CMI, Université de Provence
Année 07-08

Agrégation de Mathématiques
Option Calcul scientifique et modélisation

Interpolation et approximation : Courbes de Bézier

Texte de Claudia NEGULESCU

Les courbes de Bézier ont été introduites par l'ingénieur français Pierre Bézier, qui travaillait chez Renault dans les années 60. Il a étudié le problème de conception de surfaces 3D (carrosseries d'automobiles, fuselages d'avion, etc.) pour les premiers programmes de CAO (Conception Assistée par Ordinateur). Le but était de trouver un moyen pour définir une courbe de manière précise et simple (jeu de paramètres défini de manière rigoureuse) pour qu'une machine (robot) puisse procéder à la découpe.
Aujourd'hui les courbes de Bézier ont encore beaucoup d'applications, par exemple en graphisme ou dans la synthèse d'images (PostScript, GIMP entre autres).

1 Courbes de Bézier.

Dans cette section on ne s'intéressera pas à l'interpolation d'une fonction, mais plutôt à la construction d'une courbe de $\mathbb{R}^2$ passant par un nuage de points, comme par exemple :
• Points pour une tête (voir Figure 3):

$$\begin{pmatrix} 9,5 & 5,5 & 1 & -3,5 & -9,5 & -9,5 & -8,5 & -5 & -4,5 & -0,5 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 7 & 9,5 & 8 & -2,5 & -4,5 & -5 & -2,5 & -9 & -7 & -4,5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2,5 & 5 & 7,5 & 6,5 & 9,5 \\ -1,5 & -5 & -4,5 & -5 & -0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

• Points pour une voiture (voir Figure 3):

$$\begin{pmatrix} -9 & -9 & -8,5 & -7,5 & -6,4 & -2,3 & -1 & 4,1 & 6,3 & 7,7 \\ -5 & -4,2 & -4,2 & -1,2 & -0,3 & 0,2 & 2,7 & 2,7 & 1 & -1,7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8,4 & 9 & 9 & 5,6 & 5 & 4,4 & 3,4 & 2,4 & 1,8 & -2,3 \\ -4,4 & -4,4 & -5,2 & -5,2 & -5,2 & -6,2 & -6,7 & -6,2 & -5,2 & -5,2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4,1 & -4,7 & -5,7 & -6,7 & -7,3 & -9 \\ -5,2 & -6,2 & -6,7 & -6,2 & -5,2 & -5,2 \end{pmatrix}$$

Une courbe de Bézier *cubique* est caractérisée par 4 points, appelés points de contrôle. Le premier et le dernier point sont des noeuds. Les deux autres points permettent de définir la forme de l'arc, la courbe ne passant pas en général par ces deux points de contrôle (voir Figure 1). Pour définir de manière mathématique les courbes de Bézier de degré

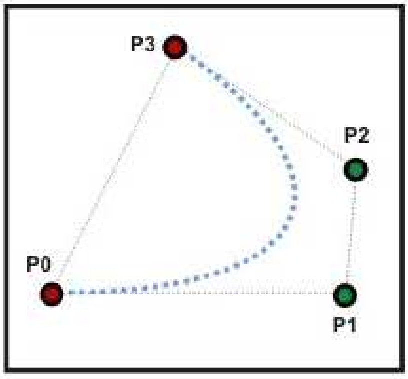

Figure 1: Une courbe de Bézier cubique avec les points de contrôle $P_0, \cdots, P_3$.

supérieur, on introduit ici les polynômes de Bernstein $B_{n,k} \in \mathcal{P}_n$ par

$$B_{n,k}(x) := C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad k = 0, \cdots n,$$

avec $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ les coefficients binomiaux.

Définition 1 *On appelle courbe de Bézier de degré $n \geq 1$, associée aux points de contrôle $c_0, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}^d$, la courbe $\gamma_{\mathbf{c}}^n(t)$, donnée par la paramétrisation*

$$\gamma_{\mathbf{c}}^n(t) := \sum_{k=0}^{n} c_k B_{n,k}(t), \quad t \in [0,1].$$

L'algorithme de Casteljau permet de calculer $\gamma_{\mathbf{c}}^n(t)$ de manière récurrente et rapide.

Algorithme de Casteljau : Soit $c_j^{(0)} := c_j$, $\forall j = 0, \cdots, n$. Alors on construit $\forall t \in [0,1]$ de manière récurrente la famille de points

$$c_j^{(i)} := (1-t)c_j^{(i-1)} + tc_{j+1}^{(i-1)}, \quad i = 1, \cdots, n, \quad j = 0, \cdots n-i.$$

Théorème 1 *L'algorithme de Casteljau avec comme points de départ les points de contrôle c_k, $k = 0, \cdots, n$, mène vers*

$$\gamma_{\mathbf{c}}^n(t) = c_0^{(n)}, \quad \forall t \in [0,1].$$

Propriétés de la courbe de Bézier:

• Une courbe de Bézier associée aux points $c_0, \cdots, c_n$ passe par les points c_0 et c_n, mais en général elle ne passe pas par les autres points.

• La courbe $\gamma_{\mathbf{c}}^n$ est tangente en c_0 au segment $[c_0, c_1]$ et en c_n au segment $[c_{n-1}, c_n]$. Plus précisément, $\gamma_{\mathbf{c}}^{n\prime}(0) = n(c_1 - c_0)$ et $\gamma_{\mathbf{c}}^{n\prime}(1) = n(c_n - c_{n-1})$.

• Une courbe de Bézier se trouve à l'intérieur de l'enveloppe convexe de ses points de contrôle.
• Une courbe de Bézier est infiniment dérivable.
• Les polynômes de Bernstein sont strictement positifs sur $(0,1)$. Par conséquent, si on modifie un des points de contrôle, toute la courbe de Bézier sera modifiée.

2 Courbes interpolantes de classe C^1.

Le but de cette section est maintenant de construire une courbe interpolante de classe C^1, définie par morceaux, chaque morceau étant une courbe de Bézier cubiques.
Soient P_i, $i = 0, \cdots, m$ un ensemble de noeuds. On cherche une courbe C^1 passant par

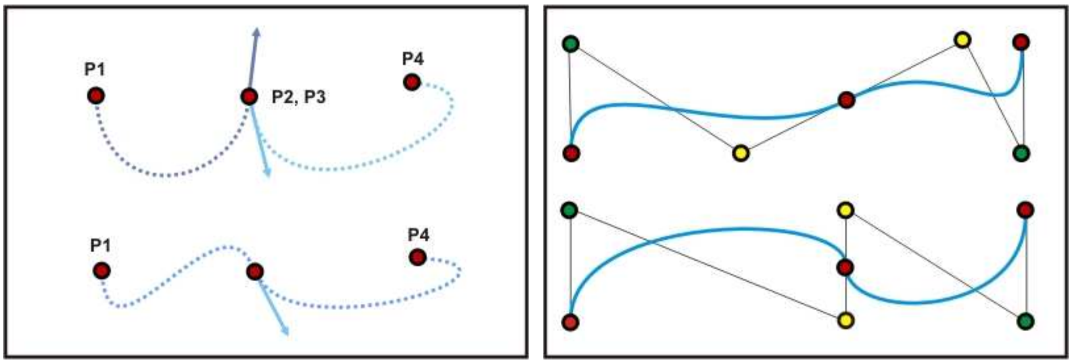

Figure 2: Courbes interpolantes, définies par morceaux.

ces points P_i et construite à l'aide des courbes de Bézier $\gamma_i(t)$, $i = 0, \cdots, m-1$, $t \in [0,1]$, courbes de degré 3. Donc on impose déjà

$$\gamma_i(0) = P_i\,, \quad \gamma_i(1) = P_{i+1}\,, \quad i = 0, \cdots, m-1\,.$$

Ces courbes γ_i sont déterminées de manière unique par les points de contrôle P_i, Q_i, R_i et P_{i+1} (voir première section). Par conséquent, pour déterminer la courbe interpolante entière, on aura besoin de la connaissance des Q_i et R_i. Cela se fera en fixant les dérivées dans les points de bord des courbes γ_i. En effet, on sait que

$$\gamma_i'(0) = 3(Q_i - P_i)\,, \quad \gamma_i'(1) = 3(P_{i+1} - R_i)\,, \quad i = 0, \cdots, m-1\,.$$

Pour que la courbe interpolante soit de classe C^1 il faudrait que $\gamma_i'(1) = \gamma_{i+1}'(0)$ soit satisfaite. On impose

$$\gamma_i'(1) = \gamma_{i+1}'(0) = \frac{P_{i+2} - P_i}{\alpha}\,, \quad i = 0, \cdots, m-2\,,$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitraire, mais fixée. On a imposé l'égalité des dérivées dans les points de raccordage. Il nous manque encore à fixer la valeur des deux dérivées en P_0 et P_m. On prend

$$\gamma_0'(0) = 2\frac{P_1 - P_0}{\alpha} \quad \text{et} \quad \gamma_{m-1}'(1) = 2\frac{P_m - P_{m-1}}{\alpha} \,.$$

On trouve donc

$$Q_i = P_i + \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{3\alpha} \,, \;\; i = 1, \cdots, m-1 \,; \quad Q_0 = P_0 + \frac{2(P_1 - P_0)}{3\alpha} \,,$$

$$R_i = P_{i+1} - \frac{P_{i+2} - P_i}{3\alpha} \,, \;\; i = 0, \cdots, m-2 \,; \quad R_{m-1} = P_m - \frac{2(P_m - P_{m-1})}{3\alpha} \,.$$

Remarque 1 *On peut essayer de construire une courbe interpolante de classe C^2, constituée de courbes de Bézier cubiques. Ce type de courbe s'appelle une B-spline.*

Indications pour l'exposé :

• On pourra démontrer quelques propriétés des courbes de Bézier.

• On pourra démontrer le théorème 1.

• Implémenter l'algorithme de Casteljau pour tracer une courbe de Bézier à partir de ses points associés (Figure 3).

• On pourra mettre en évidence les propriétés des courbes de Bézier sur un exemple.

• Implémenter un algorithme pour tracer une courbe interpolante C^1 à partir de ses points associés, par exemple pour la tête et la voiture.

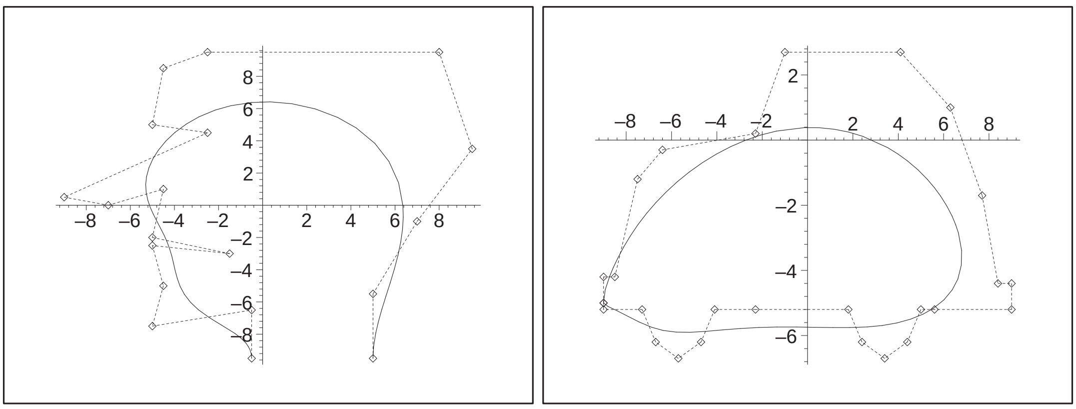

Figure 3: La courbe de Bézier pour la tête et la voiture.

Bibliographie

[1] F. Hubert, J. Hubbard, *Calcul scientifique de la théorie à la pratique*

[2] G. Demengel, J.P. Pouget, *Modèles de Béziers, de B-splines et de NURBS: Mathématiques des courbes et des surfaces*

[3] Cours de Y. Achdou, *Bases des méthodes numériques.*