Université Paul Sabatier — Novembre 2014

Examen Partiel L3 — **Algèbre**

Exercice 1. On considère l'anneau quotient

$$A = \mathbf{C}[X,Y]/(XY-1)\,,$$

et on désigne par x l'image de la variable X dans A.

1) Montrer que x est inversible dans A. Montrer que tout élément non nul a de A s'écrit de manière unique sous la forme

$$a = x^m P(x)\,,$$

avec m un entier relatif, et $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes dont le coefficient constant non nul. On note $e(a)$ le degré de P.

2) Soient a et b deux éléments de A, avec $b \neq 0$. Montrer qu'il existe q et r dans A tels que $a = bq + r$ et $r = 0$ ou $e(r) < e(b)$.

3) En déduire que A est un anneau principal.

Exercice 2. Soit A un anneau et $f \in A$. On pose

$$A[f^{-1}] = S^{-1}A$$

où $S = \{f^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ désigne le système multiplicatif engendré par f. On a donc un morphisme canonique

$$p : A \to A[f^{-1}]\,, \quad x \mapsto \frac{x}{1}\,.$$

Montrer qu'il existe un unique isomorphisme d'anneaux

$$\varphi : A[f^{-1}] \to A[X]/(fX-1)$$

tel que $\varphi(a)$ coïncide avec la classe d'équivalence du polynôme constant a pour tout $a \in A$.

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif unitaire.

1) Soient $I \subset A$ et $J \subset A$ deux idéaux de A. On suppose qu'il existe $x \in I$ et $y \in J$ tels que $1 = x + y$. Construire un isomorphisme d'anneaux canonique

$$A/I \times A/J \simeq A/I \cap J\,.$$

2) On suppose à présent que A est en outre principal. Soient a et b deux éléments de A, supposés premiers entre eux (i.e. tels qu'aucun élément irréductible de A ne divise à la fois a et b). Déduire de la question précédente l'existence d'un isomorphisme canonique

$$A/(a) \times A/(b) \simeq A/(ab)$$

(le théorème chinois).

Exercice 4. Soit A un anneau commutatif unitaire, et E un ensemble. On note $\mathcal{F}(E, A)$ l'ensemble des applications $E \to A$, muni de la structure d'anneau définie par les formules :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (fg)(x) = f(x)g(x) \text{ pour tout } x \in E.$$

Lorsque $E \subset A$, on définit un morphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned} e : A[X] &\to \mathcal{F}(E, A) \\ P &\mapsto e(P)\,, \end{aligned}$$

où, pour un polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, on note $e(P)$ l'application

$$x \mapsto P(x) = e(P)(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\,.$$

1) Montrer que, lorsque A est un corps, si E est infini, le morphisme d'anneaux e est injectif.
2) On suppose que A est intègre et infini. Montrer que le morphisme e est injectif.
3) Montrer que, lorsque A est fini, le morphisme e n'est jamais injectif.

Exercice 5. Soit $A = \mathbf{R}[\cos x, \sin x]$ le sous-anneau de l'anneau des fonctions réelles à une variable formé des fonctions de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos^n x + b_n \sin^n x$$

(avec a_0 et $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ des nombres réels, $n \in \mathbf{N}$). Montrer que les fonctions $\sin x, 1 + \cos x$ et $1 - \cos x$ sont des éléments irréductibles de A. En déduire que A n'est pas un anneau factoriel (on pourra considérer plus particulièrement la fonction $\sin^2 x$). En déduire l'existence d'un idéal $J \subset \mathbf{R}[X, Y]$ tel que le quotient $\mathbf{R}[X, Y]/J$ ne soit pas factoriel.

Exercice 6. 1) Montrer que l'idéal $(2, X)$ de $\mathbf{Z}[X]$ n'est pas principal.
2) Soit A un anneau commutatif unitaire tel que l'anneau de polynômes $A[X]$ soit principal. Montrer que A est un corps.