Exercices

Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1 *Résoudre les systèmes linéaires suivants :*

1. $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$

   Corrigé

2. $\left\{\begin{array}{ccccccr} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 2 \end{array}\right.$

   Corrigé

3. $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 2 \end{array}\right.$

   Corrigé

Exercice 2 *Résoudre les systèmes linéaires suivants en discutant s'il y a lieu en fonction des valeurs des paramètres réels :*

1. $\left\{\begin{array}{l} x+2y=5 \\ x+3y=5 \\ x+7y=\beta \end{array}\right.$

   Corrigé

2. $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & az & = & 0 \\ x & + & ay & - & z & = & 0 \\ x & + & (a+1)y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$

   Corrigé

3. $\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}\right.$

   Corrigé

Calcul matriciel

Exercice 3 *Soit* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *calculer* J^n . *En déduire* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

2) En utilisant, pour $k \in \mathbb{N}^*$, *l'identité* $(I_3 - J)\left(I_3 + \sum_{i=1}^{k} J^i\right) = I_3 - J^{k+1}$, *montrer que* A *est inversible et calculer* A^{-1}.

Corrigé

Exercice 4 *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *des réels. On considère la matrice diagonale* $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. *Discuter l'inversibilité de* Δ *et si elle est inversible, donner son inverse.*

Corrigé

Exercice 5 *Soit* $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on calcule le triplet* (u_n, v_n, w_n) *par les formules de récurrences suivantes :* $\begin{cases} u_n = u_{n-1} + 2v_{n-1} \\ v_n = v_{n-1} + 2w_{n-1} \\ w_n = w_{n-1} \end{cases}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1) Déterminer la matrice A *carrée réelle de* $\mathcal{M}(3,3)$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = AX_{n-1}$.

2) Soit B *la matrice définie par* $A = I_3 + B$. *Calculer* B^2, B^3 *puis* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

3) En déduire u_n, v_n *et* w_n *en fonction de* u_0, v_0 *et* w_0.

Corrigé

Espaces vectoriels

Exercice 6 *Montrer que l'ensemble E des matrices de la forme :*

$$M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} b+c-a & a-b & a-c \\ c-a & a & a-c \\ b-a & a-b & a \end{pmatrix} \text{ avec } (a,b,c) \in R^3$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(3,3)$. En donner une famille génératrice et une base.
Corrigé

Exercice 7 *Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^2,+,.)$ on considère les familles de vecteurs suivantes :*
$F_1 = \{v_1 = (1,1)\}$, $F_2 = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-2),\ v_3 = (3,4)\}$.
$F_3 = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-2)\}$, $F_4 = \{v_1 = (1,1),\ v_1' = (-3,-3)\}$,
Indiquer quelles sont les familles libres, génératrices de $\mathbb{R}^2$, les bases de $\mathbb{R}^2$.
Corrigé

Exercice 8 *Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^3,+,.)$ on considère une famille libre $\{v_1,v_2\}$ de vecteurs. Démontrer, pour tout v de $\mathbb{R}^3$, l'équivalence*

$$\{v_1,v_2,v\} \textit{ liée} \Leftrightarrow v \in \textit{vect}(\{v_1,v_2\}).$$

Généraliser à un espace vectoriel quelconque.
Corrigé

Exercice 9 *Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^3,+,.)$. Si oui, en donner une base.*
$F_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 = 2x_2 - x_3\}$, $F_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\}$,
$F_3 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, \sin(x_3) = x_1 + x_2\}$,
$F_4 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 - x_2 - x_3 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$.
Corrigé

Exercice 10 *Les sous-ensembles suivants du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont-ils des sous espaces vectoriels de E.*
$E_1 = \{f \in E,\ f(-1) = 0\}$, $E_2 = \{f \in E,\ \ f(3) = 1 + f(-5)\}$,
$E_3 = \{f \in E,\ f \textit{ bornée }\}$, $E_4 = \{f \in E,\ f \leq 0\}$,
Corrigé

Exercice 11 *1. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 dont $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base. Les vecteurs suivants de E :*

$$v_1 = e_1 - 2e_2 + e_3,\ v_2 = 3e_1 - e_2 + e_3,\ v_3 = 2e_1 + 6e_2 - 2e_3$$

constituent-ils une base de E ?

2. *On pose $E_1 = vec(v_1, v_2, v_3)$. Donner la dimension de E_1 et trouver une base de E_1 extraite de la famille génératrice $\{v_1, v_2, v_3\}$. Exprimer dans cette base ceux des vecteurs qui n'en font pas partie.*

Corrigé

Applications linéaires

Exercice 12 *Les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ sont-elles des endomorphismes de $(\mathbb{R}^2, +, .)$:*

$f_1 : (x_1, x_2) \mapsto (1 + x_1, x_2)$, $\quad f_2 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_2)$,
$f_3 : (x_1, x_2) \mapsto (\sin(x_1), x_2)$, $\quad f_4 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, 0)$,

Corrigé

Exercice 13 *Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension 3 dont une base est (e_1, e_2, e_3) resp $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Soit f l'application linéaire de E dans F définie par :*

$$f(e_1) = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3, \quad f(e_2) = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad f(e_3) = -3\varepsilon_2 + 9\varepsilon_3.$$

1. *Soit x un vecteur de E de coordonnées x_1, x_2, x_3 dans la base (e_1, e_2, e_3).Calculer les coordonnées de $f(x)$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.*
2. *Déterminer une base de $Im(f)$ et une base de $Ker(f)$.*

Corrigé

Exercice 14 *Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 + 5x_3, x_1 - 3x_2, 3x_1 - 3x_2 + 6x_3).$$

1. *Justifier que f est linéaire et donner sa matrice dans les bases canoniques.*
2. *Déterminer $Im(f)$ et en donner une base.*
3. *Déterminer $Ker(f)$ et en donner une base.*
4. *Donner l'image par f de $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_2 + x_3 = 0\}$.*
5. *Donner l'image par f de $vec\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$.*

Corrigé

Exercice 15 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont $\{e_1, e_2\}$ est une base, F un $\mathbb{R}$ espace vectoriel dont $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est une base et f l'application linéaire de E dans F définie par $f(e_1) = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ et $f(e_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$.*

1. *Donner la matrice A de f dans les bases $\{e_1, e_2\}$ et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.*
2. *Soit x un vecteur de E de coordonnées x_1 et x_2 dans la base $\{e_1, e_2\}$, donner les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.*
3. *Déterminer une base de $Im(f)$. Justifier que f est un isomorphisme. Donner la matrice de f^{-1} dans les bases $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ et $\{e_1, e_2\}$.*
4. *Soit g l'application de F dans E qui au vecteur y de coordonnées y_1 et y_2 dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ associe le vecteur*

   $$g(y) = (3y_1 - y_2)e_1 + (5y_1 - 2y_2)e_2$$

   Donner une base de $Im(g)$. Montrer que g est un isomorphisme de F et donner la matrice de g^{-1} dans les bases $\{e_1, e_2\}$ et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.
5. *Donner la matrice de $f \circ g$ dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ et justifier que $f \circ g$ est un isomorphisme. Donner la matrice de $(f \circ g)^{-1}$ dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.*
6. *Donner la matrice de $g \circ f$ dans la base $\{e_1, e_2\}$ et justifier que $g \circ f$ est un isomorphisme. Donner la matrice de $(g \circ f)^{-1}$ dans la base $\{e_1, e_2\}$.*

Corrigé

Exercice 16 *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est :* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Soit $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Calculer les coordonnées y_1, y_2, y_3 du vecteur $f(v)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Trouver une base de $Im(f)$ et une base de $Ker(f)$.*
3. *Résoudre l'équation $f(v) = (1, 3, 0)$.*

Corrigé

Exercice 17 *Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4.*

1. *Vérifier que $f : p \in E \to \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)dx - \frac{1}{3}[p(-1) + 4p(0) + p(1)]$ est une forme linéaire de E.*
2. *Déterminer $Im(f)$ et $Ker(f)$.*

Corrigé