S')$ est ou bien

le nerf d'un ensemble fini totalement ordonné, ou bien vide.

On peut donc écrire $\bigcup_{S \in SdE} N(S) \cong \varinjlim_{S \in SdE} N(S)$.

D'autre part, tout n -simplexe $\sigma: \Delta_n = N[n] \rightarrow NE$ est le nerf d'une application croissante $[n] \xrightarrow{\sigma} E$ dont l'image est un élément de SdE . On en déduit que

$$\varinjlim_{S \in SdE} N(S) \cong N(E).$$

Lorsque E est fini, on obtient donc la présentation suivante pour un nerf. Soient S_1, \dots, S_k les éléments maximaux de SdE . Par chaque indice i , $1 \leq i \leq k$, on a un isomorphisme

$$c_i: \Delta_{n_i} \xrightarrow{\sim} N(S_i).$$

et pour $i < j$, un isomorphisme

$$c_{ij}: \Delta_{n_{ij}} \xrightarrow{\sim} N(S_i \cap S_j)$$

(où on a posé $\Delta_{n_{ij}} = \emptyset$ lorsque $S_i \cap S_j = \emptyset$). On obtient une suite exacte

$$\coprod_{i < j} \Delta_{n_{ij}} \begin{matrix} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \end{matrix} \coprod_i \Delta_{n_i} \longrightarrow N(E)$$

on se est induit par les inclusions $S_i \cap S_j \subset S_j$, et σ par les inclusions $S_i \cap S_j \subset S_i$.

Soient $p, q \geq 0$. On applique ce qui précède à $E = [p] \times [q]$. Pour décrire une présentation de $N([p] \times [q]) = \Delta_p \times \Delta_q$, il suffit donc de décrire les sous-ensembles ordonnés maximaux dans $\text{Sol } E$. Ce sont les images des applications croissantes injectives $[p+q] \hookrightarrow [p] \times [q]$ (il y en a $\binom{p+q}{p}$). Cette présentation permet de calculer certains sous-objets de $\Delta_p \times \Delta_q$.

Proposition (Joyal).

Les trois familles de monomorphismes suivantes engendrent la même classe saturée de monomorphismes d'ensembles simpliciaux.

1) L'ensemble A_1 formé des inclusions de cornets intérieurs

$$\Lambda_n^k \hookrightarrow \Delta_n \quad , \quad n \geq 2, \quad 0 < k < n.$$

2) L'ensemble A_2 formé des inclusions de la forme

$$\Delta_m \times \Lambda_2^1 \cup \partial \Delta_m \times \Delta_2 \hookrightarrow \Delta_m \times \Delta_2 \quad , \quad m \geq 0.$$

3) La famille A_3 formée des inclusions de la forme

$$L \times \Lambda_2^1 \cup K \times \Delta_2 \hookrightarrow L \times \Delta_2$$

pour $K \hookrightarrow L$ un monomorphisme quelconque.

Démonstration. Comme $\mathcal{M} = \{\partial \Delta_m \hookrightarrow \Delta_m, m \geq 0\}$ est un module cellulaire de $\hat{\Delta}$, on sait déjà que

$$\text{Sat}(A_2) = \text{Sat}(A_3).$$

Montrons que $A_1 \subset \text{Sat}(A_3)$.

Soient $n \geq 2$ et $0 < k < n$. On définit les applications croissantes suivantes.

$$s: [n] \longrightarrow [n] \times [2]$$

$$r: [n] \times [2] \longrightarrow [n]$$

$$s(j) = \begin{cases} (j, 0) & \text{si } j < i \\ (j, 1) & \text{si } j = i \\ (j, 2) & \text{si } j > i \end{cases}$$

$$r(j, k) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \text{ et } k = 0 \\ j & \text{si } j > i \text{ et } k = 2 \\ i & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient ainsi des morphismes (via le foncteur ref)

$$\Delta_n \xrightarrow{s} \Delta_n \times \Delta_2 \xrightarrow{r} \Delta_n$$

tel que $rs = 1_{\Delta_n}$. On vérifie en outre que

$$s(\Lambda_n^k) \subset \Delta_n \times \Lambda_2' \cup \Lambda_n^k \times \Delta_2 \text{ et que}$$

$$r(\Delta_n \times \Lambda_2' \cup \Lambda_n^k \times \Delta_2) \subset \Lambda_n^k.$$

On obtient ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_n^k & \longrightarrow & \Delta_n \times \Lambda_2' \cup \Lambda_n^k \times \Delta_2 & \longrightarrow & \Lambda_n^k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_n & \xrightarrow{s} & \Delta_n \times \Delta_2 & \xrightarrow{r} & \Delta_n \end{array}$$

Autrement dit, l'inclusion $\Lambda_n^k \hookrightarrow \Delta_n$ est un rétracté d'un élément de A_3 , d'où $A_1 \subset \text{Sat}(A_3) = \text{Sat}(A_2)$.

Il reste à démontrer que $A_2 \subset \text{Sat}(A_1)$. Soit $m \geq 0$.

Pour $0 \leq i \leq j \leq m$, on définit

$$[m+1] \xrightarrow{u_{ij}} [m] \times [2]$$

$$\text{par } u_{ij}(k) = \begin{cases} (k, 0) & \text{si } 0 \leq k \leq i \\ (k-1, 1) & \text{si } i+1 \leq k \leq j+1 \\ (k-1, 2) & \text{si } j+2 \leq k \leq m+1 \end{cases}$$

$$\text{et on note } u_{ij} = \text{Fan}(\Delta_{m+1} \xrightarrow{u_{ij}} \Delta_m \times \Delta_2).$$

On définit ensuite $X(j) \subset \Delta_m \times \Delta_2$, $0 \leq j \leq m$,
par

$$X(0) = \Delta_m \times \Lambda'_2 \cup \partial \Delta_m \times \Delta_2$$

$$X(j+1) = X(j) \cup \bigcup_{i=0}^j \mathcal{U}_{ij} \quad j < m.$$

On vérifie qu'on a un carré cartésien (et donc cocartésien)

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{m+1}^{k+2} & \xrightarrow{\quad} & X(j) \cup \bigcup_{i=0}^k \mathcal{U}_{ij} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_{m+1} & \xrightarrow{\quad u_{k+1,j} \quad} & X(j) \cup \bigcup_{i=0}^{k+1} \mathcal{U}_{ij} \end{array} \quad -1 \leq k \leq j$$

d'où on déduit que $X(j) \rightarrow X(j+1) \in \text{Sat}(A_1)$
(comme composé d'éléments de $\text{Sat}(A_1)$).

Pour prolonger cette filtration, on définit ensuite, pour
 $0 \leq i \leq j \leq m$,

$$[m+2] \xrightarrow{\sigma_{ij}} [m] \times [2]$$

par:

$$\sigma_{ij}(k) = \begin{cases} (k, 0) & \text{si } 0 \leq k \leq i \\ (k-1, 1) & \text{si } i+1 \leq k \leq j+1 \\ (k-2, 2) & \text{si } j+2 \leq k \leq m+2 \end{cases}$$

On pose ensuite: $V_{ij} = \text{Im} \left(\Delta_{m+2} \xrightarrow{\sigma_{ij}} \Delta_m \times \Delta_2 \right)$.

On définit une filtration

$$X(m) = Y(0) \subset Y(1) \subset \dots \subset Y(m+1) = \Delta_m \times \Delta_2$$

par $Y(j+1) = Y(j) \cup \bigcup_{i=0}^j V_{ij}$. On vérifie comme

ci-dessus que les inclusions $Y(j) \rightarrow Y(j+1)$ sont des composés
d'images directes d'inclusion de cornes intérieures, et donc sont dans $\text{Sat}(A_1)$.

Définition.

On appelle extensions anodines intérieures les éléments de la classe de morphismes d'ensembles simpliciaux saturée engendrée par les inclusions $\Lambda_n^k \hookrightarrow \Delta_n$, $n \geq 2$, $0 < k < n$.

On appelle fibrations de Kan intérieures les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite relativement aux extensions anodines intérieures.

Remarque: par définition, un ensemble simplicial X est une ∞ -catégorie si et seulement si $X \rightarrow *$ est une fibration de Kan intérieure.

Exemple: $u: A \rightarrow B \in \text{Cat} \Rightarrow N_u: NA \rightarrow NB$ est une fibration de Kan intérieure.

Corollaire.

Un morphisme d'ensembles simpliciaux $X \rightarrow Y$ est une fibration de Kan intérieure si et seulement si le morphisme

$$\underline{\text{Hom}}(\Delta_2, X) \longrightarrow \frac{\underline{\text{Hom}}(\Delta_2, Y) \times \underline{\text{Hom}}(\Lambda_2^1, X)}{\underline{\text{Hom}}(\Lambda_2^1, Y)}$$

est une fibration triviale.

Corollaire.

Un ensemble simplicial X est une ∞ -catégorie si et seulement si le morphisme

$$\underline{\text{Hom}}(\Delta_2, X) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\Lambda_2^1, X) = \frac{\underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X) \times \underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X)}{X}$$

est une fibration triviale.

Corollaire. Si A est une ∞ -catégorie, alors $\underline{\text{Hom}}(X, A)$ en est une aussi.

Proposition (Gabriel-Zisman).

Les trois familles de morphismes suivantes engendrent la même famille saturée de monomorphismes.

1) L'ensemble B_1 (resp. B'_1) formé des inclusions de la forme

$$\Delta_n^k \rightarrow \Delta_n \text{ pour } 0 \leq k \leq n \text{ (resp. pour } 0 < k \leq n).$$

2) L'ensemble B_2 (resp. B'_2) formé des inclusions de la forme

$$\Delta_1 \times \partial \Delta_n \cup \{0\} \times \Delta_n \hookrightarrow \Delta_1 \times \Delta_n, \quad n \geq 0$$

$$\text{(resp. } \Delta_1 \times \partial \Delta_n \cup \{1\} \times \Delta_n \hookrightarrow \Delta_1 \times \Delta_n, \quad n \geq 0).$$

3) La classe des inclusions de la forme

$$\Delta_1 \times K \cup \{e\} \times L \hookrightarrow \Delta_1 \times L, \text{ pour } K \hookrightarrow L \text{ un monomorphisme et } e = 0 \text{ (resp. et } e = 1).$$

Démonstration.

Montrons que $B'_2 \subset \text{Sat}(B'_1)$. Soit $n \geq 0$. Pour $0 \leq i \leq n$, on note $c_i: [n+1] \rightarrow [1] \times [n]$ l'unique application strictement croissante qui prend les valeurs $(0, i)$ et $(1, i)$, et on pose

$$C_i = \text{Im} \left(\Delta_{n+1} \xrightarrow{c_i} \Delta_1 \times \Delta_n \right).$$

On définit une filtration

$$\Delta_1 \times \partial \Delta_n \cup \{1\} \times \Delta_n = A_{-1} \subset A_0 \subset \dots \subset A_n = \Delta_1 \times \Delta_n$$

en posant: $A_{i+1} = A_i \cup C_{i+1}$ pour $-1 \leq i \leq n$.

On a alors des carrés cartésiens (et donc cocartésiens) de la forme suivante.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{n+1}^{i+1} & \longleftrightarrow & A_{i+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_n & \xrightarrow{\sigma_i} & A_i \end{array} \quad 0 \leq i \leq n.$$

On a donc bien $B'_2 \in \text{Sat}(B'_1)$, et par dualité, $B_2 \in \text{Sat}(B_1)$.

Montrons que $B_1 \in \text{Sat}(B_2)$. Soit $n \geq 1$, et $0 \leq k < n$.

On construit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_n^k & \xrightarrow{s} & \Delta_1 \times \Lambda_n^k \cup \{0\} \times \Delta_n & \xrightarrow{r} & \Lambda_n^k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_n & \xrightarrow{s} & \Delta_1 \times \Delta_n & \xrightarrow{r} & \Delta_n \end{array} \quad rs=1$$

où $s: [n] \rightarrow [1] \times [n]$ et $r: [1] \times [n] \rightarrow [n]$ est
 $i \mapsto (1, i)$

définie par $r(1, i) = i$ et $r(0, i) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq k \\ k & \text{sinon.} \end{cases}$

Corollaire: $An_{\Delta_1} = \text{Sat} \{ \Lambda_n^k \longleftrightarrow \Delta_n \mid n \geq 1, 0 \leq k \leq n \}$.

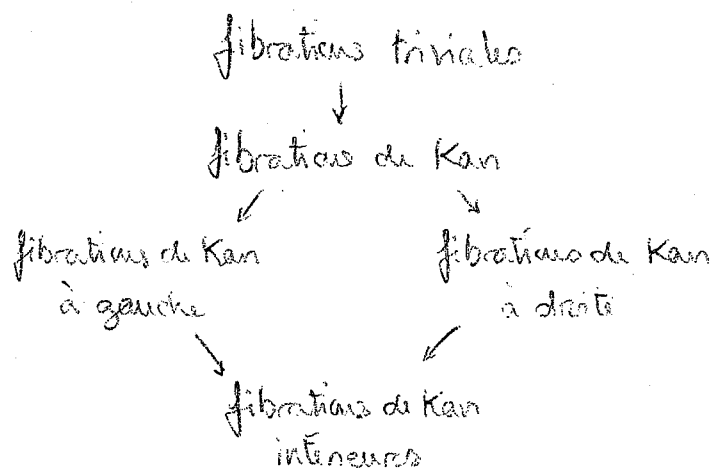
Démonstration:

$$An_{\Delta_1} = \text{Sat} \{ \Delta_1 \times \partial \Delta_n \cup \{e\} \times \Delta_n \longleftrightarrow \Delta_1 \times \Delta_n \mid n \geq 0, e=0, 1 \}.$$

Définition.

Un morphisme d'ensembles simpliciaux est une extension anodine (resp. une extension anodine à gauche, resp. une extension anodine à droite) si elle appartient à la classe saturée engendrée par les inclusions de la forme $\Delta_n^k \hookrightarrow \Delta_n$ pour $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$ (resp. $0 \leq k < n$, resp. $0 < k \leq n$).

Un morphisme d'ensembles simpliciaux est une fibration de Kan (resp. une fibration de Kan à gauche, resp. une fibration de Kan à droite) si il a la propriété de relèvement à droite relativement aux extensions anodines (resp. aux extensions anodines à gauche, resp. aux extensions anodines à droite).



Remarque : par définition, un ensemble simplicial X est un ω -groupeoïde si et seulement si $X \rightarrow *$ est une fibration de Kan.

Les fibrations de Kan sont les fibrations naires relativement à la structure homotopique $(\Delta_1, \text{An}_{\Delta_1})$.

Définition. La structure de catégorie de modèles de Quillen sur $\hat{\Delta}$ est la catégorie de modèles définie par la structure homotopique $(\Delta_1, An_{\Delta_1})$.

Par définition, les objets fibrants de cette structure sont les ∞ -groupoïdes, et les fibrations entre objets fibrants sont les fibrations de Kan entre ∞ -groupoïdes.

On a l'adjonction

$$\hat{\Delta} \begin{matrix} \xrightarrow{\tau} \\ \xleftarrow{N} \end{matrix} Gr$$

et les faits suivants:

- Si X est ∞ -groupoïde, alors $\tau(X)$ est un groupoïde.
- Si G est un groupoïde, alors $N(G)$ est un ∞ -groupoïde.

On en déduit une adjonction

$$\infty-Gr \begin{matrix} \xrightarrow{\tau} \\ \xleftarrow{N} \end{matrix} Gr$$

où $\infty-Gr$ est la sous-catégorie pleine de $\hat{\Delta}$ formée des ∞ -groupoïdes, et Gr est la catégorie des groupoïdes.

Lorsque X est un groupoïde, on note $\pi_1(X) = \tau(X)$.

Soit I le groupoïde défini par

$$ob I = \{0, 1\}$$

$$Hom_I(i, j) = * \quad \text{par tous } (i, j) \in ob I^2.$$

On a un foncteur $[1] \rightarrow I$ qui est l'identité sur les objets.

Si on note $J = N(I)$, on en déduit un morphisme

$$\Delta_1 \rightarrow J$$

qui est une extension anodine: c'est un monomorphisme, $J \rightarrow *$ est une Δ_1 -équivalence d'homotopie, et J est un ω -groupoïde. En particulier, $\Delta_1 \hookrightarrow J$ est une cofibration triviale du but fibrant, et donc elle appartient à An_{Δ_1} .

L'objet J est naturellement muni d'une structure d'intervalle. On en déduit la

Proposition.

Un morphisme de groupoïdes est une équivalence faible si et seulement s'il est une J -équivalence d'homotopie.

Démonstration. Les ω -groupoïdes sont les objets à la fois fibrants et cofibrants de la structure de catégorie de modèles de Quillen sur $\hat{\Delta}$.

On appellera équivalences de ω -groupoïdes les morphismes de ω -groupoïdes qui sont des J -équivalences d'homotopie.

Proposition.

Un foncteur entre groupoïdes $G \rightarrow G'$ est une équivalence de groupoïdes si et seulement si $N(G) \rightarrow N(G')$ est une équivalence de ω -groupoïdes.

Si $X \rightarrow Y$ est une équivalence de ω -groupoïdes, alors $\tau(X) \rightarrow \tau(Y)$ est une équivalence de groupoïdes.

Démonstration. Le foncteur τ commute aux produits, et comme $\tau J = I$, il envoie les équivalences de ω -groupoïdes sur des I -équivalences d'homotopie, i.e. sur des équivalences de groupoïdes.

Définition. La structure de catégorie de modèles de Joyal sur $\hat{\Delta}$ est la structure de catégorie de modèles associée à la structure homotopique $(J, An_J(S))$ où

$$S = \{ \Lambda_n^k \hookrightarrow \Delta_n \mid n \geq 2, 0 < k < n \}.$$

On appelle J-extensions anodines les éléments de $An_J(S)$, et J-fibrations les éléments de $r(An_J(S))$. Les équivalences faibles de cette structure de catégorie de modèles fermée seront appelées les équivalences faibles catégoriques.

Par définition, on a :

- toute extension anodine intérieure est une J-extension anodine.
- toute J-extension anodine est une extension anodine.
- un morphisme d'ensembles simpliciaux $X \rightarrow Y$ est une J-fibration si et seulement si c'est une fibration de Kan intérieure et si $\underline{Hom}(J, X) \rightarrow \underline{Hom}(J, Y) \times_Y X$ est une fibration triviale.
- Les équivalences faibles catégoriques sont stables par produits finis.
- Toute fibration de Kan est une J-fibration.
- Un morphisme de ∞ -groupoïdes est une équivalence faible catégorique si et seulement si c'est une équivalence de ∞ -groupoïdes.

On dira qu'un ensemble simplicial est J -fibrant si $X \rightarrow *$ est une J -fibration.

Proposition.

Pour un ensemble simplicial X , les conditions suivantes sont équivalentes.

- (1) X est J -fibrant.
- (2) X est une ω -catégorie, et le morphisme

$$\underline{\text{Hom}}(J, X) \rightarrow X = \underline{\text{Hom}}(\{0\}, X)$$

est une fibration triviale.

Corollaire.

Pour toute petite catégorie C , $N(C)$ est J -fibrant.

Démonstration: laissée à titre d'exercice. Cela résultera du:

Théorème fondamental (Joyal).

Toute ω -catégorie est J -fibrante.

La preuve de ce théorème requiert l'introduction d'outils plus évolués, ce que nous allons aborder au chapitre suivant.

Propriétés élémentaires des fibrations de Kan

Définition.

Un foncteur $f: A \rightarrow B$ est une isofibration si, pour tout objet a , de A , et tout isomorphisme $\beta: b_0 \xrightarrow{\sim} f(a)$ dans B , il existe un isomorphisme $\alpha: a_0 \xrightarrow{\sim} a$, dans A tel que $f(a_0) = b_0$ et $f(\alpha) = \beta$.

Soit X une ω -catégorie. On dit qu'une flèche de X

$$u: \Delta_1 \rightarrow X$$

est quasi-inversible, ou encore, est un quasi-isomorphisme, si la flèche de τX correspondante est un isomorphisme.

Un morphisme de ω -catégories $f: X \rightarrow Y$ est une isofibration s'il est une fibration de Kan intérieure, et si, pour tout carré commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc} \{1\} & \xrightarrow{a_1} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \Delta_1 & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

tel que β soit quasi-inversible dans Y , il existe $\alpha: \Delta_1 \rightarrow X$ quasi-inversible tel que $f\alpha = \beta$.

Proposition. Une fibration de Kan intérieure $f: X \rightarrow Y$ est une isofibration si et seulement si $\tau f: \tau X \rightarrow \tau Y$ est une isofibration.

Démonstration.

La description explicite de τX et τY implique facilement la proposition.

Corollaire. Un foncteur est une isofibration si et seulement si son nerf est une isofibration.

Corollaire. Un morphisme de ∞ -catégories $f: X \rightarrow Y$ est une isofibration si et seulement si $f^{op}: X^{op} \rightarrow Y^{op}$ en est une.

Exemple: pour toute ∞ -catégorie X , le morphisme canonique $\eta_X: X \rightarrow N\tau X$ est une isofibration.

En effet, η_X est une fibration de Kan intérieure: rien a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n^k & \xrightarrow{a} & X \\ \downarrow & & \downarrow \eta_X \\ \Delta_n & \xrightarrow{b} & N\tau X \end{array}, \quad 0 < k < n,$$

ou a un relèvement

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n^k & \xrightarrow{a} & X \\ \downarrow & \nearrow a' & \\ \Delta_n & & \end{array}$$

et on voit que $\eta_X a' = b$ car $\eta_X a' \big|_{\Lambda_n^k} = b \big|_{\Lambda_n^k}$.

On conclut facilement grâce à la description explicite de τX .

Exercice: si X est un ∞ -groupe, alors $\eta_X: X \rightarrow N\tau X$ est une fibration de Kan.

Définition

Un foncteur $f: A \rightarrow B$ est conservatif si toute flèche de A dont l'image par f est un isomorphisme dans B est un isomorphisme dans A .

Un morphisme de ∞ -catégories est conservatif si son image par τ est un foncteur conservatif.

Exemple.

Pour toute ∞ -catégorie X , le morphisme $\eta_X: X \rightarrow N_\tau X$ est conservatif.

Proposition. Soient X et Y deux ∞ -catégories.

Soit $p: X \rightarrow Y$ une fibration de Kan à droite (resp. à gauche). Alors p est une isofibration conservative.

Démonstration.

Il suffit de traiter le cas où p est une fibration de Kan à droite (quitte à remplacer p par $p^{op}: X^{op} \rightarrow Y^{op}$).

Il suffit de montrer que p est conservative (car l'inclusion $\{1\} \hookrightarrow \Delta_1$ n'est autre que le coratet $\Lambda_1^1 \hookrightarrow \Delta_1$).

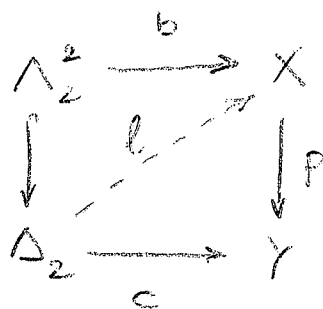
Soit $f: \Delta_1 \rightarrow X$ tel que $pf: \Delta_1 \rightarrow Y$ soit quasi-inversible.

On a alors un triangle commutatif dans Y de la forme

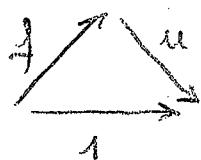
$$\begin{array}{ccc} pf & \nearrow & v \\ & c & \searrow \\ & i & \end{array}$$

$$c: \Delta_2 \rightarrow Y.$$

On a un morphisme $\Lambda_2^2 \xrightarrow{b} X$ défini par $\begin{array}{ccc} f & \nearrow & \\ & i & \rightarrow \end{array}$, de sorte qu'on obtient un carré commutatif:



Autrement dit, on a un triangle commutatif dans X de la forme



avec $pu = v$.

Comme v est quasi-inversible dans Y , ce qui précède appliqué à u donne un triangle commutatif dans X de la forme



Cela montre que f est quasi-inversible dans X .

Opérations de recollement et produits fibrés relâchés

Ensembles simpliciaux augmentés.

Soit Δ_+ la catégorie dont les objets sont les ensembles totalement ordonnés $[n] = \{0, \dots, n\}$ pour $n \geq -1$ (on a donc $[-1] = \emptyset$), et dont les flèches sont les applications croissantes.

Un ensemble simplicial augmenté est un préfaisceau sur Δ_+ .

On a une inclusion évidente $i: \Delta \hookrightarrow \Delta_+$, d'où un triplet de foncteurs adjoints $i_!, i^*, i_*$.

$$\begin{array}{ccc} & i_! & \\ \hat{\Delta} & \xrightleftharpoons{i^*} & \hat{\Delta}_+ \\ & i_* & \end{array}$$

Un ensemble simplicial augmenté $\hat{\Delta}_+^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ peut être décrit par la donnée d'un triplet (X, E, \bar{E}) , où X est un ensemble simplicial, et où $E: X_0 \rightarrow \bar{E}$ est une application. De ce point de vue, les morphismes

$$(X, E, \bar{E}) \rightarrow (X', E', \bar{E}')$$

sont simplement les couples (f, g) , où $f: X \rightarrow X'$ est un morphisme d'ensembles simpliciaux, et $g: E \rightarrow \bar{E}'$ est une application, tel que le carré suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f_0} & X'_0 \\ E \downarrow & & \downarrow E' \\ E & \xrightarrow{g} & \bar{E}' \end{array}$$

On peut aussi décrire les fonctions i_f et i_* explicitement.
 Si X est un ensemble simplicial, alors $i_f(X)$ (resp. $i_*(X)$)
 est l'ensemble simplicial X muni de l'augmentation
 $X_0 \xrightarrow{1} X_0$ (resp. $X_0 \rightarrow *$).

On a une structure monoidale (non symétrique) sur Δ_+
 induite par la somme des ordinaux:

$$\Delta_+ \times \Delta_+ \longrightarrow \Delta_+ \\ ([m], [n]) \longmapsto [m+1+n]$$

Cette structure monoidale se prolonge par limite inductive
 de manière (essentiellement) unique en une structure
 monoidale sur $\hat{\Delta}_+$

$$\hat{\Delta}_+ \times \hat{\Delta}_+ \longrightarrow \hat{\Delta}_+ \\ (X, Y) \longmapsto X * Y$$

(l'objet unité est $[-1]$). On peut décrire $X * Y$
 comme suit.

Proposition. Si X et Y sont deux ensembles simpliciaux
 augmentés, alors pour tout $n \geq -1$, on a

$$(X * Y)_n = \coprod_{i+j=n} X_i \times Y_j$$

Démonstration. Pour $p, q \geq -1$, on a:

$$\text{Hom}_{\Delta_+}([n], [p+1+q]) = \coprod_{i+j=n} \text{Hom}_{\Delta_+}([i], [p]) \times \text{Hom}_{\Delta_+}([j], [q]).$$

On conclut par passage à la limite inductive.

Dans la suite, on identifie $\hat{\Delta}$ avec la sous-catégorie pleine de $\hat{\Delta}_+$ formée des ensembles simpliciaux augmentés (X, ε, E) tels que $E = *$ (l'image essentielle de i_*).
Il résulte de la proposition précédente que

$$X, Y \in \hat{\Delta} \Rightarrow X * Y \in \hat{\Delta}$$

On a donc un foncteur de recollement

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} \times \hat{\Delta} &\longrightarrow \hat{\Delta} \\ (X, Y) &\longmapsto X * Y. \end{aligned}$$

On a la formule $X * \emptyset = \emptyset * X = X$ (car $i_*(\emptyset) = [-1]$), et des inclusions naturelles

$$X \amalg Y \longleftrightarrow X * Y.$$

Par un ensemble simplicial T fixé, on obtient des foncteurs

$$\begin{aligned} (-) * T : \hat{\Delta} &\longrightarrow T \setminus \hat{\Delta} \\ X &\longmapsto (T \longrightarrow X * T) \\ T * (-) : \hat{\Delta} &\longrightarrow T \setminus \hat{\Delta} \\ X &\longmapsto (T \longrightarrow T * X) \end{aligned}$$

Proposition. Les foncteurs $(-) * T$ et $T * (-)$ commutent aux limites inductives.

Démonstration: ces foncteurs respectent l'objet initial. Il suffit donc de vérifier qu'ils commutent aux limites inductives connexes, ce qui résulte facilement de la description explicite de $X * Y$.

Si $t: T \rightarrow X$ est un morphisme d'ensembles simpliciaux, on note

$$X/_t, \text{ ou encore } X/_T \text{ (resp. } A \setminus X \text{ en } T \setminus X)$$

l'image de $(X, t) \in T \setminus \hat{\Delta}$ par l'adjoint à droite de $(-)*T$ (resp. de $T*(-)$).

Remarque: on a $(X/_T)^{op} = T^{op} \setminus X^{op}$.

L'opération de recollement est associative

$$A*(B*C) \cong (A*B)*C$$

de sorte qu'on a des formules du type

$$X/_S *_T \cong (X/_T)/_S$$

Étant donné un morphisme $S*T \rightarrow X$, on a aussi

$$(S \setminus X)/_T \cong S \setminus (X/_T).$$

Lemme. On a les formules suivantes.

Si $K \hookrightarrow L$ et $U \hookrightarrow V$ sont des monomorphismes d'ensembles simpliciaux, alors le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K*U & \hookrightarrow & K*V \\ \downarrow & & \downarrow \\ L*U & \hookrightarrow & L*V \end{array}$$

est un carré cartésien dont toutes les flèches sont des monomorphismes. On écrit

$$L*U \cup_{K*U} K*V \cong L*U \amalg_{K*U} K*V \subset L*V.$$

$$\text{On a } \partial \Delta_m * \Delta_n \cup \Delta_m * \partial \Delta_n = \partial \Delta_{m+1+n}$$

$$\Lambda_m^k * \Delta_n \cup \Delta_m * \partial \Delta_n = \Lambda_{m+1+n}^k$$

$$\partial \Delta_m * \Delta_n \cup \Delta_m * \Lambda_n^k = \Lambda_{m+1+n}^{m+1+k}$$

(en fait que sous-objets de $\Delta_{m+1+n} = \Delta_m * \Delta_n$).

Théorème (Joyal). Soient X et Y des ∞ -catégories.

Soit $p: X \rightarrow Y$ une fibration de Kan intérieure.

On considère un carré commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n^0 & \xrightarrow{a} & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \Delta_n & \xrightarrow{b} & Y \end{array} \quad n \geq 2.$$

On suppose que $a(0,1): \Delta_1 \rightarrow X$ est quasi-inversible.

Alors il existe $\ell: \Delta_n \rightarrow X$ tel que $p\ell = b$ et $\ell|_{\Lambda_n^0} = a$.

($a(0,1)$ est le composé de a et du morphisme $\Delta_1 \rightarrow \Lambda_n^0$ induit par l'inclusion $[1] \hookrightarrow [n]$).

Ce théorème est une conséquence immédiate de l'enné plus général suivant, en regard de l'identification

$$\Lambda_1^0 * \Delta_m \cup \Delta_1 * \partial \Delta_m = \Lambda_{m+2}^0 \quad \text{avec } n = m+2$$

et $m \geq 0$:

Théorème de cohérence. Soient X et Y des ∞ -catégories.

Soit $p: X \rightarrow Y$ une fibration de Kan intérieure.

On se donne un monomorphisme $S \hookrightarrow T$ et

un carré commutatif de la forme suivante.

$$\begin{array}{ccc} \{0\} * T \cup \Delta_1 * S & \xrightarrow{a} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ \Delta_1 * T & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

On suppose en outre que $a(0, i): \Delta_1 \rightarrow X$ est quasi-inversible (où $a(0, i)$ est la composée de a avec l'inclusion $\Delta_1 \hookrightarrow \Delta_1 * S \hookrightarrow \{0\} * T \cup \Delta_1 * S$).

Alors il existe $l: \Delta_1 * T \rightarrow X$ tel que $pl = b$ et $li = a$.

La preuve nécessite encore quelques petits pas.

Lemme

Soient $A \xrightarrow{i} B$ et $S \xrightarrow{j} T$ deux monomorphismes d'ensembles simpliciaux. On note

$$A * T \cup B * S \xrightarrow{u} B * T$$

l'inclusion correspondante. Alors, pour tout morphisme $X \rightarrow Y$, on a une bijection entre les diagrammes suivants:

$$\begin{array}{ccc} A * T \cup B * S \rightarrow X & & A \rightarrow X/T \\ u \downarrow \nearrow & \Downarrow & \downarrow j/j \\ B * T \rightarrow Y & \Leftrightarrow & B \rightarrow Y/T \times_{Y/S} X/S \end{array}$$

Lemme

Soit $p: X \rightarrow Y$ une fibration de Kan intérieure. Alors pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq k < n$, et tout morphisme $t: \Delta_n \rightarrow X$, la projection

$$\cancel{p} X / \Delta_n \rightarrow X / \bigwedge_n^k \times_{Y / \bigwedge_n^k} Y / \Delta_n$$

est une fibration triviale.

Démonstration.

Par un $n \geq 0$, on a

$$\Delta_m * \bigwedge_n^k \cup \partial \Delta_m * \Delta_n = \bigwedge_{m+n+1}^{k+m+1} \text{ avec } 0 \leq k+m+1 \leq m+n+1.$$

On conclut donc grâce au lemme précédent.

Théorème.

Soit $p: X \rightarrow Y$ une fibration de Kan intérieure.

On considère un monomorphisme $S \xrightarrow{j} T$, et on se donne un morphisme $t: T \rightarrow X$.

Alors la projection

$$p/j: X/T \rightarrow X/S \times_{Y/S} Y/T$$

est une fibration de Kan à droite.

Si en outre Y est une ∞ -catégorie, alors X/T et $X/S \times_{Y/S} Y/T$ sont des ∞ -catégories.

Démonstration.

Soit $\Lambda_n^k \hookrightarrow \Delta_n$ avec $0 < k \leq n$. On a les correspondances:

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda_n^k & \longrightarrow & X/T \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 \Delta_n & \longrightarrow & X/S \times_{Y/S} Y/T
 \end{array}
 \quad \Longleftrightarrow \quad
 \begin{array}{ccc}
 \Lambda_n^k * T \cup \Delta_n * S & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 \Delta_n * T & \longrightarrow & Y
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 S & \longrightarrow & \Delta_n \setminus X \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow q \\
 T & \longrightarrow & \Lambda_n^k \setminus X \times_{\Lambda_n^k \setminus Y} \Delta_n \setminus Y
 \end{array}$$

Or q est une fibration triviale (par la version duale du lemme précédent), ce qui implique l'existence de relèvements.

Le cas où $Y = *$ nous dit que $X/T \rightarrow X/S$ est une fibration de Kan à droite, et le cas où $S = \emptyset$ nous dit que $X/T \rightarrow X$ est une fibration de Kan à droite. Si X est une ∞ -catégorie, alors X/T en est donc une aussi. On en déduit d'autre part que la projection de $Y/T \times_{Y/S} X/S$ sur X/S est une fibration de Kan à droite (puisqu'elle est obtenue de $Y/T \rightarrow Y/S$ par changement de base), d'où on déduit que $Y/T \times_{Y/S} X/S$ est aussi une ∞ -catégorie.

Preuve du théorème de cohérence.

Soit $p: X \rightarrow Y$ une fibration de Kan intérieure, avec X et Y des ∞ -catégories, et considérons un carré commutatif de la forme :

$$\begin{array}{ccc} \{0\} * T \cup \Delta_1 * S & \xrightarrow{a} & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \Delta_1 * T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

avec $S \hookrightarrow T$ un monomorphisme, et $a(0,1)$ quasi-inversible.

Pour montrer l'existence d'un relèvement $l: \Delta_1 * T \rightarrow X$ dans ce carré, il suffit de trouver un relèvement dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \longrightarrow & X/T \\ \downarrow & & \downarrow g \\ \Delta_1 & \xrightarrow{\alpha} & X/S \times_{Y/S} Y/T \end{array}$$

Or on a un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccccc} & \alpha & & X/S \times_{Y/S} Y/T & \longrightarrow & Y/T \\ & \nearrow & & \downarrow q & & \downarrow \\ \Delta_1 & & & X/S & \longrightarrow & Y/S \\ & \searrow a(0,1) & & \downarrow \pi & & \\ & & & X & & \end{array}$$

Comme q et π sont des fibrations de Kan à droite, elles sont conservatives, de sorte que α est quasi-inversible.

D'autre part, g est aussi une fibration de Kan à droite, et donc g est une isofibration, ce qui prouve l'existence du relèvement souhaité.

Théorème.

Une ∞ -catégorie X est un ∞ -groupoïde si et seulement si toutes ses flèches sont quasi-inversibles (ce qui revient à dire que $\tau(X)$ est un groupoïde).

L'inclusion $i: Gr \rightarrow Cat$ de la catégorie des groupoïdes dans la catégorie des catégories admet un adjoint à gauche

$$\pi_1: Cat \rightarrow Gr$$

et un adjoint à droite

$$k: Cat \rightarrow Gr$$

On a $\pi_1(C) = C^{-1}C$ (localisation de C par toutes ses flèches).

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{f \in FC} \Delta_1 & \xrightarrow{\quad} & C \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \coprod_{f \in FC} I & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(C) \end{array}$$

On a $k(C)$ défini par $ob\ k(C) = ob\ C$ et $Fl\ k(C) =$ isomorphismes de C .
 $k(C) \subset C$.

Si X est une ∞ -catégorie, on définit $k(X)$ par le produit fibré suivant:

$$\begin{array}{ccc} k(X) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \eta_X \\ Nk\tau X & \longrightarrow & N\tau X \end{array}$$

Corollaire:

$k(X)$ est un ∞ -groupoïde; en outre $k(X)$ est le plus grand ∞ -groupoïde contenu dans X .

Un n -simplexe $\Delta_n \xrightarrow{\alpha} X$ se factorise par $k(X)$ si et seulement si, pour tous $0 \leq i < j \leq n$, la flèche induite $\alpha_i \xrightarrow{\alpha_{(i,j)}} \alpha_j$ est quasi-inversible dans X .

En outre, on a un isomorphisme canonique

$$\tau k(X) \cong k\tau(X).$$

Corollaire:

Le foncteur $\infty\text{-Cat} \xrightarrow{k} \infty\text{-Gr}$ est un adjoint à droite du foncteur d'inclusion $\infty\text{-Gr} \hookrightarrow \infty\text{-Cat}$.

Corollaire:

Soit X une ∞ -catégorie. Une flèche de X

est quasi-inversible si et seulement si il existe un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow j & \nearrow & \end{array}$$

Démonstration.

Si α est quasi-inversible, alors on a une factorisation:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \xrightarrow{\alpha} & k(x) \hookrightarrow X \\ \downarrow & & \downarrow \\ J & \longrightarrow & * \end{array}$$

et comme $\Delta_1 \rightarrow J$ est une extension anodine, on en déduit l'existence du relèvement voulu.

Proposition.

Pour toute ∞ -catégorie X , l'inclusion $k(X) \hookrightarrow X$ est une isofibration (conservative).

Démonstration:

L'inclusion $k(X) \hookrightarrow X$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux inclusions de la forme

$$\Lambda_n^k \hookrightarrow \Delta_n \quad , \quad n \geq 2, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Proposition.

Soit $p: X \rightarrow Y$ une fibration de Kan à gauche (resp. à droite). Si X et Y sont des ∞ -groupoïdes, alors p est une fibration de Kan.

Corollaire.

Les fibres d'une fibration de Kan à gauche (resp. à droite) sont des ∞ -groupoïdes.

∞ -catégories de foncteurs.

Soit $p: X \rightarrow Y$ une fibration de Kan intérieure.

Par tout monomorphisme $A \rightarrow B$, le morphisme

$$\underline{\text{Hom}}(B, X) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(A, X) \times_{\underline{\text{Hom}}(A, Y)} \underline{\text{Hom}}(B, Y)$$

est encore une fibration de Kan intérieure.

En particulier, par tout ∞ -catégorie X et tout ensemble simplicial A , $\underline{\text{Hom}}(A, X)$ est une ∞ -catégorie, et, par tout monomorphisme $A \hookrightarrow B$,

$$\underline{\text{Hom}}(B, X) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(A, X)$$

est une fibration de Kan intérieure.

Si A est un ensemble simplicial, on note

$$\text{Ob } A = \coprod_{a \in A_0} \Delta_0.$$

On a une inclusion canonique $\text{Ob } A \hookrightarrow A$ qui est l'identité sur les 0-simplices.

Si X est une ∞ -catégorie, on a donc une fibration de Kan intérieure

$$\begin{aligned} \text{ev}: \underline{\text{Hom}}(A, X) &\rightarrow \underline{\text{Hom}}(\text{Ob } A, X) \cong \prod_{a \in A_0} X \\ F &\mapsto (F_a)_{a \in A_0} \end{aligned}$$

On définit la ∞ -catégorie $k(A, X)$ par le carré cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 k(A, X) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(A, X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 k \underline{\text{Hom}}(\text{ob } A, X) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(\text{ob } A, X) \\
 \parallel & & \parallel \\
 \prod_{a \in A_0} k X & & \prod_{a \in A_0} X
 \end{array}$$

Comme $k \underline{\text{Hom}}(\text{ob } A, X)$ est un complexe de Kan, on voit que $k(A, X)$ est une ∞ -catégorie.

On peut penser à $k(A, X)$ comme aux morphismes de foncteurs qui sont quasi-inversibles argument par argument. En effet, un n -simplexe $\Delta_n \xrightarrow{\alpha} \underline{\text{Hom}}(A, X)$ appartient à $k(A, X)$ si et seulement si le morphisme induit

$$\Delta_n \times A \xrightarrow{\bar{\alpha}} X$$

vérifie que, pour tout $a \in A_0$, le n -simplexe

$$\text{ev}_a(\alpha): \Delta_n \times \Delta_0 \xrightarrow{1 \times a} \Delta_n \times A \xrightarrow{\bar{\alpha}} X$$

se factorise par $k(X)$.

Si B est un ensemble simplicial, on note $k(B, X)$ le sous-ensemble simplicial de $\underline{\text{Hom}}(B, X)$ formé des n -simplices

$$\Delta_n \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(B, X)$$

tel que le morphisme correspondant $B \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\Delta_n, X)$ se factorise par $k(\Delta_n, X)$.

On a donc, pour toute ∞ -catégorie X et tous ensembles simpliciaux A et B , une bijection naturelle:

$$\text{Hom}_{\hat{\Delta}}(A, h(B, X)) \cong \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(B, k(A, X)).$$

On vérifie sans difficulté que $h(B, X) \hookrightarrow \text{Hom}(B, X)$ est une fibration de Kan intérieure, et donc que $h(B, X)$ est aussi une ∞ -catégorie.

Soit $p: X \rightarrow Y$ une fibration de Kan intérieure entre ∞ -catégories. On a un morphisme

$$ev_1: h(\Delta_1, X) \rightarrow X \times_Y h(\Delta_1, Y)$$

induit par l'inclusion $\{1\} \hookrightarrow \Delta_1$.

Dire que p est une isofibration revient à dire que ev_1 a la propriété de relèvement à droite relativement à l'inclusion $\emptyset = \partial\Delta_0 \hookrightarrow \Delta_0$. On a en effet une correspondance:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset \longrightarrow h(\Delta_1, X) & & \{1\} \longrightarrow X \\ \downarrow \quad \swarrow \quad \downarrow ev_1 & \rightsquigarrow & \downarrow \quad \swarrow \quad \downarrow p \quad \text{a quasi-inversible} \\ \Delta_0 \longrightarrow X \times_Y h(\Delta_1, Y) & & \Delta_1 \xrightarrow{y} Y \quad y \quad " \end{array}$$

Théorème. Le morphisme $ev_1: h(\Delta_1, X) \rightarrow X \times_Y h(\Delta_1, Y)$ a la propriété de relèvement à droite relativement aux inclusions de la forme $\partial\Delta_n \hookrightarrow \Delta_n$ pour $n \geq 1$. En particulier, p est une isofibration si et seulement si ev_1 est une fibration triviale.

Démonstration.

On remarque tout d'abord que si $A \hookrightarrow B$ est une inclusion d'ensembles simpliciaux induisant une bijection sur les 0-simplices $A_0 \cong B_0$, alors le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} h(B, X) & \longrightarrow & \underline{Hom}(B, X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ h(A, X) & \longrightarrow & \underline{Hom}(A, X) \end{array}$$

est cartésien.

Si $n \geq 1$, l'inclusion $\partial \Delta_n \hookrightarrow \Delta_n$ est l'identité sur les 0-simplices, de sorte qu'on a une correspondance

$$\begin{array}{ccc} \partial \Delta_n \longrightarrow h(\Delta_1, X) & & \Delta_1 \times \partial \Delta_n \cup \{1\} \times \Delta_n \xrightarrow{a} X \\ \downarrow \quad \nearrow & \downarrow \text{ev}_1 & \downarrow \\ \Delta_n \longrightarrow X \times h(\Delta_1, Y) & \iff & \Delta_1 \times \Delta_n \xrightarrow{b} Y \end{array}$$

avec $b \in k(\Delta_n, Y)_1$
et $a|_{\Delta_1 \times \partial \Delta_n} \in k(\partial \Delta_n, X)_1$.

On rappelle qu'on a une filtration

$$\Delta_1 \times \partial \Delta_n \cup \{1\} \times \Delta_n = A_{-1} \subset A_0 \subset \dots \subset A_n = \Delta_1 \times \Delta_n$$

avec des carrés cocartésiens de la forme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{n+1}^{(i)} & \hookrightarrow & A_{i-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_{n+1} & \xrightarrow{\zeta} & A_i \end{array} \quad \text{ou } i \leq n$$

où ζ est induit par $[n+1] \hookrightarrow [1] \times [n]$, l'unique injection qui prend les valeurs $(0, i)$ et $(1, i)$.

En posant $a_{-1} = a$, on obtient successivement des relations:

$$\begin{array}{ccc}
 & \Delta_i \times \partial \Delta_n \cup \{i\} \times \Delta_n & \xrightarrow{a} X \\
 & \downarrow & \nearrow a_{i-1} \\
 \Lambda_{n+1}^{i+1} & \longrightarrow A_{i-1} & \\
 \downarrow & \downarrow & \nearrow a_i \\
 \Delta_{n+1} & \longrightarrow A_i & \\
 \downarrow & \downarrow & \\
 \Delta_i \times \Delta_n & \xrightarrow{b} Y & \downarrow p
 \end{array}$$

Le cas où $0 \leq i \leq n-1$ provient du fait que $0 < i+1 \leq n+1$ et que p est une fibration de Kan intérieure, et le cas où $i=n$ résulte du théorème de cohérence, car $a_{n-1}(n, n+1)$ est inversible par hypothèse.

Théorème.

Soit $p: X \rightarrow Y$ une isofibration entre ∞ -catégories.

Alors, pour tout monomorphisme d'ensembles simpliciaux

$A \hookrightarrow B$, le morphisme

$$q: k(B, X) \longrightarrow \frac{k(A, X) \times k(B, Y)}{k(A, Y)}$$

est une fibration de Kan entre ∞ -groupoïdes.

Démonstration. On commence par remarquer qu'on a un carré cartésien de la forme

$$\begin{array}{ccc}
 k(B, x) & \xrightarrow{\quad} & \underline{\text{Hom}}(B, x) \\
 q \downarrow & & \downarrow \\
 \begin{array}{c} k(A, x) \times k(B, y) \\ k(A, y) \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{c} \underline{\text{Hom}}(A, x) \times \underline{\text{Hom}}(B, y) \\ \underline{\text{Hom}}(A, y) \end{array}
 \end{array}$$

d'où on déduit que q est une fibration de Kan inférieure entre ∞ -catégories.

La correspondance

$$C \rightarrow k(A, x) \quad \longleftrightarrow \quad A \rightarrow h(C, x)$$

induit une correspondance

$$\begin{array}{ccc}
 \{1\} \longrightarrow k(B, x) & & A \longrightarrow h(\Delta_1, x) \\
 \downarrow \dashrightarrow \downarrow q & \longleftrightarrow & \downarrow \dashrightarrow \downarrow \\
 \Delta_1 \longrightarrow \begin{array}{c} k(A, x) \times k(B, y) \\ k(A, y) \end{array} & & B \longrightarrow \begin{array}{c} X \times h(\Delta_1, y) \\ y \end{array}
 \end{array}$$

Il reste donc à prouver que q vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux inclusions

$$\Delta_1 \times \partial\Delta_n \cup \{1\} \times \Delta_n \hookrightarrow \Delta_1 \times \Delta_n$$

pour $n \geq 1$ (puisque on vient de vérifier le cas $n=0$).

Considérons un carré commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_1 \times \partial\Delta_n \cup \{1\} \times \Delta_n & \longrightarrow & k(B, x) \\
 \downarrow & & \downarrow q \\
 \Delta_1 \times \Delta_n & \longrightarrow & \begin{array}{c} k(A, x) \times k(B, y) \\ k(A, y) \end{array}
 \end{array}$$

Il correspond à un carré commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc} B \times \partial \Delta_n \cup A \times \Delta_n & \longrightarrow & h(\Delta_1, X) \\ \downarrow & \nearrow \ell & \downarrow \\ B \times \Delta_n & \longrightarrow & X \underset{Y}{\times} h(\Delta_1, Y) \end{array}$$

ce dernier admettant un relèvement ℓ en vertu du théorème précédent. Il restera vérifier que le morphisme

$$\Delta_1 \times \Delta_n \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(B, X)$$

induit par ℓ se factorise par $k(B, X)$. Cela résulte encore une fois du fait que $B \times \partial \Delta_n \rightarrow B \times \Delta_n$ est bijectif sur les objets (puisque $n > 0$).

On a ainsi prouvé que q est une fibration de Kan à gauche. Par dualité, q est donc une fibration de Kan.

Le cas $A = \emptyset$ et $Y = *$ montre que $k(B, X)$ est un complexe de Kan, et le cas $Y = *$ implique que $k(B, X) \rightarrow k(A, X)$ est une fibration de Kan. Le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} k(B, Y) \times_{k(A, Y)} k(A, X) & \longrightarrow & k(A, X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(B, Y) & \longrightarrow & k(A, Y) \end{array}$$

implique donc que $k(B, Y) \times_{k(A, Y)} k(A, X)$ est un complexe de Kan.

Conséquence. Si X est une ω -catégorie, alors, pour tout ensemble simplicial A , on a

$$k(A, X) = k \underline{\text{Hom}}(A, X).$$

Plus généralement, si $p: X \rightarrow Y$ est une isofibration entre ∞ -catégories, alors pour tout monomorphisme $A \hookrightarrow B$, on a

$$\frac{k(A, X) \times k(B, Y)}{k(A, Y)} = k\left(\frac{\underline{\text{Hom}}(A, X) \times \underline{\text{Hom}}(B, Y)}{\underline{\text{Hom}}(A, Y)}\right).$$

Démonstration: on a $k(\underline{\text{Hom}}(A, X)) \subset k(A, X)$ par définition, et comme $k(A, X)$ est un complexe de Kan, on doit avoir l'égalité. La deuxième assertion se prouve de manière similaire.

Corollaire.

Soit $p: X \rightarrow Y$ une isofibration entre ∞ -catégories. Alors pour toute extension anodine $A \hookrightarrow B$, le morphisme $\frac{h(B, X) \rightarrow h(A, X) \times h(B, Y)}{h(A, Y)}$ est une fibration triviale.

Démonstration. On a une correspondance:

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_n \longrightarrow h(B, X) & & A \longrightarrow k(\Delta_n, X) \\ \downarrow \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \downarrow & \iff & \downarrow \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \Delta_n \longrightarrow \frac{h(A, X) \times h(B, Y)}{h(A, Y)} & & B \longrightarrow \frac{k(\partial\Delta_n, X) \times k(\Delta_n, Y)}{k(\partial\Delta_n, Y)} \end{array}$$

Théorème (Joyal).

Un ensemble simplicial est une ∞ -catégorie si et seulement s'il est J -fibrant.

Un morphisme entre ∞ -catégories est une isofibration si et seulement s'il est une J -fibration.

Démonstration.

Soit $p: X \rightarrow Y$ une isofibration entre ∞ -catégories.

On veut montrer que l'inclusion $\{1\} \hookrightarrow J$ induit une fibration triviale

$$\underline{\mathrm{Hom}}(J, X) \rightarrow X \underset{Y}{\simeq} \underline{\mathrm{Hom}}(J, Y).$$

Or $h(J, X) = \underline{\mathrm{Hom}}(J, X)$ et $h(\{1\}, X) = \underline{\mathrm{Hom}}(\{1\}, X) = X$ (car J et $\{1\}$ sont des complexes de Kan). On conclut par le fait que $\{1\} \hookrightarrow J$ est une extension anodine grâce au corollaire précédent.

Corollaire.

La classe des équivalences faibles catégoriques est la plus petite classe de morphismes W vérifiant les conditions suivantes.

- (a) W satisfait la propriété du deux sur trois.
- (b) Toute extension anodine intérieure est dans W .
- (c) Toute fibration triviale entre ∞ -catégories est dans W .

Démonstration.

Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme d'ensembles simpliciaux.

L'argument du petit objet appliqué à $\{\Delta_n^k \hookrightarrow \Delta_n \mid 0 \leq k < n\}$ permet de construire un carré commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \rightarrow & Y' \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont des extensions anodines intérieures. On a donc

$$f \in W \Leftrightarrow f' \in W.$$

D'autre part, il résulte du théorème précédent et du lemme de Brown que toute équivalence faible catégorique entre ∞ -catégories est dans W , ce qui achève la preuve.

Corollaire.

Un morphisme entre ∞ -catégories est une équivalence faible catégorique si et seulement s'est une équivalence de ∞ -catégories (i.e. une J -équivalence d'homotopie).

En particulier, si $f: A \rightarrow B$ est un foncteur, alors f est une équivalence de catégories si et seulement si $Nf: NA \rightarrow NB$ est une équivalence faible catégorique.

Corollaire.

Les isofibrations sont stables par changement de base dans la catégorie des ∞ -catégories.

Corollaire.

Le foncteur $\tau: \hat{\Delta} \rightarrow \text{Cat}$ envoie les équivalences faibles catégoriques sur des équivalences de catégories.

preuve: τ envoie les extensions anodines sur des isomorphismes. La restriction de τ aux ∞ -catégories commute aux produits finis et $\tau(I) = I$, ce qui implique que τ envoie les équivalences de ∞ -catégories sur des équivalences de catégories.

Théorème.

Soit $A \rightarrow B$ un morphisme d'ensembles simpliciaux.

Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Le morphisme $A \rightarrow B$ est une équivalence faible catégorique.

(ii) Pour toute ∞ -catégorie X , le morphisme

$$\underline{\text{Hom}}(B, X) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(A, X)$$

est une équivalence de ∞ -catégories.

(iii) Pour toute ∞ -catégorie X , le foncteur

$$\tau \underline{\text{Hom}}(B, X) \rightarrow \tau \underline{\text{Hom}}(A, X)$$

est une équivalence de catégories.

(iv) Pour toute ∞ -catégorie X , le morphisme

$$k(B, X) \rightarrow k(A, X)$$

est une équivalence de ∞ -groupoïdes.

Démonstration.

On remarque que, pour toute ∞ -catégorie X , on a

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\hat{\Delta})}(A, X) \cong \{ \text{classes de } J\text{-homotopie de morphismes } A \rightarrow X \}$$

$$\cong \pi_0 k(A, X)$$

$$\cong \{ \text{classes d'isomorphismes d'objets de } \tau \underline{\text{Hom}}(A, X) \}.$$

Chacune des conditions (iii) et (iv) implique donc (i). La condition (ii) implique la condition (iii) (puis que τ envoie les

équivalences de ∞ -catégories sur des équivalences de catégories, et la condition (i) implique la condition (ii), puisque $\underline{\text{Hom}}(-, x)$ est un foncteur de Quillen.

Il reste donc à démontrer que la condition (iii) implique la condition (iv). Pour cela, en vertu du lemme de Brown, on peut supposer que $A \rightarrow B$ est une cofibration triviale. Dans ce cas, $\underline{\text{Hom}}(B, x) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(A, x)$ est une fibration triviale. En particulier, c'est donc une isofibration conservative, ce qui implique le carré ci-dessous est cartésien, et achève donc la preuve.

$$\begin{array}{ccc} k(B, x) \xrightarrow{\cong} k \underline{\text{Hom}}(B, x) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(B, x) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ k(A, x) \xrightarrow{\cong} k \underline{\text{Hom}}(A, x) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(A, x) \end{array}$$

De même, on a :

Théorème.

Soit $X \rightarrow Y$ un morphisme entre ∞ -catégories. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) Le morphisme $X \rightarrow Y$ est une équivalence de ∞ -catégories.
- (ii) Pour tout ensemble simplicial A , le morphisme $\underline{\text{Hom}}(A, x) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(A, y)$ est une équivalence de ∞ -catégories.
- (iii) Pour tout ensemble simplicial A , le foncteur $\tau \underline{\text{Hom}}(A, x) \rightarrow \tau \underline{\text{Hom}}(A, y)$ est une équivalence de catégories.
- (iv) Pour tout ensemble simplicial A , le morphisme $k(A, x) \rightarrow k(A, y)$ est une équivalence de ∞ -groupoïdes.

Limites homotopiques dans les catégories de modèles

Soit \mathcal{C} une catégorie admettant des limites projectives.

Si I est une petite catégorie, le foncteur \varprojlim_I

$$\varprojlim_I : \underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$$

est un adjoint à droite du foncteur "diagramme constant"

$$\begin{aligned} (-)_I : \mathcal{C} &\longrightarrow \underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C}) \\ X &\longmapsto X_I \end{aligned}$$

Supposons que \mathcal{C} soit munie d'une structure de catégorie de modèles.

On dit qu'un morphisme $F \rightarrow G$ dans $\underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C})$ est une équivalence faible argument par argument si, pour tout objet i de I , le morphisme $F_i \rightarrow G_i$ est une équivalence faible de \mathcal{C} .

On désigne par $\text{Ho}\underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C})$ la localisation de $\underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C})$ par les équivalences faibles argument par argument. Le foncteur "diagramme constant" respecte les équivalences faibles, et donc induit un foncteur "diagramme constant (homotopique)"

$$\begin{aligned} (-)_I : \text{Ho}(\mathcal{C}) &\longrightarrow \text{Ho}(\underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C})) \\ X &\longmapsto X_I \end{aligned}$$

Théorème

Supposons que \mathcal{C} admette des limites projectives (resp. inductives).

Le foncteur

$$(-)_I : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ho}(\underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C}))$$

admet alors un adjoint à droite (resp. à gauche

$$\varprojlim_I \text{ (resp. } \varinjlim_I) : \text{Ho}(\underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C})) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}).$$

Si $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur (vu comme un objet de $\text{Ho}(\underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C}))$), $\varprojlim_I F$ (resp. $\varinjlim_I F$) est appelé la limite homotopique (resp. la limite inductive homotopique) de F .

La preuve de ce théorème est assez technique, et ne sera pas abordée ici : la principale difficulté est que l'on ne sait pas construire de structures de catégorie de modèles sur $\underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C})$ au sens de Quillen, de sorte que l'on ne peut pas appliquer le foncteur de Quillen, d'adjonction des foncteurs dérivés. On s'en sort en produisant des structures plus faibles sur $\underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C})$, mais suffisantes pour pouvoir travailler.

voir : • Dwyer, Hirschhorn, Kan, Smith

Homotopy Limit functors on model categories
and homotopical categories

Math. Surv. & Mon. 113, AMS, 2004.

• Catégories dérivables.

Nous allons cependant démontrer le théorème dans des cas particuliers, en faisant des hypothèses sur I ou sur \mathcal{C} .

Exemple:

Si la catégorie I est discrète (i.e. est un ensemble, vu comme une catégorie dont toutes les flèches sont des identités), alors $\underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C}) \cong \prod_{i \in I} \mathcal{C}$ est naturellement munie d'une structure de catégorie de modèles (les équivalences faibles, cofibrations et fibrations sont définies argument par argument). Le foncteur diagramme constant est alors un foncteur de Quillen à gauche et à droite, de sorte que

$$\text{Ho}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ho}(\underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C})) \cong \prod_{i \in I} \text{Ho}(\mathcal{C})$$

admet un adjoint à gauche et un adjoint à droite.

On a donc un foncteur "somme homotopique indexée par I "

$$\prod_{i \in I} \text{Ho}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$$

$$(X_i)_{i \in I} \longmapsto \coprod_{i \in I}^L X_i = \coprod_{i \in I} X'_i$$

où X'_i est un remplacement
cofibrant de X_i

et un foncteur "produit homotopique indexé par I "

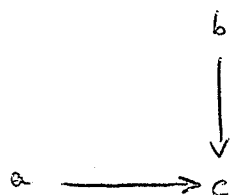
$$\prod_{i \in I} \text{Ho}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$$

$$(X_i)_{i \in I} \longmapsto \prod_{i \in I}^R X_i = \prod_{i \in I} X'_i$$

où X'_i est un remplacement fibrant
de X_i .

Produits fibrés homotopiques.

Soit \mathbf{I} la catégorie engendrée par le graphe orienté :



La donnée d'un foncteur $\mathbf{I} \xrightarrow{X} \mathcal{C}$ correspond donc à celle d'un diagramme de \mathcal{C} de la forme

$$X = \begin{array}{ccc} & X_b & \\ & \downarrow & \\ X_a & \longrightarrow & X_c \end{array}$$

L'objet $\varprojlim_{\mathbf{I}} X$ est alors simplement le produit fibré

$$X_a \times_{X_c} X_b.$$

Un morphisme de $\underline{\text{Hom}}(\mathbf{I}, \mathcal{C})$ est un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc} X_a & \xrightarrow{f_a} & Y_a \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_c & \xrightarrow{f_c} & Y_c \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_b & \xrightarrow{f_b} & Y_b \end{array}$$

Théorème.

La catégorie $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ admet une structure de catégorie de modules dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles argument par argument, et dont les fibrations et les cofibrations sont caractérisées comme suit.

Un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ est une fibration (resp. une cofibration) si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.

(a) f_b et f_c sont des fibrations

(resp. f_a et f_c sont des cofibrations).

(b) le morphisme $X_a \longrightarrow X_c \times_{Y_c} Y_a$ est une fibration.

(resp. $X_c \amalg_{X_b} Y_b \longrightarrow Y_c$ est une cofibration).

En particulier, les objets fibrants sont les diagrammes de \mathcal{C} de la forme

$$\begin{array}{ccc} & X_b & \\ & \downarrow & \\ X_a & \longrightarrow & X_c \end{array}$$

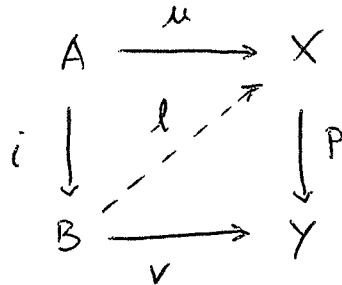
tels que X_a , X_b et X_c soient fibrants et $X_a \rightarrow X_c$ soit une fibration.

En outre, le foncteur $\varprojlim : \underline{\text{Hom}}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur de Quillen à droite.

esquisse de preuve :

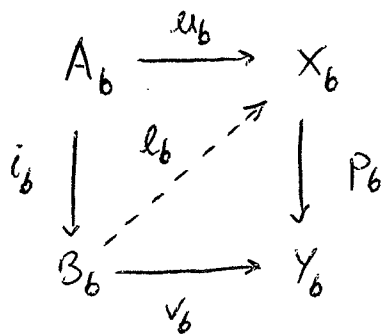
• pour les propriétés de relèvement.

Considérons un carré commutatif de $\text{Hom}(\underline{\mathcal{L}}, \mathcal{C})$

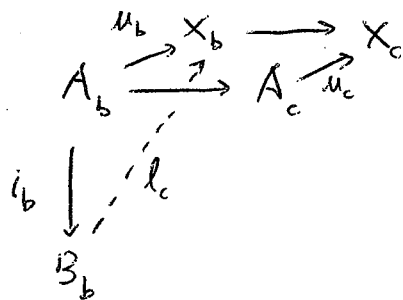


supposons que i est une cofibration, et p une fibration triviale.

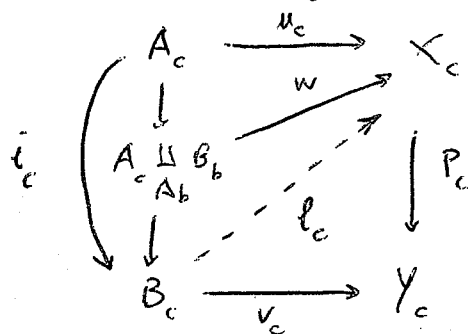
On commence par relever le carré



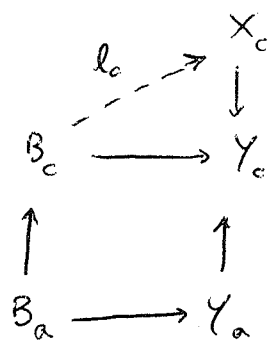
On a donc un diagramme commutatif



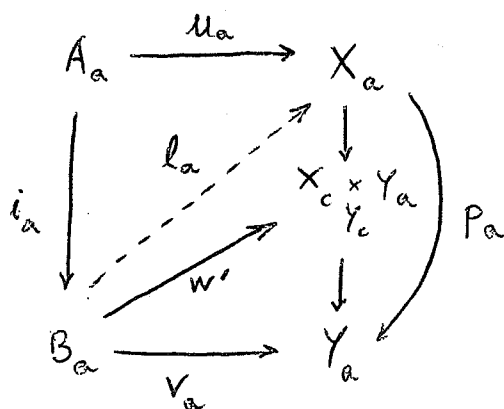
qui induit $A_c \amalg_{A_b} B_b \xrightarrow{w} X_c$. On obtient un relèvement



Cela donne un diagramme commutatif

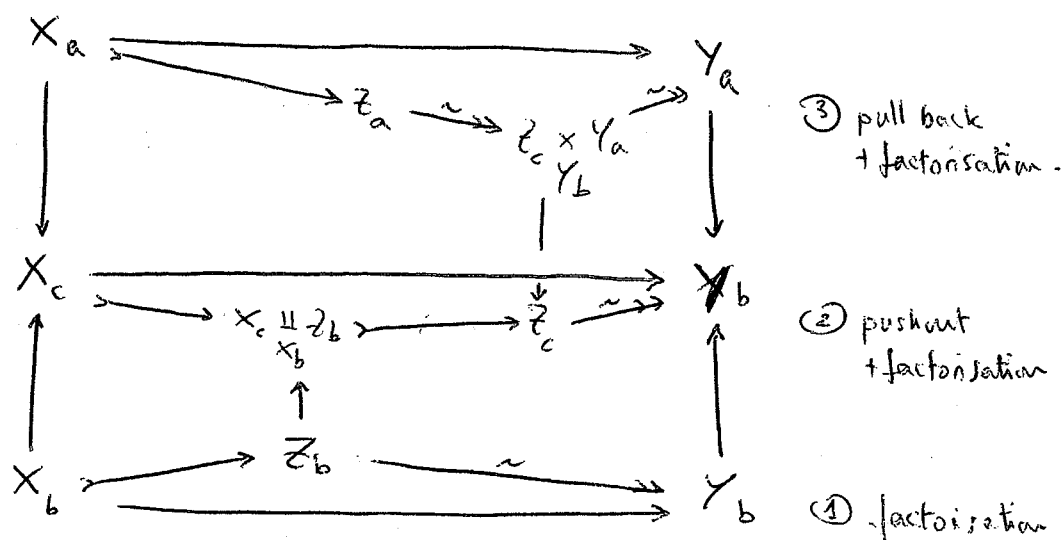


d'où un morphisme $B_a \xrightarrow{w'} X_c \times_{Y_c} Y_a$. On obtient ainsi un relèvement



Le morphisme $l = (l_a, l_b, l_c)$ est alors le relèvement global souhaité.

Pour les factorisations on procède comme suit.



On obtient ainsi une factorisation de $X \rightarrow Y$ en $X \rightarrow Z \rightarrow Y$.

Définition.

Un carré commutatif de \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est homotopiquement cartésien si le morphisme induit

$$x' \rightarrow \underset{\perp}{\operatorname{holim}} \left(\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ Y \end{array} \right) \xrightarrow{Y \rightarrow Y} \text{est un isomorphisme dans } \operatorname{Ho}(\mathcal{C})$$

Un carré commutatif de \mathcal{C} est homotopiquement cocartésien si il est homotopiquement cartésien dans $\mathcal{C}^{\operatorname{op}}$.

On note $Y' \times_Y^h X = \underset{\perp}{\operatorname{holim}} \left(\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ Y \end{array} \right) \leftarrow Y' \rightarrow Y$ le produit fibre homotopique du diagramme $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ Y' \rightarrow Y \end{array}$.

On a de même une notion de somme amalgamée homotopique notée $A \underset{B}{\coprod}^h B' \dots$

Si dans un diagramme $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ Y' \rightarrow Y \end{array}$, tous les objets sont fibrants, et si $Y' \rightarrow Y$ ou $X \rightarrow Y$ est une fibration, alors on a

$$Y' \times_Y^h X \cong Y' \times_Y^h X.$$

À équivalence faible près, tous les produits fibres homotopiques sont de cette forme.

Sonito (preuves laissées à titre d'exercice)

1) Si on a diagramme commutatif de \mathcal{C} de la forme

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & (c') & \downarrow & (c) & \downarrow \\ Y'' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

avec le carré (c) homotopiquement cartésien, alors le carré (c') est homotopiquement cartésien si et seulement si le carré composé $(c') + (c)$ l'est.

2) Si on a un cube commutatif de \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{\quad} & A & & \\ & \searrow a' & \downarrow & \searrow a & \\ & X' & \xrightarrow{\quad} & X & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow{\quad} & B & & \\ & \searrow b' & \downarrow & \searrow b & \\ & Y' & \xrightarrow{\quad} & Y & \end{array}$$

dont la face avant et la face arrière sont homotopiquement cartésiennes, et si a, b, b' sont des équivalences faibles, alors a' est une équivalence faible.

3) si $X' \xrightarrow{g} X$ est homotopiquement cartésien, et si

$$\begin{array}{ccc} f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

f est une équivalence faible,

alors f' est une équivalence faible.

Théorème. On considère N muni de l'ordre habituel.

La catégorie $\underline{\text{Hom}}(N^{op}, \mathcal{C})$ admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles (resp. les cofibrations) sont les cofibrations argument par argument. Les fibrations sont les morphismes

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X_{n+1} & \longrightarrow & X_n & \cdots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 & & X \\ & & \downarrow p_{n+1} & & \downarrow p_n & & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_0 & & \downarrow p \\ \cdots & \longrightarrow & Y_{n+1} & \longrightarrow & Y_n & \cdots & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Y_0 & & Y \end{array}$$

tel que p_0 soit une fibration et $X_{n+1} \rightarrow Y_{n+1} \times_{Y_n} X_n$ une fibration pour tout $n \geq 0$.

Le foncteur $\varprojlim : \underline{\text{Hom}}(N^{op}, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ est alors un foncteur de Quillen à droite.

Corollaire.

Pour tout diagramme de \mathcal{C} de la forme

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X_{n+1} & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_0 \\ & & \downarrow p_{n+1} & & \downarrow p_n & & & & \downarrow p_0 \\ \cdots & \longrightarrow & Y_{n+1} & \longrightarrow & Y_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_0 \end{array}$$

si tous les objets sont fibrants, et si toutes les flèches ~~sont des~~ $X_{n+1} \rightarrow X_n$ et ~~$Y_{n+1} \rightarrow Y_n$ sont des fibrations~~ $Y_{n+1} \rightarrow Y_n$ sont des fibrations, et si

$\forall n$ $X_n \rightarrow Y_n$ est une équivalence faible,

alors $\varprojlim_n X_n \rightarrow \varprojlim_n Y_n$ est une équivalence faible.

Lemme de transfert (Kan - Thomason - Crans)

Considérons une adjonction

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \xleftarrow{D} \end{array} \mathcal{C}'$$

On suppose que \mathcal{C} est munie d'une structure de catégorie de modèles engendrée par cofibrations.

On choisit un ensemble admissible I (resp. J) qui engendre les cofibrations (resp. les cofibrations triviales), et on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées.

- (i) Les ensembles de flèches $G(I)$ et $G(J)$ sont admissibles dans \mathcal{C}' .
- (ii) L'adjoint à droite D envoie les éléments de $\text{Sat}(GJ)$ sur des équivalences faibles.

Si en outre \mathcal{C}' admet des limites inductives et projectives, alors \mathcal{C}' est munie d'une structure de catégorie de modèles engendrée par cofibrations, $G(I)$ engendrant les cofibrations, et $G(J)$ les cofibrations triviales, les équivalences faibles (resp. les fibrations) de \mathcal{C}' étant les morphismes qui sont envoyés sur des équivalences faibles (resp. des fibrations) par le foncteur D .

En outre, le couple (G, D) est alors une adjonction de Quillen.

Théorème

Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles engendrée par cofibrations, et I une petite catégorie.

La catégorie de foncteurs $\underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C})$ admet une structure de catégorie de modèles engendrée par cofibrations dont les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les équivalences faibles (resp. les fibrations) argument par argument. Le foncteur $\varinjlim : \underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ est alors un foncteur de Quillen à gauche.

Démonstration.

Le foncteur d'évaluation

$$\begin{aligned} \text{ev} : \underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C}) &\longrightarrow \prod_{i \in \text{ob } I} \mathcal{C} \\ F &\longmapsto (F_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

admet un adjoint à gauche

$$G : \prod_{i \in \text{ob } I} \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{C})$$

qui associe à une famille $(X_i)_{i \in \text{ob } I}$ le foncteur défini par

$$j \longmapsto \coprod_{i \in \text{ob } I} \coprod_{\text{Hom}_I(i, j)} X_i$$

On vérifie facilement que ce couple de foncteurs adjoints vérifie les hypothèses du lemme de transfert, d'où découle aussitôt le théorème.

Propriété

Définition.

Une catégorie de modèles \mathcal{C} est propre à droite si pour tout carré cartésien de la forme

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ Y' & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

avec p une fibration et v une équivalence faible, u est une équivalence faible.

Une catégorie de modèles \mathcal{C} est propre à gauche si \mathcal{C}^{op} est propre à droite.

Une catégorie de modèles \mathcal{C} est propre si elle est propre à gauche et à droite.

Soient.

Pour une catégorie de modèles \mathcal{C} , les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) \mathcal{C} est propre à droite.

(ii) Tout carré cartésien de \mathcal{C} de la forme

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

avec p une fibration, est homotopiquement cartésien.

(iii) Pour toute équivalence faible $X \xrightarrow{u} Y$, le foncteur $u_*: Ho(\mathcal{C}/X) \rightarrow Ho(\mathcal{C}/Y)$ est une équivalence de catégories.

Exemple: si, dans une catégorie de modèles \mathcal{C} , tous les objets sont fibrants (resp. cofibrants) alors \mathcal{C} est propre à droite (resp. à gauche).

Théorème.

Soit A une petite catégorie, et (I, An) une structure homotopique sur \hat{A} .

On choisit un ensemble S de morphismes de \hat{A} tel que $An_I(S) = An$.

La structure de catégorie de modèles sur \hat{A} associée à (I, An) est propre (à droite) si et seulement si, pour tout carré cartésien de la forme

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \xrightarrow{u} & X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ Y'' & \xrightarrow{v} & Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

avec p une fibration entre objets fibrants, et $v \in S$, u est une équivalence faible.

Voir Ast. 308, Thm. 1.5.4.

Exemple: $(I, An_I(\phi))$ donne donc toujours lieu à une structure de catégorie de modèles propre (e.g. la structure de Quillen sur $\hat{\mathcal{D}}$).

Exemple: la structure de catégorie de modèles de Joyal est propre à gauche mais n'est pas propre à droite.

Fibrations de Kan fibres à fibres

Lemme.

Soit A une petite catégorie, et (I, A_n) une structure homotopique sur \hat{A} .

On considère un carré cartésien de \hat{A}

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y X & \xleftarrow{j} & X \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

avec p une fibration noire. Alors, si i est un rétracté par déformation fort, il en est de même de j .

preuve: on se donne $h: I \times Y \rightarrow Y$ et $r: Y \rightarrow Z$ tels que $ri = 1_Y$ et $h\partial_Y^0 = 1_Y$, $h\partial_Y^1 = ir$, et $h(1_I xi) = \sigma_Y(1_I xi)$.
On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \times (Z \times_Y X) & \xrightarrow{\quad} & \{0\} \times X \cong X \\ \downarrow & & \uparrow j \\ I \times (Z \times_Y X) & \xrightarrow[\sigma_{Z \times_Y X}]{} & Z \times_Y X \end{array}$$

d'où un carré commutatif admettant un relèvement k :

$$\begin{array}{ccc} I \times (Z \times_Y X) \cup \{0\} \times X & \xrightarrow{(j\sigma_{Z \times_Y X}, 1_X)} & X \\ \downarrow & \nearrow k & \downarrow p \\ I \times X & \xrightarrow{h(1_I \times p)} & Y \end{array}$$

On a alors $k(1_I \times j) = j \sigma_{Z_Y^X X} = \sigma_X(1_I \times j)$. Posons:

$$s = (rp, k\partial'_X): X \longrightarrow Z_Y^X X$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{k\partial'_X} & X \\ rp \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

On a alors $sj = 1_{Z_Y^X X}$, $k\partial_X^0 = 1_X$, $k\partial'_X = js$.

Définition.

Soit A une petite catégorie. Une classe \mathcal{C} d'objets de \hat{A} est saturée par monomorphismes si elle vérifie les conditions suivantes:

- 1) La classe \mathcal{C} est stable par (petites) sommes quelconques.
- 2) Pour tout carré cocartésien de \hat{A}

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ i \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

avec i un monomorphisme et $X, X', Y \in \mathcal{C}$, on a $Y' \in \mathcal{C}$.

- 3) Pour toute suite de monomorphismes de \hat{A} de la forme

$$X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X_n \hookrightarrow X_{n+1} \hookrightarrow \dots, \quad n \geq 0,$$

Si $\forall n \geq 0, X_n \in \mathcal{C}$, alors $X_\infty = \varinjlim_n X_n \in \mathcal{C}$.

Proposition.

Soit B un ensemble simplicial.

La plus petite classe d'objets saturée par monomorphismes dans

$\hat{\Delta}/B \cong \widehat{\Delta}/B$ qui contient les représentables $\Delta_n \xrightarrow{b} B$, $n \geq 0, b \in B_n$,
est la classe de tous les ensembles simpliciaux au-dessus de B .

Démonstration.

Soit \mathcal{C} une classe d'objets saturée par monomorphismes dans

$\hat{\Delta}/B$ contenant les représentables $\Delta_n \xrightarrow{b} B$.

On commence par montrer que, pour tout entier $m \geq 0$ et
tout sous-ensemble $I \subset \{0, \dots, m\}$, tout m -simplexe
 $b \in B_m$, l'objet

$$K = \bigcup_{i \in I} \text{Im} \left(\Delta_{m-1} \xrightarrow{\delta_m^i} \Delta_m \right) \subset \Delta_m$$

$$b \downarrow$$

$$B$$

est dans \mathcal{C} . On procède par récurrence sur m .

Si $m \leq 1$, alors K est une somme finie de représentables,
et donc c'est évident.

Si $m > 1$, on procède par récurrence sur $\#I$. Si $\#I \leq 1$,
 K est vide ou représentable. Si $\#I > 1$, on note $i = \max I$,
et on pose $J = I - \{i\}$, $L = \bigcup_{j \in J} \text{Im}(\delta_m^j) \subset \Delta_m$.

On a alors un carré cartésien de la forme :

$$\begin{array}{ccc}
 L \cap \Delta_{m-1} & \hookrightarrow & \Delta_{m-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \delta_m^i \\
 L & \hookrightarrow & K
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } L \cap \Delta_{m-1} &= \bigcup_{j \in J} \text{Im}(\delta_m^j) \cap \text{Im}(\delta_m^i) \\
 &= \bigcup_{j \in J} \text{Im}(\delta_{m-1}^{j-1}).
 \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \begin{array}{ccc} L \cap \Delta_{m-1} & L & \Delta_{m-1} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & B & B \end{array}, \text{ ce qui}$$

$$\text{implique que } \begin{array}{c} K \\ \downarrow \\ B \end{array} \in \mathcal{C}.$$

$$\text{En particulier, pour tout } m \geq 0 \text{ et tout } b \in B_m, \begin{array}{c} \partial \Delta_m \\ b \downarrow \\ B \end{array} \in \mathcal{C}.$$

Si X/B est un ensemble simplicial au-dessus de B , on a des carrés cocartésiens de la forme

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{\Sigma} \partial \Delta_m & \longrightarrow & Sk_{m-1}(X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \coprod_{\Sigma} \Delta_m & \longrightarrow & Sk_m(X)
 \end{array}$$

$$\text{et } X = \bigcup_m Sk_m(X), \text{ d'où } \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ B \end{array} \in \mathcal{C}.$$

Proposition.

Soit $p: X \rightarrow Y$ une fibration de Kan, avec Y un ∞ -groupoïde. Tout carré cartésien de la forme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est homotopiquement cartésien (au sens de la structure de catégorie de modèles de Quillen, pour les ∞ -groupoïdes).

Démonstration. L'assertion est évidente lorsque $n=0$, puisqu'alors Δ_0, X, Y sont fibrants. Si $n > 0$, on a un rétracté par déformation fort $\Delta_0 \rightarrow \Delta_n$, $0 \mapsto 0$, et donc un rétracté par déformation fort $\Delta_0 \times_Y X \hookrightarrow \Delta_n \times_Y X$.

On conclut aisément en considérant le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_0 \times_Y X & \xrightarrow{\sim} & \Delta_n \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_0 & \xrightarrow{\sim} & \Delta_n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Remarque: une preuve plus rapide consiste à utiliser la propriété à droite. On peut par ailleurs démontrer que les fibrations de Kan sont exactement les fibrations de la structure de catégorie de modèles de Quillen. L'hypothèse que Y soit un ∞ -groupoïde est donc superflue.

Proposition

Considérons un triangle commutatif d'ensembles simpliciaux.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & X' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & Y & \end{array}$$

On suppose que p et p' sont des fibrations de Kan et que Y est un ∞ -groupoïde.

Alors u est une équivalence faible si et seulement si, pour tout n -simplexe $\Delta_n \rightarrow Y$, le morphisme

$$\Delta_n \times_Y X \rightarrow \Delta_n \times_Y X'$$

est une équivalence faible.

Démonstration.

Pour tout morphisme $Z \xrightarrow{q} Y$, le foncteur

$$\begin{array}{ccc} q^*: \hat{\Delta}/Y & \rightarrow & \hat{\Delta}/Z \\ \begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ Y \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} Z \times_Y E \\ \downarrow \\ Z \end{array} \end{array}$$

commute aux limites inductives et respecte les monomorphismes.

On en déduit facilement que la classe des objets de $\hat{\Delta}/Y$ tels que $E \times_Y X \rightarrow E \times_Y X'$ soit une équivalence faible est saturée par monomorphismes. La proposition en résulte aussitôt.

Remarque: l'hypothèse que Y soit un ∞ -groupoïde n'est en fait pas nécessaire (cf. la remarque précédente).

Caractérisation locale des équivalences de ∞ -catégories

Théorème.

Soit $X \rightarrow Y$ un morphisme de ∞ -catégories. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) Les morphismes $k(\Delta_n, X) \rightarrow k(\Delta_n, Y)$ sont des équivalences de ∞ -groupoïdes pour $n=0, 1$.
- (ii) Les morphismes $k(\Delta_n, X) \rightarrow k(\Delta_n, Y)$ sont des équivalences de ∞ -groupoïdes pour $n \geq 0$.
- (iii) Les morphismes $k(A, X) \rightarrow k(A, Y)$ sont des équivalences de ∞ -groupoïdes pour tout ensemble simplicial A .
- (iv) Le morphisme $X \rightarrow Y$ est une équivalence de ∞ -catégories.

La preuve requiert quelques résultats préliminaires.

Lemme.

Pour toute cofibration finale $K \hookrightarrow L$ (relativement à la structure de catégorie de modèles de Joyal) et tout monomorphisme $A \hookrightarrow B$, les inclusions

$$B * K \cup A * L \hookrightarrow B * L \text{ et } L * A \cup K * B \hookrightarrow L * B$$

sont des cofibrations finales.

Démonstration.

On sait que, pour toute fibration de Kan intérieure $X \xrightarrow{P} Y$, et tout morphisme $B \rightarrow X$, le morphisme

$$X/B \rightarrow X/A \times_{Y/A} Y/B$$

est une fibration de Kan à droite, et donc une fibration (à condition que Y soit une ω -catégorie).

Or on a la correspondance:

$$\begin{array}{ccc} L * A \cup K * B & \rightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ L * B & \rightarrow & Y \end{array} \iff \begin{array}{ccc} K & \rightarrow & X/B \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ L & \rightarrow & X/A \times_{Y/A} Y/B \end{array}$$

Or on sait que les cofibrations triviales de la structure de catégorie de modèles de Joyal sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite relativement aux fibrations entre objets fibrants (i.e. aux isofibrations entre ω -catégories), ce qui prouve ce lemme.

On rappelle que, pour $n \geq 2$, $I_n \subset \Delta_n$ est défini par:

$$I_n = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \text{Im}(\Delta_1 \xrightarrow{u_i} \Delta_n)$$

où $u_i: \Delta_1 \rightarrow \Delta_n$ est défini par $u(0) = i-1$ et $u(1) = i$.

Proposition.

Les inclusions $I_n \hookrightarrow \Delta_n$, $n \geq 2$, sont des équivalences faibles catégoriques.

Démonstration.

On procède par récurrence sur $n \geq 2$.

Si $n = 2$, alors $I_n = \Lambda_2' \hookrightarrow \Delta_2$ est une extension anodine intérieure.

Si $n > 2$, on écrit $\Delta_n = \Delta_{n-1} * \Delta_0$. Comme l'inclusion $I_{n-1} \hookrightarrow \Delta_{n-1}$ est une équivalence faible catégorique, le lemme précédent montre que l'inclusion

$$I_{n-1} * \Delta_0 \hookrightarrow \Delta_{n-1} * \Delta_0$$

en est une aussi.

Or on peut décrire $I_{n-1} * \Delta_0 \subset \Delta_n$ par:

$$I_{n-1} * \Delta_0 = (I_{n-1} * \emptyset) \cup \text{Im}(\Delta_2 \xrightarrow{\sigma} \Delta_n)$$

où $\sigma: \Delta_2 \rightarrow \Delta_n$ est défini par

$$\sigma(0) = n-2, \quad \sigma(1) = n-1, \quad \sigma(2) = n.$$

On en déduit l'existence d'un carré à la fois cartésien et cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_2' & \xrightarrow{\quad} & I_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_2 & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & I_{n-1} * \Delta_0 \end{array}$$

Le morphisme composé $I_n \rightarrow I_{n-1} * \Delta_0 \rightarrow \Delta_n$ est donc une équivalence faible catégorique.

Lemme. Soit X une ∞ -catégorie.

1) Pour tout carré cocartésien d'ensembles simpliciaux

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ i \downarrow & & \downarrow i' \\ B & \longrightarrow & B' \end{array}, \text{ avec } i \text{ un monomorphisme,}$$

le carré

$$\begin{array}{ccc} k(B', X) & \longrightarrow & k(B, X) \\ i'^* \downarrow & & \downarrow i^* \\ k(A', X) & \longrightarrow & k(A, X) \end{array}$$

est cartésien, avec i^* une fibration de Kan entre ∞ -groupoïdes, d'où une équivalence d'homotopie :

$$k(B', X) \cong k(A', X) \times_{k(A, X)}^h k(B, X).$$

2) Pour toute suite de monomorphismes d'ensembles simpliciaux

$$A_0 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow A_n \hookrightarrow A_{n+1} \hookrightarrow \dots$$

si on pose $A_\infty = \varinjlim_n A_n$, alors on a un isomorphisme

$$k(A_\infty, X) \cong \varprojlim_n k(A_n, X)$$

d'où une équivalence d'homotopie :

$$k(A_\infty, X) \cong \varinjlim_n k(A_n, X).$$

3) Pour toute famille d'ensembles simpliciaux $(A_i)_{i \in I}$, on a

$$k\left(\coprod_i A_i, X\right) \cong \prod_i k(A_i, X).$$

Démonstration.

1) On a un carré cartésien entre ∞ -catégories

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}(B', X) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(B, X) \\ i^* \downarrow & & \downarrow i^* \\ \underline{\text{Hom}}(A', X) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(A, X) \end{array}$$

avec i^* une isofibration. On conclut en voyant que le foncteur k préserve ce type de carrés cartésiens.

2) On voit que $\varprojlim_n k(A_n, X)$ est un ∞ -groupoïde contenu dans $\underline{\text{Hom}}(A_\infty, X) = \varprojlim_n \underline{\text{Hom}}(A_n, X)$ qui contient $k(\underline{\text{Hom}}(A_\infty, X)) = k(A_\infty, X)$, d'où l'isomorphisme d'ensembles simpliciaux

$$k(A_\infty, X) \cong \varprojlim_n k(A_n, X).$$

Comme les morphismes $k(A_{n+1}, X) \rightarrow k(A_n, X)$ sont des fibrations de Kan entre ∞ -groupoïdes, on a une équivalence $\varprojlim_n k(A_n, X) \cong \varprojlim_n k(A_n, X)$.

3) C'est comme ci-dessus, en plus simple...

Lemme.

Si une classe d'objets de $\hat{\Delta}$ est saturée par monomorphismes et contient Δ_0 et Δ_1 , alors elle contient aussi I_n pour $n \geq 2$.

Démonstration: On a des carrés cocartésiens de la forme:

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_0 & \longrightarrow & I_{n-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta_1 & \longrightarrow & I_n
 \end{array}
 , n \geq 2 \quad (\text{avec } I_1 = \Delta_1).$$

Preuve du théorème.

Soit $X \rightarrow Y$ un morphisme de ∞ -catégories.

Notons \mathcal{C} la classe des ensembles simpliciaux A tels que

$$k(A, X) \rightarrow k(A, Y)$$

soit une équivalence de ∞ -groupoïdes.

Le lemme page 150 montre que \mathcal{C} est une classe saturée par monomorphismes.

(i) \Rightarrow (ii)

Si $\Delta_0, \Delta_1 \in \mathcal{C}$, il résulte du lemme précédent que
 $\forall n \geq 2, \quad I_n \in \mathcal{C}$.

Or, pour toute ∞ -catégorie C , les morphismes

$$k(\Delta_n, C) \rightarrow k(I_n, C)$$

sont des fibrations triviales (puisque $I_n \rightarrow \Delta_n$ est une équivalence faible catégorique). Les carrés commutatifs

$$k(\Delta_n, X) \longrightarrow k(\Delta_n, Y)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \downarrow^k & & \downarrow^k \\
 k(I_n, X) & \longrightarrow & k(I_n, Y)
 \end{array}$$

montrant donc que $\Delta_n \in \mathcal{C}$ par $n \geq 2$.

(ii) \Rightarrow (iii) résulte du fait que \mathcal{C} est saturé par monomorphismes.

(iii) \Leftrightarrow (iv) est déjà connu (cf. Théorème p. 123).

Il est clair que (iii) \Rightarrow (i), ce qui achève la preuve du théorème.

Considérons à présent une ∞ -catégorie X .

On a un morphisme

$$\underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X) \xrightarrow{(s,t)} X \times X$$

induit par l'inclusion $\{0\} \sqcup \{1\} = \partial\Delta_1 \hookrightarrow \Delta_1$ et l'isomorphisme canonique

$$\underline{\text{Hom}}(\partial\Delta_1, X) = \underline{\text{Hom}}(\{0\}, X) \times \underline{\text{Hom}}(\{1\}, X) \cong X \times X.$$

Si $(a, b) \in X_0^2$ sont deux 0-simplices de X (i.e. deux objets de la ∞ -catégorie X), on définit

$$X(a, b)$$

via le carré cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} X(a, b) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X) \\ \downarrow & & \downarrow (s,t) \\ * = \Delta_0 & \xrightarrow{(a,b)} & X \times X \end{array}$$

Les 0-simplices de $X(a, b)$ sont donc les "morphisms" de a vers b dans X .

Proposition.

$X(a, b)$ est un ∞ -groupoïde.

Démonstration.

L'égalité $k \underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X) = k(\Delta_1, X)$ et le fait que l'inclusion $\partial\Delta_1 \rightarrow \Delta_1$ soit bijective sur les objets implique qu'on a un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} k \underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X) \\ k(s, t) \downarrow & & \downarrow (s, t) \\ k(X) \times k(X) & \longrightarrow & X \times X \end{array}$$

et on sait que $k(s, t)$ est une fibration de Kan entre ∞ -groupoïdes. On obtient donc un diagramme commutatif cartésien (car Δ_0 est un ∞ -groupoïde) :

$$\begin{array}{ccccc} X(a, b) & \longrightarrow & k \underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X) & \longleftrightarrow & \underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow (s, t) \\ \Delta_0 & \xrightarrow{(a, b)} & k(X) \times k(X) & \longleftrightarrow & X \times X \end{array}$$

Définition.

Un morphisme de ∞ -catégories $X \xrightarrow{u} Y$ est pleinement fidèle si, pour tout couple d'objets (a, b) de X , le morphisme induit

$$X(a, b) \longrightarrow Y(u(a), u(b))$$

est une équivalence de ∞ -groupoïdes.

Un morphisme de ∞ -catégories $X \xrightarrow{u} Y$ est essentiellement surjectif si, pour tout objet b de Y , il existe un objet a de X , et un morphisme $\Delta_1 \rightarrow Y$ quasi-inversible de source $u(a)$, et de but b .

Remarque: un morphisme $X \xrightarrow{u} Y$ est essentiellement surjectif si et seulement si le foncteur $\tau(u): \tau X \rightarrow \tau Y$ est essentiellement surjectif.

Proposition.

Soit X une ∞ -catégorie, et a, b deux objets de X .
L'application canonique

$$\pi_0(X(a, b)) \rightarrow \operatorname{Hom}_{h_0 X}(a, b) \cong \operatorname{Hom}_{\tau X}(a, b)$$

est bijective.

Démonstration.

La surjectivité de cette application est évidente.

Considérons donnés deux 2-simplices $f, g \in X(a, b)_0$ dont les images dans $\operatorname{Hom}_{h_0 X}(a, b)$ coïncident.

On a alors un triangle commutatif de X de la forme

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ \downarrow 1_a & \searrow f & \\ a & \nearrow g & b \end{array} \quad c: \Delta_2 \rightarrow X.$$

On a aussi un triangle de la forme:

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 a & \xrightarrow{\quad} & b \\
 & c' \downarrow \parallel b & \\
 & g & \\
 & \searrow & \\
 & & b
 \end{array}
 \quad c': \Delta_2 \longrightarrow X.$$

La triangulation de $\Delta_1 \times \Delta_1$ correspondant au diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 (0,0) & \longrightarrow & (0,1) \\
 \downarrow c & \searrow c' & \downarrow \\
 (1,0) & \longrightarrow & (1,1)
 \end{array}$$

montre qu'on obtient un morphisme

$$(c, c'): \Delta_1 \times \Delta_1 \longrightarrow X$$

d'où un morphisme $\Delta_1 \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X)$ qui se factorise par $X(a, b)$ et connect f et g , ce qui prouve l'injectivité.

On peut comprendre la "composition" des morphismes dans X comme suit. On a une fibration de Kan entre ∞ -groupoïdes

$$k\underline{\text{Hom}}(\Delta_2, X) = k(\Delta_2, X) \longrightarrow k(X) \times k(X) \times k(X)$$

induite par l'inclusion $\{0\} \sqcup \{1\} \sqcup \{2\} \hookrightarrow \Delta_2$.

Si a, b, c sont trois objets de X , on définit $X(a, b, c)$ par le carré cartésien ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc}
 X(a, b, c) & \longrightarrow & k(\Delta_2, X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 * = \Delta_0 & \xrightarrow{(a, b, c)} & k(X)^3
 \end{array}$$

On a alors un cube commutatif dont la face avant et la face arrière sont (homotopiquement) cartésiennes.

$$\begin{array}{ccccc}
 k(\Lambda'_2, X) & \longrightarrow & k(\Delta_1, X) & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow^{(s,t)} & \\
 & k(X)^3 & \longrightarrow & k(X)^2 & \\
 & \downarrow & \downarrow s & & \\
 k(\Delta_1, X) & \xrightarrow{t} & k(X) & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \searrow & \downarrow p_1 \\
 (s,t) \searrow & k(X)^2 & \xrightarrow{p_2} & k(X) & \\
 & & & &
 \end{array}$$

On en déduit un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 X(a,b) \times X(b,c) & \longrightarrow & k(\Lambda'_2, X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 * & \xrightarrow{(a,b,c)} & k(X)^3
 \end{array}$$

puis un carré cartésien de la forme

$$\begin{array}{ccc}
 X(a,b,c) & \longrightarrow & k(\Delta_2, X) \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 X(a,b) \times X(b,c) & \longrightarrow & k(\Lambda'_2, X)
 \end{array}$$

dans lequel les deux morphismes verticaux sont des fibrations triviales.

Le morphisme $\Delta_1 \xrightarrow{\delta'_2} \Delta_2$ induit un morphisme de composition

$$k(\Delta_2, X) \longrightarrow k(\Delta_1, X),$$

lequel induit à son tour un morphisme

$$X(a, b, c) \longrightarrow X(a, c).$$

On obtient ainsi un diagramme

$$X(a, b) \times X(b, c) \xleftarrow{\sim} X(a, b, c) \longrightarrow X(a, c)$$

Le choix d'une section $X(a, b, c) \rightarrow X(a, b) \times X(b, c)$ définit ainsi une loi de composition

$$X(a, b) \times X(b, c) \longrightarrow X(a, c).$$

En appliquant le foncteur π_0 (lequel commute aux produits finis), on obtient d'après la proposition précédente une application

$$\text{Hom}_{\pi X}(a, b) \times \text{Hom}_{\pi X}(b, c) \longrightarrow \text{Hom}_{\pi X}(a, c)$$

qui n'est autre que la loi de composition de la catégorie πX .

Remarque: le ∞ -groupoïde des sections d'une fibration triviale est contractile. En particulier, tous les choix de loi de composition sont "canoniquement" équivalents.

Supposons à présent que X est un ∞ -groupoïde.

Si $x \in X_0$ est un objet de X (si on préfère penser à X comme à un espace, on dira plutôt que x est un point de X), on note traditionnellement

$$\Omega(X, x) = X(x, x)$$

le ∞ -groupoïde des endomorphismes de x , aussi appelé l'espace des lacets de base x dans X .

La loi de composition

$$X(x, x) \times X(x, x) \longrightarrow X(x, x)$$

induit une application

$$\begin{array}{ccccc} \pi_0(X(x, x)) \times \pi_0(X(x, x)) & \longrightarrow & \pi_0(X(x, x)) \\ \text{"} & & \text{"} & & \text{"} \\ \text{Hom}_{\pi X}(x, x) & & \text{Hom}_{\pi X}(x, x) & & \text{Hom}_{\pi X}(x, x) \end{array}$$

On appelle $\pi_0(X(x, x))$ le groupe fondamental de X au point x , et on le note

$$\pi_1(X, x) := \pi_0(X(x, x))$$

Si on note encore par abus x l'identité de x , vue comme un objet de $X(x, x)$, on peut itérer cette construction, et définir le n -ème espace des lacets de X de x :

$$\Omega^n(X, x) = \Omega(\Omega^{n-1}(X, x), x), \quad n \geq 1.$$

On note alors $\pi_n(X, x) = \pi_0(\Omega^n(X, x))$ le n -ème groupe d'homotopie de X de base x .

Proposition:

Le groupe $\pi_n(X, x)$ est abélien lorsque $n \geq 2$.

preuve: laissée à titre d'exercice (cela provient du fait formel que $\pi_n(X, x)$ a deux lois de multiplication qui commutent entre elles et ont le même élément unité).

Considérons $\hat{\Delta}$ munie de la structure de catégorie de modèles de Quillen par les ∞ -groupoïdes, et notons $\hat{\Delta}_+ = \Delta_0 / \hat{\Delta}$, la catégorie de modèles des ensembles simpliciaux pointés. On a alors une adjonction de Quillen

$$\hat{\Delta} \begin{matrix} \xrightarrow{(-)_+} \\ \xleftarrow{u} \end{matrix} \hat{\Delta}_+$$

où u est le foncteur d'oubli du point base, et $(-)_+$ est le foncteur qui ajoute à un ensemble simplicial X un point base:

$$X_+ = X \amalg \Delta_0 \text{ (pointé en } \Delta_0 \text{)}.$$

Le produit cartésien induit une structure monoidale symétrique sur $\hat{\Delta}_+$ définie par le "smash-produit":

$$X \wedge Y.$$

L'ensemble simplicial $X \wedge Y$ est obtenu via les carrés cocartésiens suivants:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_0 \xrightarrow{y} Y & X \vee Y \hookrightarrow X \times Y & \\ x \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ X \rightarrow X \vee Y & \Delta_0 \longrightarrow X \wedge Y & \end{array} \quad \left(\text{l'objet unité est } S^0 = \Delta_{0+} \right)$$

On définit le cercle simplicial S^1 par

$$S^1 = \Delta_1 / \partial \Delta_1 \quad (\text{vu comme un objet pointé}).$$

On vérifie alors que

$$\text{Hom}_{\hat{\Delta}_\bullet} (A \wedge S^1, (X, \alpha)) = \text{Hom}_{\hat{\Delta}_\bullet} (A, \Omega(X, \alpha))$$

et comme $(-) \wedge S^1$ est un foncteur de Quillen à gauche, on en déduit la

Proposition:

Par tout ∞ -groupoïde X muni d'un point base α , on a une bijection canonique:

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\hat{\Delta}_\bullet)} (S^n, (X, \alpha)) \cong \pi_n(X, \alpha), \quad n \geq 0.$$

$$\text{où } S^n = \underbrace{S^1 \wedge \dots \wedge S^1}_{n \text{ fois}}.$$

Proposition: $\partial \Delta_{n+1} \simeq S^n$ dans $\text{Ho}(\hat{\Delta}_\bullet)$ pour $n \geq 0$.

Démonstration: on a des carrés (homotopiquement) cocartésiens:

$$\begin{array}{ccc} S^n = S^n \wedge S^0 & \longrightarrow & S^n \wedge \Delta_1 \sim * \\ \downarrow & & \downarrow \\ * = S^n \wedge * & \longrightarrow & S^{n+1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \partial \Delta_{n+1} & \longrightarrow & \bigwedge_{n+2}^{n+2} \sim * \\ \downarrow & & \downarrow \\ * \sim \Delta_{n+1} & \xrightarrow[\delta_{n+2}^{n+2}]{} & \partial \Delta_{n+2} \end{array}$$

Il suffit donc de traiter le cas final où $n=0$.

Lemme.

Soit X un ∞ -groupe.

Pour que $X \rightarrow *$ soit une équivalence faible, (il faut et) il suffit que $\pi_0(X) \cong *$ et qu'il existe un point base $x \in X_0$ tel que $\forall n \geq 1, \pi_n(X, x) \cong *$.

Démonstration:

Si c'est le cas, alors on a:

$$\forall x \in X_0, \forall n \geq 0, \pi_n(X, x) \cong *.$$

En effet, si on a deux points x et x' , il existe

$$\xi: \Delta_1 \rightarrow X$$

de source x et de but x' . On forme alors le produit fibré:

$$\begin{array}{ccc} \bar{E} & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X) \\ q \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_1 & \xrightarrow{(\xi, \xi)} & X \times X \end{array}$$

Alors q est une fibration de Kan, et on a des produits fibrés homotopiques

$$\begin{array}{ccccc} \Omega(X, x) & \xrightarrow{\sim} & \bar{E} & \xleftarrow{\sim} & \Omega(X, x') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \{0\} & \xrightarrow{\sim} & \Delta_1 & \xleftarrow{\sim} & \{1\} \end{array}$$

d'où des isomorphismes $\pi_n(X, x) \cong \pi_n(X, x')$. On en déduit que $\text{Hom}_{H_0(\hat{\Delta})}(\partial \Delta_n, X) \cong * \quad \forall n \geq 0$.

On va montrer que $X \rightarrow *$ est une fibration triviale.

On se donne donc

$$a: \partial \Delta_n \rightarrow X$$

et on veut prouver que a se factorise par $\partial \Delta_n \hookrightarrow \Delta_n$.

On sait qu'il existe

$$h: \Delta_i \times \partial \Delta_m \rightarrow X$$

tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \partial \Delta_m & \xrightarrow{a} & X \\ \downarrow \delta_i' \times 1_{\partial \Delta_m} & \searrow h & \\ \Delta_i \times \partial \Delta_m & \xrightarrow{h} & X \\ \uparrow \delta_i'' \times 1_{\partial \Delta_m} & \nearrow \alpha & \\ \partial \Delta_m & \xrightarrow{\quad} & \Delta_0 \end{array}$$

On a donc un relèvement:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_i \times \partial \Delta_m \cup \{1\} \times \Delta_m & \xrightarrow{(h, \alpha)} & X \\ \downarrow & \nearrow k & \\ \Delta_i \times \Delta_m & & \end{array}$$

On pose $\ell = k|_{\{0\} \times \Delta_m} = k(\delta_i' \times 1_{\Delta_m})$. Alors

on a $\ell|_{\partial \Delta_m} = a$.

Théorème (Serre)

Soit $X \xrightarrow{p} Y$ un morphisme de ∞ -groupoïdes.

On se donne $x \in X_0$ et $y = p(x) \in Y_0$. On désigne par F la fibre de p en y . Alors on a une longue suite exacte :

$$\cdots \rightarrow \pi_{n+1}(Y, y) \rightarrow \pi_n(F, x) \rightarrow \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, y) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(F) \rightarrow \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$$

Démonstration.

Montrons que

$$\pi_0(F) \rightarrow \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$$

est une suite exacte d'ensembles pointés. L'application composée est clairement constante de valeur y .

Réciproquement si $a \in X_0$ est envoyé sur la composante connexe de y , on a un morphisme $\Delta_1 \xrightarrow{u} Y$ de source $p(a)$ et de but y , d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \{a\} & \xrightarrow{a} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_1 & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

L'équivalence faible $\{a\} \times_{\Delta_1} \Delta_1 \times_Y X \sim \Delta_1 \times_Y X \sim F$ induit des bijections :

$$\pi_0(\{a\} \times_{\Delta_1} \Delta_1 \times_Y X) \cong \pi_0(\Delta_1 \times_Y X) \cong \pi_0(F),$$

ce qui montre que a est dans l'image de $\pi_0(F) \rightarrow \pi_0(X)$.

Pour prouver le cas général, on considère les carrés (homotopiquement) cartésiens suivants.

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega(X, x) & \longrightarrow & P(X) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X) \\
 \downarrow & & \downarrow q & & \downarrow (s, t) \\
 * & \xrightarrow{\alpha} & X & \longrightarrow & X \times X \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & * & \xrightarrow{\alpha} & X
 \end{array}$$

Or $P(X) \rightarrow *$ est une fibration triviale, car

$\underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X) \rightarrow X$ en est une. L'espace des lacets et donc défini par un carré homotopiquement cartésien de la forme :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega(X, x) & \longrightarrow & * \\
 \downarrow & & \downarrow \alpha \\
 * & \xrightarrow{\alpha} & X
 \end{array}$$

Le diagramme infini de carrés homotopiquement cartésiens achève donc la preuve.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \Omega^{n+2}(Y, y) & \longrightarrow & \Omega^{n+1}(F, x) & \longrightarrow & * & \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 * & \longrightarrow & \Omega^{n+1}(X, x) & \longrightarrow & \Omega^{n+1}(Y, y) & \longrightarrow & * \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & * & \longrightarrow & \Omega^n(F, x) & \longrightarrow & \Omega^n(X, x) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & * & \longrightarrow & \Omega^n(Y, y) \dots
 \end{array}$$

Corollaire.

Soit $X \xrightarrow{p} Y$ un morphisme de ∞ -groupoïdes.

Pour que p soit une équivalence de ∞ -groupoïdes, il faut et il suffit que $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ soit bijective, et que $\forall x \in X_0, \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, p(x))$ soit un morphisme de groupes.

Démonstration.

On peut supposer que p est une fibration de Kan.

La longue suite exacte du théorème précédent montre que cette condition équivaut à demander que toutes les fibres (homotopiques) de p soient contractiles (cf. lemme p. 162).

On conclut grâce à la proposition p. 146.

Proposition.

Un morphisme de ∞ -catégories $X \xrightarrow{p} Y$ est pleinement fidèle si et seulement si le carré commutatif de ∞ -groupoïdes

$$\begin{array}{ccc} k(\Delta_1, X) & \longrightarrow & k(\Delta_1, Y) \\ (s, t) \downarrow & & \downarrow (s, t) \\ k(X)^2 & \longrightarrow & k(Y)^2 \end{array}$$

est homotopiquement cartésien.

Démonstration. Formons le produit fibre suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 k(x)^2 \times k(\Delta, y) & \longrightarrow & k(\Delta, y) \\
 \downarrow q & & \downarrow \\
 k(x)^2 & \longrightarrow & k(y)^2
 \end{array}$$

La fibre de q au-dessus de $(a, b) \in k(x)_0^2 = x_0 \times x_0$ est $Y(p(a), p(b))$.

Dire que le carré est homotopiquement cartésien revient à dire que le morphisme

$$\begin{array}{ccc}
 k(\Delta, x) & \xrightarrow{\varphi} & k(x)^2 \times k(\Delta, y) \\
 (s, t) \searrow & & \swarrow q \\
 & k(x)^2 &
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \\ k(y)^2 \end{array}$$

est une équivalence faible au-dessus de $k(x)^2$.

Comme (s, t) et q sont des fibrations de Kan, cela équivaut à demander que φ soit une équivalence faible fibre à fibre, d'où la proposition.

On en déduit le

Théorème.

Un morphisme de ω -catégories est une équivalence de ω -catégories si et seulement si il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Démonstration.

En vertu de la proposition précédente, il suffit de montrer que tout morphisme de ∞ -catégories

$$X \xrightarrow{f} Y$$

qui est pleinement fidèle et essentiellement surjectif induit une équivalence de ∞ -groupoïdes

$$k(X) \rightarrow k(Y).$$

Comme $\pi_0 k(X) \rightarrow \pi_0 k(Y)$ est surjective, il suffit de montrer que, pour tout $a \in k(X)_0 = X_0$,

$$\Omega(k(X), a) \rightarrow \Omega(k(Y), f(a))$$

est une équivalence de ∞ -groupoïdes. Or on a des carrés homotopiquement cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \Omega(k(X), a) & \longrightarrow & \Omega(k(Y), f(a)) \\ \downarrow & (1) & \downarrow \\ X(a, a) & \longrightarrow & Y(f(a), f(a)) \\ \downarrow & (2) & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{ho}X}(a, a) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{ho}Y}(f(a), f(a)) \end{array}$$

(Car $k(X)(a, a)$ est la fibre (homotopique) de la fibration de Kan $X(a, a) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{ho}X}(a, a)$ à l'along de l'inclusion $\mathrm{Hom}_{\mathrm{kh}X}(a, a) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{ho}X}(a, a)$).

Joins épais

Soient A et B deux ensembles simpliciaux.

On définit leur join épais $A \diamond B$ par le carré cocartésien suivant

$$\begin{array}{ccc}
 A \times \partial \Delta_1 \times B & \xrightarrow{\pi} & A \amalg B \\
 (*) \quad \downarrow & & \downarrow \\
 A \times \Delta_1 \times B & \longrightarrow & A \diamond B
 \end{array}$$

avec π induit par les projections

$$A \times \{0\} \times B \longrightarrow A \quad \text{et} \quad A \times \{1\} \times B \longrightarrow B.$$

Par construction, on a la

Proposition

Le foncteur $\hat{\Delta} \longrightarrow A \setminus \hat{\Delta}$ (resp. $\hat{\Delta} \longrightarrow B \setminus \hat{\Delta}$)
 défini par $B \longmapsto A \diamond B$ (resp. par $A \longmapsto A \diamond B$)
 commute aux limites inductives et respecte les équivalences
 faibles catégoriques.

Démonstration.

Les propriétés d'exactitude proviennent des propriétés du produit
 cartésien (qui commute aux limites inductives en chaque variable)
 et de la somme. La compatibilité aux équivalences faibles
 catégoriques provient du fait que les carrés de la forme (*)
 sont homotopiquement cocartésiens.

Pour $m, n \geq 0$, on a un morphisme naturel:

$$\varphi_{m,n}: \Delta_m \diamond \Delta_n \longrightarrow \Delta_m * \Delta_n = \Delta_{m+1+n}.$$

Ce morphisme $\varphi_{m,n}$ est induit par les inclusions canoniques

$$\Delta_m \hookrightarrow \Delta_m * \Delta_n \hookleftarrow \Delta_n$$

et par le morphisme

$$\Delta_m \times \Delta_1 \times \Delta_n \longrightarrow \Delta_{m+1+n}$$

obtenu comme le nerf de l'application croissante

$$[m] \times [1] \times [n] \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{m,n}} [m+1+n]$$

définir par:

$$\tilde{\varphi}_{m,n}(i, \varepsilon, j) = \begin{cases} i & \text{si } \varepsilon = 0 \\ j & \text{si } \varepsilon = 1 \end{cases}$$

Proposition.

Il existe un unique morphisme fonctiel

$$\varphi_{A,B}: A \diamond B \longrightarrow A * B$$

tel que $\varphi_{\Delta_m, \Delta_n} = \varphi_{m,n}$ pour $m, n \geq 0$.

Démonstration.

C'est une simple application du fait que tout ensemble simplicial est une limite inductive de représentables.

Lemme.

Le morphisme $\Delta_0 \diamond \Delta_n \longrightarrow \Delta_0 * \Delta_n = \Delta_{n+1}$ est une équivalence faible catégorique pour tout $n \geq 0$.

Démonstration.

Le morphisme $[1] \times [n] = [0] \times [1] \times [n] \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{0,n}} [n+1]$ admet un adjoint à gauche

$$\tilde{s}: [n+1] \longrightarrow [1] \times [n]$$

défini par

$$\tilde{s}(k) = (\inf(k, 1), \sup(k-1, 0)).$$

Le morphisme induit

$$s: \Delta_{n+1} \longrightarrow \Delta_0 \times \Delta_1 \times \Delta_n \longrightarrow \Delta_0 \diamond \Delta_n$$

est une section de $p = \varphi_{0,n}: \Delta_0 \diamond \Delta_n \longrightarrow \Delta_{n+1}$.

On vérifie que la transformation naturelle $\tilde{s} \tilde{\varphi}_{0,n} \Rightarrow 1_{[1] \times [n]}$ définit un morphisme

$$h: \Delta_1 \times (\Delta_0 \diamond \Delta_n) \longrightarrow \Delta_0 \diamond \Delta_n$$

tel que $h_0 = \text{sp}$ et $h_1 = 1_{\Delta_0 \diamond \Delta_n}$.

D'autre part, $\tau(p): \tau(\Delta_0 \diamond \Delta_n) \longrightarrow \tau(\Delta_{n+1}) = [n+1]$ est un isomorphisme. On en déduit que, pour tout α -simplexe x de $\Delta_0 \diamond \Delta_n$, le morphisme $h_x: \Delta_1 \longrightarrow \Delta_0 \diamond \Delta_n$ est quasi-inversible (dans le sens où il induit une identité dans $\tau(\Delta_0 \diamond \Delta_n)$).

Choisissons une factorisation de p en une extension anodine intérieure i suivie d'une fibration de Kan intérieure q .

$$\begin{array}{ccc} \Delta_0 \diamond \Delta_n & \xrightarrow{p} & \Delta_{n+1} \\ & \searrow i \quad \nearrow q & \\ & X & \end{array}$$

Comme X est alors une ∞ -catégorie, on a l'existence d'un relèvement k :

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_1 \times (\Delta_0 \diamond \Delta_n) & \xrightarrow{h} & \Delta_0 \diamond \Delta_n & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow \Delta_1 \times i & & & \nearrow k & \\ \Delta_1 \times X & & & & \end{array}$$

Or, pour tout $x \in x_0$, la flèche $\Delta_1 \xrightarrow{k_x} X$ est quasi-inversible dans X (car on a l'identification $\tau X = \tau(\Delta_0 \diamond \Delta_n)$, de sorte que $\tau(k) = \tau(h)$). Autrement dit, k correspond à un morphisme quasi-inversible dans la ∞ -catégorie $\underline{\text{Hom}}(X, X)$. Cela implique l'existence d'un relèvement k' comme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 \times X & \xrightarrow{k} & X \\ \downarrow & \nearrow k' & \\ J \times X & & \end{array}$$

En conclusion, on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 \{0\} \times (\Delta_0 \diamond \Delta_n) & \xrightarrow{sp} & \Delta_0 \diamond \Delta_n \\
 i \downarrow & & \downarrow i \\
 \{0\} \times X & \xrightarrow{(1)} & \\
 \downarrow & & \\
 J \times X & \xrightarrow{k'} & X \\
 \uparrow & & \uparrow i \\
 \{1\} \times X & \xrightarrow{(2)} & \\
 i \uparrow & \nearrow & \Delta_0 \diamond \Delta_n \\
 \{1\} \times (\Delta_0 \diamond \Delta_n) & \xrightarrow{=} &
 \end{array}$$

La commutativité de (2) entraîne que k' est une équivalence faible catégorique, et donc celle de (1) montre qu'il en est de même de sp . Comme $ps = 1_{\Delta_{n+1}}$, cela prouve que p et s sont des équivalences faibles catégoriques (car des isomorphismes dans $Ho(\hat{\Delta})$).

Proposition.

Pour tout ensemble simplicial A , le morphisme

$$\Delta_0 \diamond A \longrightarrow \Delta_0 * A$$

est une équivalence faible catégorique.

Démonstration. Les foncteurs $\Delta_0 \diamond (-)$ et $\Delta_0 * (-)$ commutent aux limites inductives (en les considérant à valeurs dans $\hat{\Delta}_*$) et respectent les monomorphismes. On en déduit que la classe \mathcal{C} des ensembles simpliciaux A tels que $\Delta_0 \diamond A \longrightarrow \Delta_0 * A$ soit une équivalence faible catégorique est saturée par monomorphismes.

Comme \mathcal{C} contient les représentables, elle contient tous les ensembles simpliciaux.

Théorème (Joyal).

Par tous ensembles simpliciaux A et B , le morphisme

$$A \diamond B \longrightarrow A * B$$

est une équivalence faible catégorique.

idée de preuve :

Par un argument de saturation par monomorphismes, on est ramené au cas où $A = \Delta_m$ et $B = \Delta_n$. Comme les inclusions $I_m \hookrightarrow \Delta_m$ et $I_n \hookrightarrow \Delta_n$ sont des équivalences faibles catégoriques, on est alors ramené au cas $m=0, 1$ et $n=0, 1$. Si $m=0$ ou $n=0$, on a déjà vu l'argument, et si $m=n=1$, on procède de manière similaire (ce que nous laissons à titre d'exercice).

Si on fixe B , le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Delta} & \longrightarrow & B \backslash \hat{\Delta} \\ A & \longmapsto & A \diamond B \end{array}$$

admet un adjoint à droite

$$\begin{array}{ccc} B \backslash \hat{\Delta} & \longrightarrow & \hat{\Delta} \\ B \xrightarrow{u} X & \longmapsto & X // B = X // u \end{array}$$

On a donc une adjonction de Quillen, d'où le

Corollaire :

Si X est une ∞ -catégorie, pour tout morphisme $B \xrightarrow{u} X$, le morphisme $X // B \rightarrow X // B$ est une équivalence de ∞ -catégories.

Un cas particulier: soit X une ∞ -catégorie, et $x \in X_0$ un objet de X . Alors on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X // x & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X) \\ \downarrow & & \downarrow t \\ \Delta_0 & \xrightarrow{x} & X \end{array}$$

On peut interpréter plus finement cette construction dans le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} X // x & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X) \\ \downarrow & & \downarrow (s, t) \\ X = X \times \Delta_0 & \xrightarrow{(1_X, x)} & X \times X \\ \downarrow & & \downarrow \text{pr}_2 \\ \Delta_0 & \xrightarrow{x} & X \end{array}$$

On a donc un morphisme canonique

$$s: X // x \longrightarrow X,$$

et, par construction, pour tout objet $y \in X_0$, on a un carré cartésien (et homotopiquement cartésien):

$$\begin{array}{ccc}
 X(y, x) & \longrightarrow & X // x \\
 \downarrow & & \downarrow s \\
 \Delta_0 & \xrightarrow{y} & X
 \end{array}$$

Corollaire:

La fibre homotopique de $X/x \rightarrow X$ au-dessus de $y \in X_0$ est canoniquement équivalente au ∞ -groupoïde $X(y, x)$.

Démonstration.

On a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X/x & \longrightarrow & X // x \\
 \sigma \searrow & & \swarrow s \\
 & X &
 \end{array}$$

avec s une fibration (image inverse de la fibration $\underline{\text{Hom}}(\Delta_1, x) \rightarrow X \times X = \underline{\text{Hom}}(\partial\Delta_1, x)$) et σ une fibration de Kan à droite (puisque X est une ∞ -catégorie).

Comme $X/x \rightarrow X // x$ est une équivalence de ∞ -catégories, c'est une équivalence fibre à fibres: pour tout $y \in X_0$, on a donc une ∞ -équivalence:

$$\sigma^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} s^{-1}(y) = X(y, x).$$

Objets initiaux

Définition.

Soit X une ω -catégorie.

On dit qu'un objet $a \in X_0$ est initial si, pour tout morphisme $\partial\Delta_n \xrightarrow{x} X$, $n \geq 0$, si $x(0) = a$, alors il existe un morphisme $\Delta_n \xrightarrow{\bar{x}} X$ tel que $\bar{x}|_{\partial\Delta_n} = x$.

On dit qu'un objet $a \in X_0$ est final s'il est initial dans X^{op} .

Proposition (Joyal)

Soit X une ω -catégorie, et $a \in X_0$ un objet de X .

Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) l'objet a est initial dans X .
- (ii) la projection $a \backslash X \rightarrow X$ est une fibration triviale.
- (ii bis) la projection $a \amalg X \rightarrow X$ est une fibration triviale.
- (iii) la projection $a \backslash X \rightarrow X$ admet une section $X \xrightarrow{s} a \backslash X$ telle que $s(a) = 1_a$.
- (iii bis) la projection $a \amalg X \rightarrow X$ admet une section $X \xrightarrow{s} a \amalg X$ telle que $s(a) = 1_a$.
- (iv) l'inclusion $X \hookrightarrow \Delta_0 * X$ admet une rétraction $\Delta_0 * X \xrightarrow{r} X$ telle que $r(0 * a) = 1_a$.

Démonstration.

Commençons peut-être par clarifier les notations.

(l'objet $1_a \in (a \setminus X)_0$ est le morphisme $\Delta_0 \xrightarrow{1_a} a \setminus X$

correspondant par adjonction à $\Delta_0 * \Delta_0 = \Delta_1 \rightarrow \Delta_0 \xrightarrow{a} X$.

(l'objet $1_a \in (a \setminus X)_0 \subset \underline{\text{Hom}}(\Delta_1, X)_0$ est $\Delta_1 \rightarrow \Delta_0 \xrightarrow{a} X$.

En particulier, le morphisme

$$a \setminus X \xrightarrow{\varphi} a \setminus X$$

envoie 1_a sur 1_a .

Comme φ est une équivalence faible entre fibrations au-dessus de X , on voit aussitôt que (ii) et (ii bis) (resp. (iii) et (iii bis)) sont équivalentes ~~§~~.

Montrons que (i) \Leftrightarrow (ii).

En regard de la décomposition

$$\partial \Delta_{n+1} = \Delta_0 * \partial \Delta_n \cup \emptyset * \Delta_n,$$

on voit que se donner un morphisme $\partial \Delta_{n+1} \xrightarrow{\alpha} X$

tel que $\alpha(\partial) = a$ équivaut à se donner un carré

commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc} \partial \Delta_n & \longrightarrow & a \setminus X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_n & \longrightarrow & X. \end{array}$$

Cela montre que (i) \Leftrightarrow (ii).

(ii) \Rightarrow (iii)

Si $a \setminus X \rightarrow X$ est une fibration triviale, le carré commutatif suivant admet un relèvement.

$$\begin{array}{ccc} \Delta_0 & \xrightarrow{1_a} & a \setminus X \\ \downarrow a & \nearrow s & \downarrow \\ X & \xrightarrow{=} & X \end{array}$$

(iii) \Rightarrow (iv)

Par adjonction, la section $s: X \rightarrow a \setminus X$ correspond à un morphisme $r: \Delta_0 * X \rightarrow X$ tel que $r(o) = a$, où $o \in (\Delta_0 * X)_0$ est le 0-simplexe $\Delta_0 \xrightarrow{\text{can}} \Delta_0 * X$. Le fait que s soit une section implique que r est une rétraction par fonctorialité.

(iv) \Rightarrow (i)

Le morphisme

$$y: \Delta_0 * \partial \Delta_n \xrightarrow{1_{\Delta_0} * x} \Delta_0 * X \xrightarrow{r} X$$

prolonge $x: \partial \Delta_n \rightarrow X$, et on a $y(o * o) = r(o * a) = 1_a$.

Or on a aussi $\Delta_0 * \partial \Delta_n = \Lambda_{n+1}^o$, et comme 1_a est

inversible, il existe $z: \Delta_{n+1} \rightarrow X$ tel que $z|_{\Lambda_{n+1}^o} = y$.

La restriction de z à $\Delta_n \xrightarrow{\partial^o} \Delta_{n+1}$ est un relèvement de x .

Proposition.

Soit X une ∞ -catégorie.

On note $\text{initial}(X)$ la sous- ∞ -catégorie pleine de X formée des objets initiaux.

Alors $\text{initial}(X)$ est un bien vide, ou bien un ∞ -groupoïde contractile (dans un objet injectif de $\hat{\Delta}$).

Tout objet de X qui est quasi-isomorphe (i.e. isomorphe dans $\tau(X)$) à un objet initial est initial. De plus, tout objet initial de X est un objet initial de la catégorie $\text{ho}X = \tau X$. Réciproquement, si X admet un objet initial, alors tout objet de X qui est initial dans τX est initial dans X .

Démonstration.

Rappelons que le morphisme $X \rightarrow N\tau(X)$ est une isofibration. Si A est un ensemble d'objets de X , on note $\tau(X)_A$ la sous-catégorie pleine de $\tau(X)$ engendrée par A , et on définit X_A , la sous- ∞ -catégorie pleine de X engendrée par A , par le carré cartésien (et homotopiquement cartésien) suivant.

$$\begin{array}{ccc} X_A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ N\tau(X)_A & \longrightarrow & N\tau(X) \end{array}$$

On a $\tau(X_A) = \tau(X)_A$. L' ∞ -catégorie $\text{initial}(X)$ est obtenue en prenant pour A l'ensemble des objets initiaux de X .

Il est clair que, si $\text{initial}(x)$ n'est pas vide, alors le morphisme $\text{initial}(x) \rightarrow \Delta_0$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux inclusions $\partial\Delta_n \rightarrow \Delta_n$, $n \geq 0$.

Montrons que tout objet initial de X est initial dans $\tau(X)$.
 Soit $a \in X_0$ un objet initial. On sait que, pour tout $x \in X_0$, $X(a, x)$ est la fibre homotopique de $a \setminus X \rightarrow X$ au-dessus de x . En particulier, $X(a, x)$ est donc un ∞ -groupeïde contractile, d'où

$$\text{Hom}_{\tau(X)}(a, x) = \pi_0 X(a, x) \cong \text{pt}.$$

Supposons que X admette un objet initial a , et considérons un objet $b \in X_0$ qui soit initial dans $\text{ho}X = \tau X$.

Il existe donc un isomorphisme $a \xrightarrow{\sim} b$ dans $\text{ho}X$, que l'on peut relever en un morphisme quasi-inversible $\Delta_1 \xrightarrow{f} X$ de source a et de but b .

Considérons un morphisme $\partial\Delta_n \xrightarrow{x} X$ tel que $x(0) = b$.
 Soit $r: \Delta_0 * X \rightarrow X$ une rétraction de $X \hookrightarrow \Delta_0 * X$ telle que $r(0 * a) = 1_a$. On définit x' par

$$x': \Delta_0 * \partial\Delta_n \xrightarrow{1_{\Delta_0} * x} \Delta_0 * X \xrightarrow{r} X,$$

et on voit que $x'|_{\partial\Delta_n} = x$ et que $x'(0) = a$. Comme

$\Delta_0 * \partial\Delta_n = \Lambda_{n+1}^0$ et comme $x'(0, 1) = f$, il existe donc

$z: \Delta_{n+1} \rightarrow X$ qui prolonge x' . La restriction de z à

$\Delta_n \xrightarrow{\partial^0} \Delta_{n+1}$ est un relèvement de x .

Tout objet de $\tau(X)$ qui est isomorphe à un objet initial de $\tau(X)$ étant initial dans $\tau(X)$, cela implique que tout objet de X qui est

quasi-isomorphe à un objet initial et initial dans X .

Lemme.

Soit X une ∞ -catégorie, et $a \in X_0$ un objet de X .

Si I est un ensemble simplicial, on note $a_I \in \underline{\text{Hom}}(I, X)$.

le diagramme constant de valeur a .

$$a_I: I \longrightarrow \Delta_0 \xrightarrow{a} X$$

Alors on a un isomorphisme d'ensembles simpliciaux

$$a_I \backslash \underline{\text{Hom}}(I, X) \cong \underline{\text{Hom}}(I, a \backslash X).$$

Démonstration:

il suffit de vérifier que, pour tout ensemble simplicial K , on a

$$(\Delta_0 \diamond K) \times I \cong \Delta_0 \diamond (K \times I).$$

Théorème.

Soit X une ∞ -catégorie admettant un objet initial a .

Alors, pour tout ensemble simplicial I , la ∞ -catégorie

$\underline{\text{Hom}}(I, X)$ admet a_I comme objet initial.

Démonstration:

Si $a \backslash X \rightarrow X$ est une fibration triviale, alors il en est de même de $\underline{\text{Hom}}(I, a \backslash X) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(I, X)$.

On conclut grâce au lemme précédent.

Un petit aparté à propos de la composition.

Soit $\Delta, \xrightarrow{u} X$ une flèche dans une ∞ -catégorie.

On note a la source de u , et b son but.

Nous allons définir explicitement une composition de la forme

$$X(a, a) \rightarrow X(a, b).$$

Lemme:

La projection $X/u \rightarrow X/a$ est une fibration triviale.

Démonstration.

Un carré commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & X/u \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ L & \longrightarrow & X/a \end{array}$$

équivalent à un diagramme du type suivant.

$$\begin{array}{ccc} L * \{0\} \cup K * \Delta_1 & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow & \\ L * \Delta_1 & & \end{array}$$

Il suffit de vérifier que i est une extension anodine intérieure dans le cas où $K \hookrightarrow L$ est de la forme $\partial \Delta_n \hookrightarrow \Delta_n$, ce qui est connu.

Pour $x \in X_0$, on note $\underline{X}(x, a)$ la fibre de $X/u \rightarrow X$ au-dessus de x .

On a donc une fibration triviale

$$\underline{X}(x, a) \xrightarrow{\sim} X(x, a)$$

et la fibration de Kan à droite $X/u \rightarrow X/b$ induit une fibration de Kan

$$\underline{X}(x, a) \rightarrow X(x, b).$$

~~On note~~ Le zig-zag

$$X(x, a) \xleftarrow{\sim} \underline{X}(x, a) \rightarrow X(x, b)$$

correspond à la composition par $a \xrightarrow{u} b$.

On peut aussi voir $a \xrightarrow{u} b$ comme un morphisme

$$\Delta_0 * \Delta_0 \rightarrow X,$$

et donc comme un objet de X/a . On peut alors vérifier que (essentiellement par définition):

$$(X/a)/u = X/u.$$

Soient $a \xrightarrow{u} b$ et $a' \xrightarrow{u'} b$ deux morphismes de X .

On peut voir u et u' comme des objets de X/b .

Lemme: on a un isomorphisme d'ensembles simpliciaux entre

$$X/b(u, u') \text{ et la fibre du morphisme } \underline{X}(a, a') \rightarrow X(a, b)$$

au-dessus de u .

Démonstration.

On a un cube commutatif dont les deux faces latérales sont cartésiennes:

$$\begin{array}{ccccc}
 X(a, a') & \longrightarrow & X(a, b) & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & X/u' & & X/b & \\
 & \downarrow & & \downarrow q & \\
 * & \longrightarrow & * & & \\
 & \searrow & \searrow & & \\
 & X/b & \xrightarrow{q} & X &
 \end{array}$$

Théorème.

Soit X une ∞ -catégorie, et $a \in X_0$ un objet de X .

Pour que a soit un objet final, il faut et il suffit que, pour tout objet $x \in X_0$, le ∞ -groupoïde $X(x, a)$ soit contractile.

Démonstration.

Si a est un objet final, alors la projection $X//a \rightarrow X$ est une fibration triviale, et donc ses fibres (homotopiques) sont des ∞ -groupoïdes contractiles.

Réciproquement, si les ∞ -groupoïdes $X(x, a)$ sont contractils, le morphisme $X/a \rightarrow X$ est pleinement fidèle. En effet, si $x \xrightarrow{u} a$ et $x' \xrightarrow{u'} a$ sont deux objets de X/a , on a un carré homotopiquement cartésien de la forme:

$$\begin{array}{ccc}
 X/a(u, u') & \longrightarrow & X(x, x') \\
 \downarrow & & \downarrow \text{composition par } u' \\
 \Delta_0 & \xrightarrow[\sim]{u} & X(x, a)
 \end{array}$$

et une fibration triviale $X(x, x') \longrightarrow X(x, x')$.

Le morphisme composé

$$X/a(u, u') \longrightarrow X(x, a)$$

est donc une équivalence faible. L'essentielle surjectivité résulte du fait que, pour tout objet $x \in X_0$, il existe un morphisme $x \rightarrow a$ (puisque a est un objet final dans τX).

Limites projectives dans les ∞ -catégories. (1^{ère} version)

Soit X une ∞ -catégorie.

Si I est un ensemble simplicial, un diagramme dans X indexé par I est un morphisme

$$I \xrightarrow{d} X$$

(ou, si on préfère, un objet $d \in \underline{\text{Hom}}(I, X)$).

Définition.

On dit qu'un diagramme $I \xrightarrow{d} X$ admet une limite projective si la ∞ -catégorie $X/_d = X/_I$ admet un objet initial.

On note alors $\varprojlim d$ ou encore $\varprojlim_I d$, ou $\varprojlim_{i \in I} d_i$ tout objet de X

$$\Delta_0 \longrightarrow X$$

obtenue comme le composé de la projection $X/_d \longrightarrow X$ avec un objet initial $\Delta_0 \longrightarrow X/_d$.

On dit qu'un diagramme $I \xrightarrow{d} X$ admet une limite inductive si $I^{op} \xrightarrow{d^{op}} X^{op}$ admet une limite projective.

Proposition.

Soit $I \xrightarrow{d} X$ un diagramme à valeur dans une ∞ -catégorie X .
On note $\text{Proj}(d)$ la sus- ∞ -catégorie pleine de $X/_d$ formée

des objets initiaux.

Alors $\text{Proj}(d)$ est ou bien vide, ou bien un complexe de Kan contractile, et, en outre, la projection

$$\text{Proj}(d) \longrightarrow X$$

est une isofibration conservative.

Démonstration.

L'inclusion $\text{Proj}(d) \longrightarrow X/d$ est une isofibration : c'est une fibration de Kan intérieure, puis qu'une inclusion pleine, et c'est une isofibration conservative, puisque tout objet de X/d quasi-isomorphe à un objet de $\text{Proj}(d)$ est un objet de $\text{Proj}(d)$.

Préchamps

Soit A une petite catégorie.

On a un foncteur pleinement fidèle

$$\hat{A} \longrightarrow \text{Cat}/A$$

$$F \longmapsto A/F$$

où, pour un préfaisceau d'ensembles F sur A , A/F désigne la catégorie dont les objets sont les couples (a, s) , a étant un objet de A , et $s \in F(a)$ une section de F au dessus de a . Un morphisme $(a, s) \rightarrow (a', s')$ dans A/F est un morphisme $a \xrightarrow{u} a'$ tel que $u^*(s') = s$.

On voit A/F comme une catégorie au-dessus de A via la projection évidente $(a, s) \mapsto a$.

On peut vérifier que ce foncteur $\hat{A} \rightarrow \text{Cat}/A$ admet de très bonnes propriétés : il admet un adjoint à gauche et un adjoint à droite. Son image essentielle est formée des catégories fibrées sur A dont les fibres sont discrètes (on renvoie à [SGA 1, exposé VI] pour la notion de catégorie fibrée).

Si A est une ω -catégorie, on va définir la notion de préchamp (ou encore de " ω -préfaïceau") du point de vue des catégories fibrées à fibres discrètes.

La principale différence est que le rôle de la catégorie des ensembles est joué par la catégorie des ω -groupoïdes. Les préchamps sur A seront donc les ω -catégories fibrées sur A dont les fibres sont des ω -groupoïdes. On peut définir abstraitement la notion de " ω -catégorie fibrée" et démontrer qu'un morphisme $X \xrightarrow{P} A$ entre ω -catégories fait de X une ω -catégorie fibrée sur A dont les fibres sont des ω -groupoïdes si et seulement si p est une fibration de Kan à droite (voir le livre de Lurie pour les détails).

On définit donc la catégorie des préchamps sur A , notée $P(A)$, comme la sous-catégorie pleine de $\widehat{\Delta}/A$ formée des fibrations de Kan à droite $X \xrightarrow{P} A$.

On dira qu'un morphisme de préchamps

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ p \searrow & & \swarrow q \\ & A & \end{array}$$

est une équivalence si, pour tout objet $a \in A_0$, le morphisme $X_a \rightarrow Y_a$ est une équivalence de ω -groupoïdes.

$$\begin{array}{ccc} X_a & \longrightarrow & Y_a \\ \parallel & & \parallel \\ p^{-1}(a) & & q^{-1}(a) \end{array}$$

Théorème (Joyal)

Il existe une unique structure de catégorie de modèles sur $\hat{\Delta}/A$ dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les objets fibrants sont les préchamps sur A .

Un morphisme entre préchamps sur A est une équivalence si et seulement si c'est une équivalence faible.

Par démontrer ce théorème, on va expliciter une structure homotopique sur la catégorie de préchamps

$$\hat{\Delta}/A \cong \widehat{\Delta/A}.$$

Cette structure homotopique est définie par l'intervalle $J \times A$ (vu au-dessus de A via la seconde projection) et par la classe d'extensions anodines relativement à cet intervalle engendrée dans $\hat{\Delta}/A$ par l'ensemble des morphismes de la forme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n^k & \xrightarrow{\quad} & \Delta_n \\ & \searrow \quad \swarrow a & \\ & A & \end{array}$$

pour $n \geq 1$, $0 < k \leq n$, $a \in A_n$.

Cette structure homotopique définit bien une structure de catégorie de modèles sur $\hat{\Delta}/A$ dont les cofibrations sont les monomorphismes,

et dont les objets fibrants sont les fibrations de Kan à droite (par la caractérisation des objets fibrants, on utilise le fait que les fibrations de Kan à droite entre ω -catégories sont des isofibrations).

Pour la même raison, les fibrations entre objets fibrants sont aussi les fibrations de Kan à droite au-dessus de A .

On dispose par ailleurs d'un modèle cellulaire canonique (i.e. d'un ensemble générateur canonique pour les cofibrations): il est formé des morphismes de la forme:

$$\begin{array}{ccc} \partial \Delta_n & \hookrightarrow & \Delta_n \\ & \searrow & \swarrow a \\ & A & \end{array}$$

pour $n \geq 0$ et $a \in A_n$.

Il reste donc à vérifier que les équivalences faibles entre préchamps sont bien les équivalences de préchamps définies plus haut. Pour cela, on va étudier une variante du lemme de Yoneda.

Considérons deux objets au-dessus de A

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ p \downarrow & \text{et} & q \downarrow \\ A & & A \end{array}$$

On leur associe un ensemble simplicial $[X, Y]_A$ comme suit.

on forme simplement le carré cartésien ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} [X, Y]_A & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(X, Y) \\ \downarrow & & \downarrow q_* \\ * & \xrightarrow{p} & \underline{\text{Hom}}(X, A) \end{array}$$

Si K est un ensemble simplicial, on note $K \otimes X =$

$$\begin{array}{c} K \times X \\ \downarrow \\ X \\ \downarrow \\ A \end{array}$$

On a alors un isomorphisme naturel:

$$\text{Hom}_{\hat{\Delta}}(K, [X, Y]_A) \cong \text{Hom}_{\hat{\Delta}/A}(K \otimes X, Y)$$

Proposition: si q est une fibration de Kan à droite, alors $[X, Y]_A$ est un ∞ -groupoïde.

Démonstration: en effet, le morphisme q_* est alors une fibration de Kan à droite, et donc il en est de même du morphisme $[X, Y]_A \rightarrow *$, ce qui implique l'assertion.

De même, on démontre la

Proposition: si q est une fibration de Kan à droite, alors par toute inclusion $X' \subset X$, le morphisme induit

$$[X, Y]_A \longrightarrow [X', Y]_A$$

est une fibration de Kan.

Remarque:

Par tout objet a de A (ou comme un objet de $\hat{\Delta}/A$ via le morphisme $* \xrightarrow{a} A$), on a un isomorphisme d'ensembles simpliciaux:

$$Y_a \cong [a, Y]_A$$

(c'est la version triviale du lemme de Yoneda).

Définition.

Un morphisme d'ensembles simpliciaux $K \xrightarrow{i} L$ est un rétracté par déformation à droite s'il existe un morphisme

$$L \xrightarrow{r} K \text{ et un morphisme } h: \Delta_1 \times L \longrightarrow L$$

tel que $ri = 1_K$ et

$$h|_{\{1\} \times L} = ir, \quad h|_{\{0\} \times L} = 1_L, \quad h|_{\Delta_1 \times K} = i \circ pr_2$$

où $pr_2: \Delta_1 \times K \longrightarrow K$ est la projection.

Lemme:

Considérons un morphisme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{i} & L \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & A & \end{array}$$

si i est un rétracté par déformation fort à droite, alors c'est une extension anodyne (relativement à la structure homotopique par la théorie des préchamps sur A).

Démonstration laissée à titre d'exercice (on pourra même prouver que i est une extension anodyne à droite dans $\hat{\Delta}$).

Lemme.

L'image inverse d'un rétracté par déformation à droite par une fibration de Kan à droite est encore un rétracté par déformation à droite.

Démonstration laissée à titre d'exercice.

Théorème.

Soit $X \xrightarrow{\varphi} Y$ un morphisme de $\hat{\Delta}/A$.

$$\begin{array}{ccc} & & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ & A & \end{array}$$

On suppose que p et q sont des fibrations de Kan à droite (i.e. que X et Y sont des préchamps sur A).

Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) Le morphisme φ est une équivalence de préchamps.
- (ii) Le morphisme φ est une équivalence faible.
- (iii) Pour tout objet $Z \downarrow A$, le morphisme

$$[Z, X]_A \longrightarrow [Z, Y]_A$$

est une équivalence de groupoïdes.

Démonstration.

On remarque tout d'abord que

$$\pi_0([Z, X]_A) \cong \text{Hom}_{\text{Ho}(\hat{\Delta}/A)}(Z, X)$$

(preuve laissée à titre d'exercice).

On a donc clairement $(iii) \Rightarrow (ii)$.

Montrons que $(ii) \Rightarrow (i)$.

Soit $a \in A_0$.

On remarque que la structure homotopique pour la théorie des préchamps sur le point $* = \Delta_0$ définit en fait la structure de catégorie de modèles de Quillen pour la théorie des ∞ -groupoïdes (car pour tout ensemble simplicial K , le morphisme $K \rightarrow *$ est une fibration de Kan à droite si et seulement si c'est une fibration de Kan). On en déduit aussitôt que le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Delta} & \longrightarrow & \hat{\Delta}/A \\ K & \longmapsto & \begin{array}{c} K \\ \downarrow \\ \Delta_0 \\ \downarrow a \\ A \end{array} \end{array}$$

est un foncteur de Quillen à gauche - son adjoint à droite, le foncteur $[a, -]_A$ est donc un foncteur de Quillen à droite. Ce dernier respecte donc en particulier les équivalences faibles entre objets fibrants, ce qui implique que $(ii) \Rightarrow (i)$.

Il nous reste donc à prouver que $(i) \Rightarrow (iii)$.

Nous allons démontrer que la condition (i) équivaut à la condition suivante :

(i') Pour tout entier $n \geq 0$ et tout n -simplexe de A

$$\Delta_n \xrightarrow{a} A,$$

le morphisme

$$[\Delta_n, X]_A \longrightarrow [\Delta_n, Y]_A$$

est une équivalence de ∞ -groupoïdes.

Par cela, il suffit de démontrer que l'inclusion

$$\Delta_0 = \{n\} \hookrightarrow \Delta_n$$

induit une fibration triviale

$$[\Delta_n, X]_A \longrightarrow [\Delta_0, X]_A.$$

Cela revient encore à démontrer que, pour tout monomorphisme d'ensembles simpliciaux $K \hookrightarrow L$, l'inclusion

$$\begin{array}{ccc} K \otimes \Delta_n \cup L \otimes \{n\} & \xhookrightarrow{i} & L \otimes \Delta_n \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & A & \end{array}$$

est une cofibration triviale de $\hat{\mathcal{B}}/A$. Or on a par construction un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{array}{ccc}
 K \cong K \otimes \{n\} & \longrightarrow & K \otimes \Delta_n \cong K \times \Delta_n \\
 \downarrow \text{cocartésien} & \nearrow & \downarrow \\
 & K \otimes \Delta_n \cup L \otimes \{n\} & \\
 L \cong L \otimes \{n\} & \longrightarrow & L \otimes \Delta_n \cong L \times \Delta_n
 \end{array}$$

Les deux morphismes horizontaux étant des rétracts par déformation à droite, on conclut.

Il suffit donc à présent de prouver que (i') \Rightarrow (iii).

Pour cela, on remarque que la classe \mathcal{C} des objets $\begin{array}{c} Z \\ \downarrow \\ A \end{array}$ tels que le morphisme

$$[Z, x]_A \longrightarrow [Z, y]_A$$

soit une équivalence de ∞ -groupoïdes est saturée par monomorphismes.

En effet, le foncteur $[-, x]_A$ commute aux limites projectives et envoie les monomorphismes sur des fibrations de Kan entre ∞ -groupoïdes.

La condition (i') affirme que la classe \mathcal{C} contient les préfaisceaux représentables sur Δ/A , ce qu'on sait impliquer qu'elle contient tous les objets de $\hat{\Delta}/A$, ce qu'il fallait démontrer.

Considérons un morphisme de ∞ -catégories

$$A \xrightarrow{u} B.$$

Il induit un couple de foncteurs adjoints

$$\hat{\Delta}/A \begin{array}{c} \xrightarrow{u_!} \\ \xleftarrow{u^*} \end{array} \hat{\Delta}/B$$

$$\text{cà } u_! \left(\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ A \end{array} \right) = \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ B \end{array} \text{ et } u^* \left(\begin{array}{c} Y \\ \downarrow \\ B \end{array} \right) = \begin{array}{c} A \times Y \\ \downarrow \\ B \end{array}.$$

Proposition.

Le couple $(u_!, u^*)$ est une adjonction de Quillen relativement aux structures de catégorie de modèles pour la théorie des préchamps.

Démonstration.

Il suffit de montrer que le foncteur $u_!$ est un foncteur de Quillen à gauche. Il est clair qu'il respecte les cofibrations. Pour montrer qu'il respecte les cofibrations triviales, il suffit de vérifier qu'il respecte les extensions anodines (relatives aux structures homotopiques de définition), ce qui est évident.

Proposition.

Si $u: A \rightarrow B$ est une équivalence de ∞ -catégories, alors $(u_!, u^*)$ est une équivalence de Quillen.

Démonstration.

Soit $\begin{array}{c} X \\ \downarrow q \\ A \end{array}$ une fibration de Kan à droite.

Formons le carré cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} u_! u^*(Y) & \xrightarrow{\varepsilon} & Y \\ u_! u^*(p) \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

Comme p est une isofibration et u une équivalence de ∞ -catégories, et comme A est une ∞ -catégorie, p est une fibration entre objets fibrants et A est un objet fibrant relativement à la structure de catégorie de modèles de Joyal pour les ∞ -catégories. Donc, u étant une équivalence faible, il en est de même de ε . Cela implique que ε est une équivalence faible de $\hat{\mathcal{D}}/A$ pour la structure de catégorie de modèles des préchamps.

En termes de foncteurs dérivés, on a donc démontré que

$$Lu_! Ru^* \cong 1.$$

Montrons que

$$1 \cong Ru^* Lu_!.$$

Soit $\begin{array}{c} X \\ p \downarrow \\ A \end{array}$ un objet de $\hat{\mathcal{D}}/A$. On factorise alors le

morphisme composé $X \xrightarrow{u \circ p} B$ en une cofibration triviale $X \xrightarrow{v} Y$ suivie d'une fibration $Y \xrightarrow{q} B$, ce qui conduit au diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{v} & Y \\
 \downarrow p & \searrow \eta & \downarrow q \\
 & A \times Y & \\
 & \downarrow \omega & \\
 A & \xrightarrow{u} & B
 \end{array}$$

Le morphisme ω est une équivalence faible (car image inverse par la fibration q de l'équivalence faible u dans la structure de catégorie de modèles de Joyal), et comme v est une équivalence faible (par construction), on en déduit qu'il en est de même de η , ce qu'il fallait démontrer.

Nous allons à présent démontrer une version moins triviale du lemme de Yoneda.

Lemme.

Si $a \in A_0$ est un objet final, alors l'inclusion $\Delta_0 \xrightarrow{a} A$ est une extension anodyne à droite.

Démonstration :

$\Delta_0 \xrightarrow{a} A$ est aussi un rétracté de l'inclusion $\Delta_0 * \Delta_0 \xrightarrow{a * i} A * \Delta_0$, la quelle est une extension anodyne à droite.

Lemme de Yoneda (1)

Par tout préchamp X sur A et tout objet a de A , on a une équivalence de ∞ -groupoïdes

$$[A/a, X]_A \simeq X_a.$$

Démonstration.

Comme $\Delta_0 \xrightarrow{\iota_a} A/a$ est une équivalence faible de $\hat{\mathbb{A}}/A$, le foncteur de Quillen à droite $[-, X]_A$ induit une fibration triviale

$$[A/a, X]_A \xrightarrow{\sim} [a, X]_A = X_a.$$

Lemme de Yoneda (2)

Par tout couple d'objets de A , (a, b) , on a une équivalence de ∞ -groupoïdes

$$[A/a, A/b]_A \simeq A(a, b).$$

Démonstration.

Il suffit de montrer que $[a, A/b]_A \simeq A(a, b)$.

Or on sait que $A/b \simeq A//b$, et le fibre de $A//b$ au-dessus de a n'est autre que $A(a, b)$.

Remarque: Les "préchamps représentables" correspondent donc aux fibrations de Kan à droite $X \xrightarrow{P} A$ telle que la ∞ -catégorie X admette un objet final.

Localisation.

Soit C une ∞ -catégorie, et $S \subset C$ une sous- ∞ -catégorie.

Un morphisme $C \rightarrow L$ est une localisation de C par S s'il induit une équivalence de ∞ -catégories

$$\underline{\mathrm{Hom}}(L, X) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_S(C, X)$$

pour toute ∞ -catégorie X , où $\underline{\mathrm{Hom}}_S(C, X)$ est la sous- ∞ -catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(C, X)$ formée des morphismes $C \rightarrow X$ qui envoient les flèches de S sur des flèches quasi-inversibles dans X .

On note alors $L = S^{-1}C$.

Proposition.

Soit C une ∞ -catégorie. On considère une extension anodine $C \rightarrow C'$ avec C' un ∞ -groupoïde. Alors C' est une localisation de C par C , i.e. $C' \simeq C^{-1}C$.

Démonstration:

On a $\underline{\mathrm{Hom}}_C(C, X) = \underline{\mathrm{Hom}}(C, k(X)) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(C', k(X))$ pour toute ∞ -catégorie X (car, pour tout complexe de $\mathrm{Kan} K$,

Le foncteur Hom $(-, K)$ envoie les extensions anodines sur des fibrations triviales.

On en déduit une construction de $S^{-1}C$ en général:

On forme le carré homotopiquement cocartésien

$$\begin{array}{ccc} S & \hookrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{-1}S & \hookrightarrow & S^{-1}S \amalg_S C \end{array}$$

et on choisit une extension anodine intérieure

$$S^{-1}S \amalg_S C \hookrightarrow S^{-1}C$$

dont le but est une ω -catégorie.

Si \mathcal{M} est une catégorie de modules de classe d'équivalence faibles W , on applique cette construction à $C = N(\mathcal{M})$ et $S = N(W)$.

On pose $\underline{Ho}(\mathcal{M}) = S^{-1}C$. C'est la ω -catégorie associée à \mathcal{M} . On a alors, par construction:

$$\tau(\underline{Ho}(\mathcal{M})) = Ho(\mathcal{M})$$

(où $Ho(\mathcal{M})$ est la catégorie localisée habituelle).