Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

Ensembles de Julia d’aire positive

Xavier Buff & Arnaud Chéritat
Université Paul Sabatier (Toulouse III)

À la mémoire d’Adrien Douady

Fatou, Julia

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

La dynamique holomorphe

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

La dynamique holomorphe

Naissance du sujet dans les années 1910 avec les travaux de Julia et Fatou, basés sur le théorème de Montel et sa notion de famille normale.

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

La dynamique holomorphe

Naissance du sujet dans les années 1910 avec les travaux de Julia et Fatou, basés sur le théorème de Montel et sa notion de famille normale.

Le Grand Prix de l'Académie des Sciences 1918 devait porter sur l'étude de l'itération d'un point de vue global. C'est Gaston Julia qui va le remporter. Les travaux de Fatou sont néanmoins très proches. Chacun va à l'occasion produire un mémoire fondateur.

Définitions

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

Une fraction rationnelle F, quotient de deux polynômes à coefficients complexes, est vue comme application de la sphère de Riemann $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans elle même:

$$F : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$$

Définitions

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

Une fraction rationnelle F, quotient de deux polynômes à coefficients complexes, est vue comme application de la sphère de Riemann $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans elle même:

$$F : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$$

Considérons un point $z \in \mathbb{S}$. S'il existe un voisinage V de z sur lequel la famille des itérées F^n forme une famille normale[1], on dit que z est dans l'*ensemble de Fatou*. Sinon, il est dans l'*ensemble de Julia* $J = J(F)$.

[1] c'est à dire une famille équicontinue de fonctions de V dans $\mathbb{S}$

Définitions

Une fraction rationnelle F, quotient de deux polynômes à coefficients complexes, est vue comme application de la sphère de Riemann $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans elle même:

$$F : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$$

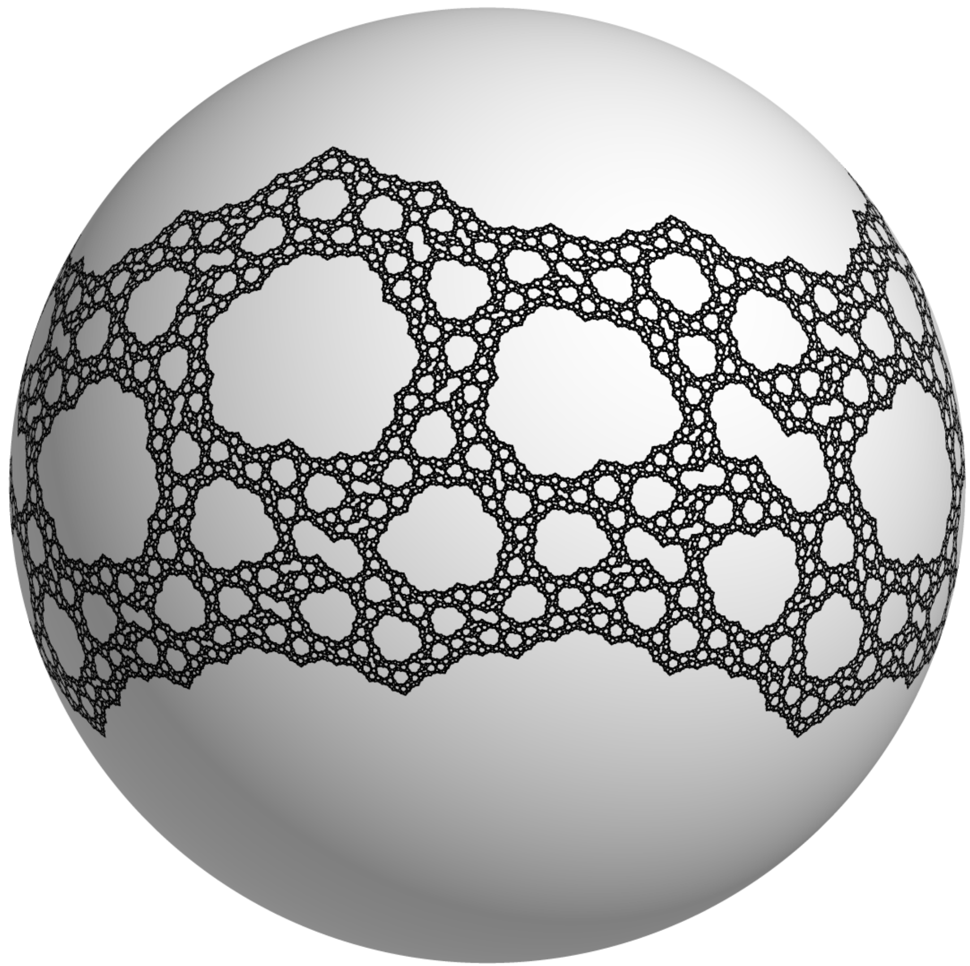
Considérons un point $z \in \mathbb{S}$. S'il existe un voisinage V de z sur lequel la famille des itérées F^n forme une famille normale[1], on dit que z est dans l'*ensemble de Fatou*. Sinon, il est dans l'*ensemble de Julia* $J = J(F)$.

Il s'agit donc d'ensembles définis dynamiquement. J est fermé. $F(J) = J$. L'image par F d'une composante connexe de l'ensemble de Fatou est une composante connexe.

[1] c'est à dire une famille équicontinue de fonctions de V dans $\mathbb{S}$

Exemple d’ensemble de Julia

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements



Le théorème de Montel

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

Théorème de Montel. La famille des applications holomorphes du disque unité $\mathbb{D}$ dans la sphère privée de trois points (par exemple 0, 1 et ∞) est normale.

Le théorème de Montel

Théorème de Montel. La famille des applications holomorphes du disque unité $\mathbb{D}$ dans la sphère privée de trois points (par exemple 0, 1 et ∞) est normale.

Premières conséquences :

– Définition équivalente de l'ensemble de Julia : J est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs de F.

– Classification des composantes connexes périodiques U de l'ensemble de Fatou : U est soit

- un bassin attractif immédiat
- un bassin parabolique immédiat
- un domaine de rotation (homéomorphe à un disque ou un anneau)

Hyperbolicité

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

Fractions rationnelles hyperboliques.

Ce sont les fractions rationnelles qui sont strictement répulsives sur leur ensemble de Julia : il existe $n > 0$ tel que la dérivée de l'itérée F^n est de norme sphérique $> 1 + \varepsilon$ sur J.

On peut les caractériser par la propriété : sous l'itération de F, tout point critique tend vers un cycle attractif (Fatou-Julia).

Elles sont stables par perturbation : toute fraction rationnelle proche de F est hyperbolique et son ensemble de Julia varie continûment avec F tant qu'elle reste hyperbolique.

Leur ensemble de Julia est de mesure nulle et même de dimension de Hausdorff < 2.

Questions

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

Quelques questions restaient ouvertes.

– Une composante connexe de l'ensemble de Fatou peut-elle être non périodique ?

– Des exemples pour lesquels J est toute la sphère étaient connus. Les autres ont un J d'intérieur vide. Mais leur mesure est-elle nulle ?

– Fatou s'est demandé si, dans l'ensemble des fractions rationnelles de degré fixé $d \geqslant 2$, celles qui sont hyperboliques forment une partie dense[2]. De même pour les polynômes.

[2] il est connu que c'est un ouvert

Le renouveau

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

L'étude globale de l'itération des fonctions rationnelles, par opposition à l'étude au voisinage des points périodiques, tombe ensuite plus ou moins dans l'oubli.

Le sujet va trouver une seconde jeunesse dans les années 80 grâce aux ordinateurs, avec notamment les travaux de Benoît Mandelbrot, dégageant la notion de Fractal et déterrant les mémoires de Julia et Fatou, et Hamal Hubbard, étudiant la méthode de Newton et fondant avec Adrien Douady l'école de la dynamique holomorphe.

Le renouveau

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

L'étude globale de l'itération des fonctions rationnelles, par opposition à l'étude au voisinage des points périodiques, tombe ensuite plus ou moins dans l'oubli.

Le sujet va trouver une seconde jeunesse dans les années 80 grâce aux ordinateurs, avec notamment les travaux de Benoît Mandelbrot, dégageant la notion de Fractal et déterrant les mémoires de Julia et Fatou, et Hamal Hubbard, étudiant la méthode de Newton et fondant avec Adrien Douady l'école de la dynamique holomorphe.

La famille $P_c : z \mapsto z^2 + c$

Le renouveau

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

L'étude globale de l'itération des fonctions rationnelles, par opposition à l'étude au voisinage des points périodiques, tombe ensuite plus ou moins dans l'oubli.

Le sujet va trouver une seconde jeunesse dans les années 80 grâce aux ordinateurs, avec notamment les travaux de Benoît Mandelbrot, dégageant la notion de Fractal et déterrant les mémoires de Julia et Fatou, et Hamal Hubbard, étudiant la méthode de Newton et fondant avec Adrien Douady l'école de la dynamique holomorphe.

La famille $P_c : z \mapsto z^2 + c$
– d'apparence simple,

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

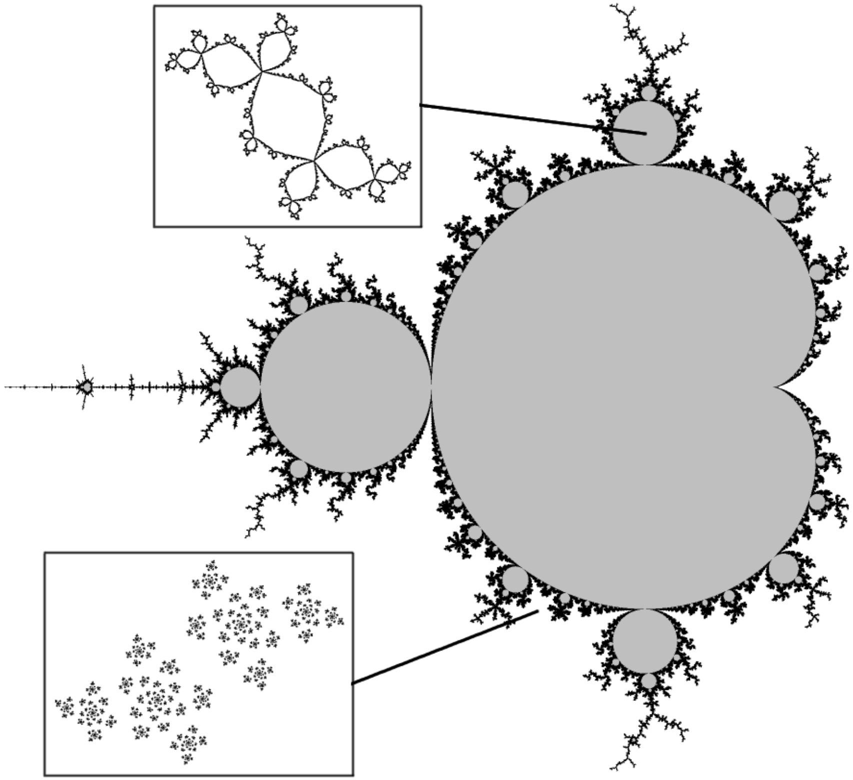
Le renouveau

L'étude globale de l'itération des fonctions rationnelles, par opposition à l'étude au voisinage des points périodiques, tombe ensuite plus ou moins dans l'oubli.

Le sujet va trouver une seconde jeunesse dans les années 80 grâce aux ordinateurs, avec notamment les travaux de Benoît Mandelbrot, dégageant la notion de Fractal et déterrant les mémoires de Julia et Fatou, et Hamal Hubbard, étudiant la méthode de Newton et fondant avec Adrien Douady l'école de la dynamique holomorphe.

La famille $P_c : z \mapsto z^2 + c$
– d'apparence simple,
– universelle.

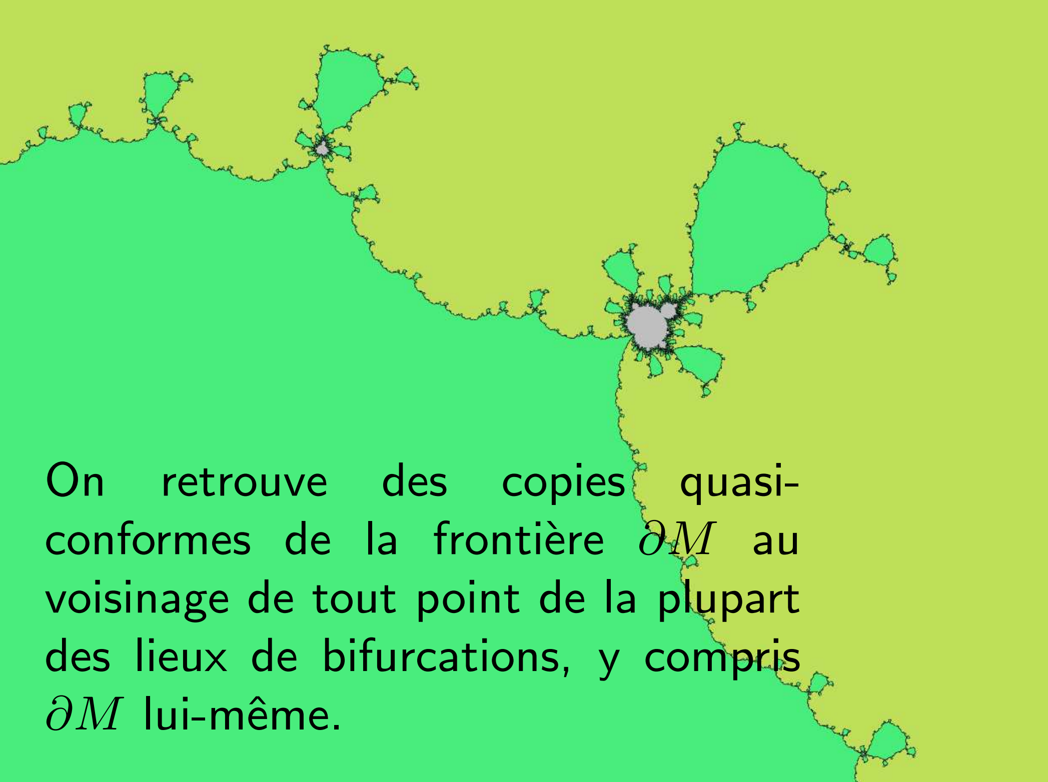
L'ensemble de Mandelbrot



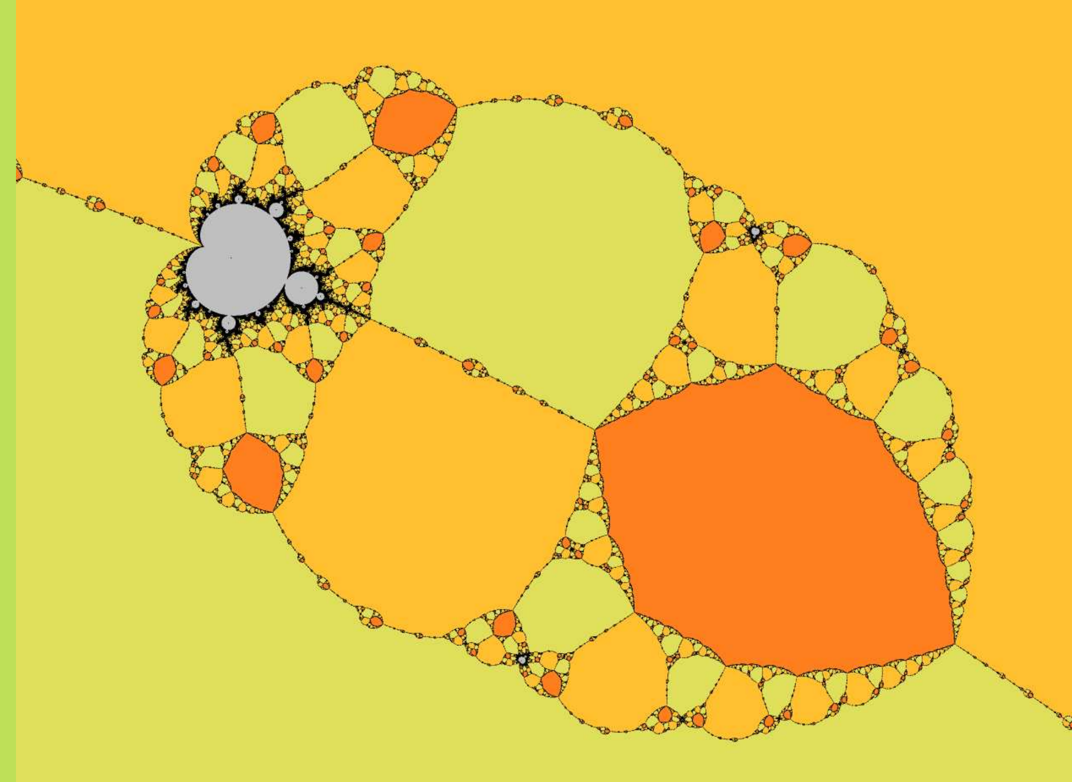
Dichotomie :
–$J(P_c)$ connexe $\iff c \in M$
–$J(P_c)$ Cantor sinon

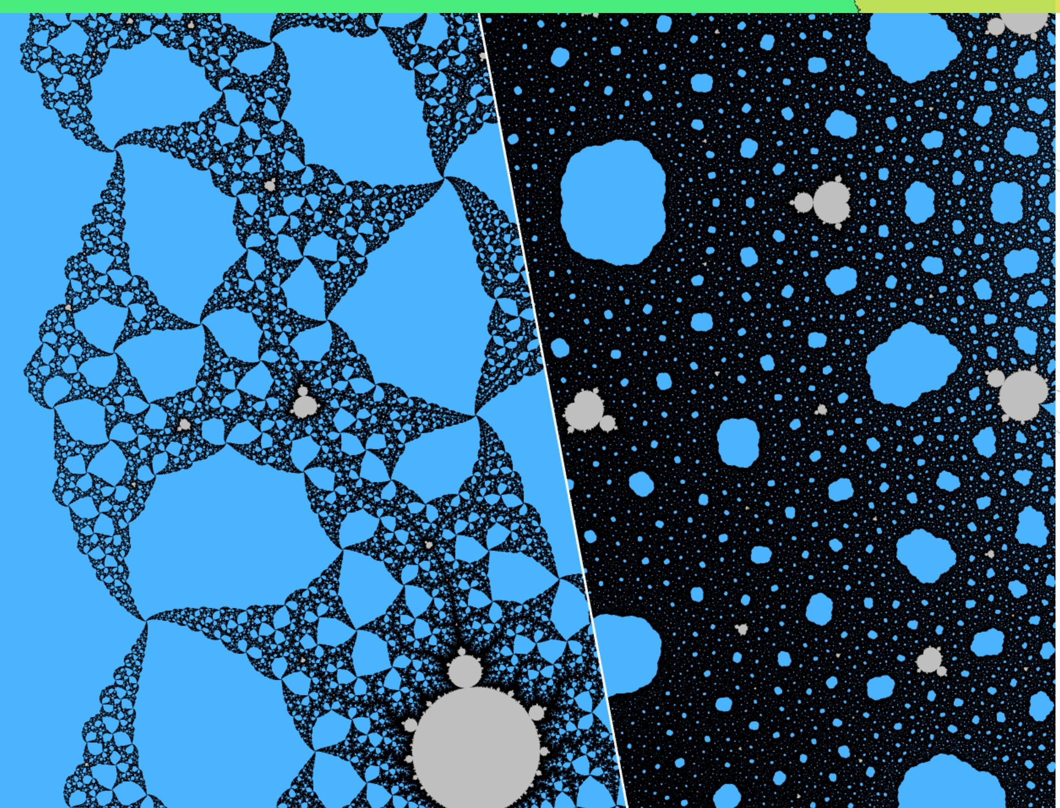
La fontière ∂M est le lieu de bifurcation de la dynamique, c.à.d. là où l'ensemble de Julia ne varie pas de façon continue avec c.

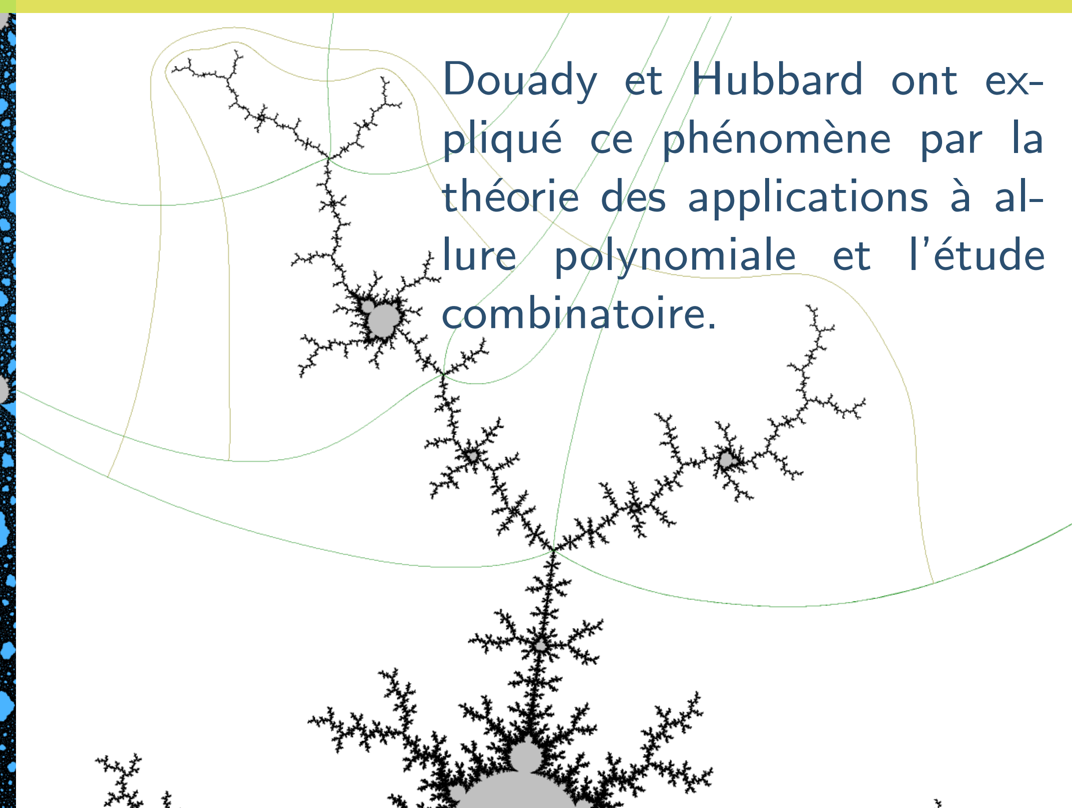
Théorème. (Douady, Hubbard) Si l'ensemble de Mandelbrot est localement connexe, alors l'ensemble des c tels que P_c est hyperbolique est dense dans $\mathbb{C}$.



On retrouve des copies quasi-conformes de la frontière ∂M au voisinage de tout point de la plupart des lieux de bifurcations, y compris ∂M lui-même.







Douady et Hubbard ont expliqué ce phénomène par la théorie des applications à allure polynomiale et l'étude combinatoire.

Quasiconforme

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

Puis vinrent les méthodes quasiconformes, qui permirent entre autres :

– La fin de la classification des composantes de Fatou par Denis Sullivan qui démontre que *toute composante est préperiodique*.

– Une expression équivalente de la conjecture de Fatou (Mañe, Sad, Sullivan) : la densité de l'hyperbolicité dans la famille $z^2 + c$ équivaut à l'absence d'une forme de Beltrami invariante non nulle portée par leurs ensembles de Julia.

Quasiconforme

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

Puis vinrent les méthodes quasiconformes, qui permirent entre autres :

– La fin de la classification des composantes de Fatou par Denis Sullivan qui démontre que *toute composante est préperiodique*.

– Une expression équivalente de la conjecture de Fatou (Mañe, Sad, Sullivan) : la densité de l'hyperbolicité dans la famille $z^2 + c$ équivaut à l'absence d'une forme de Beltrami invariante non nulle portée par leurs ensembles de Julia.

Une telle forme nécessitant un ensemble de Julia de mesure de Lebesgue non nulle, l'espoir était alors que tous les P_c ont un ensemble de Julia de mesure nulle.

Quasiconforme

Puis vinrent les méthodes quasiconformes, qui permirent entre autres :

– La fin de la classification des composantes de Fatou par Denis Sullivan qui démontre que *toute composante est préperiodique*.

– Une expression équivalente de la conjecture de Fatou (Mañe, Sad, Sullivan) : la densité de l'hyperbolicité dans la famille $z^2 + c$ équivaut à l'absence d'une forme de Beltrami invariante non nulle portée par leurs ensembles de Julia.

Une telle forme nécessitant un ensemble de Julia de mesure de Lebesgue non nulle, l'espoir était alors que tous les P_c ont un ensemble de Julia de mesure nulle.

Ahlfors avait par ailleurs formulé une conjecture analogue de mesure nulle dans le cadre des groupes Kleinéens.

Quasiconforme

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

Puis vinrent les méthodes quasiconformes, qui permirent entre autres :

– La fin de la classification des composantes de Fatou par Denis Sullivan qui démontre que *toute composante est préperiodique*.

– Une expression équivalente de la conjecture de Fatou (Mañe, Sad, Sullivan) : la densité de l'hyperbolicité dans la famille $z^2 + c$ équivaut à l'absence d'une forme de Beltrami invariante non nulle portée par leurs ensembles de Julia.

Une telle forme nécessitant un ensemble de Julia de mesure de Lebesgue non nulle, l'espoir était alors que tous les P_c ont un ensemble de Julia de mesure nulle.

Ahlfors avait par ailleurs formulé une conjecture analogue de mesure nulle dans le cadre des groupes Kleinéens.

La conjecture d'Ahlfors a été complètement démontrée en 2004.

Le plan d'Adrien pour la mesure positive

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

Dans les années 90, Adrien entrevoit une approche, qui pourrait donner un c tel que $P_c = z^2 + c$ ait un ensemble de Julia de mesure > 0.

Le plan d'Adrien pour la mesure positive

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

Dans les années 90, Adrien entrevoit une approche, qui pourrait donner un c tel que $P_c = z^2 + c$ ait un ensemble de Julia de mesure > 0.

Soit K_c le complémentaire du bassin d'attraction de l'infini: il était connu que $J_c = \partial K_c$. Si P_c a un point fixe indifférent linéarisable ou parabolique, alors K_c est d'intérieur non vide, donc de mesure > 0. L'idée est de perturber c de sorte que K_c perde très peu d'aire mais qu'à la fin K_c soit d'intérieur vide[3].

---

[3] pour cela, il suffit que P_c ait un point fixe indifférent non parabolique non linéarisable

Le plan d'Adrien pour la mesure positive

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

Dans les années 90, Adrien entrevoit une approche, qui pourrait donner un c tel que $P_c = z^2 + c$ ait un ensemble de Julia de mesure > 0.

Soit K_c le complémentaire du bassin d'attraction de l'infini: il était connu que $J_c = \partial K_c$. Si P_c a un point fixe indifférent linéarisable ou parabolique, alors K_c est d'intérieur non vide, donc de mesure > 0. L'idée est de perturber c de sorte que K_c perde très peu d'aire mais qu'à la fin K_c soit d'intérieur vide[3].

Le contrôle de l'aire se fait entre autres par la théorie de l'implosion parabolique qu'a inité et fortement développée Adrien. Il faut également des techniques de renormalisation (McMullen, Shishikura, Yoccoz, ...) et des modèles quasiconformes (Ghys, Herman, etc...).

[3] pour cela, il suffit que P_c ait un point fixe indifférent non parabolique non linéarisable

Le plan d'Adrien pour la mesure positive

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements

Dans les années 90, Adrien entrevoit une approche, qui pourrait donner un c tel que $P_c = z^2 + c$ ait un ensemble de Julia de mesure > 0.

Soit K_c le complémentaire du bassin d'attraction de l'infini: il était connu que $J_c = \partial K_c$. Si P_c a un point fixe indifférent linéarisable ou parabolique, alors K_c est d'intérieur non vide, donc de mesure > 0. L'idée est de perturber c de sorte que K_c perde très peu d'aire mais qu'à la fin K_c soit d'intérieur vide[3].

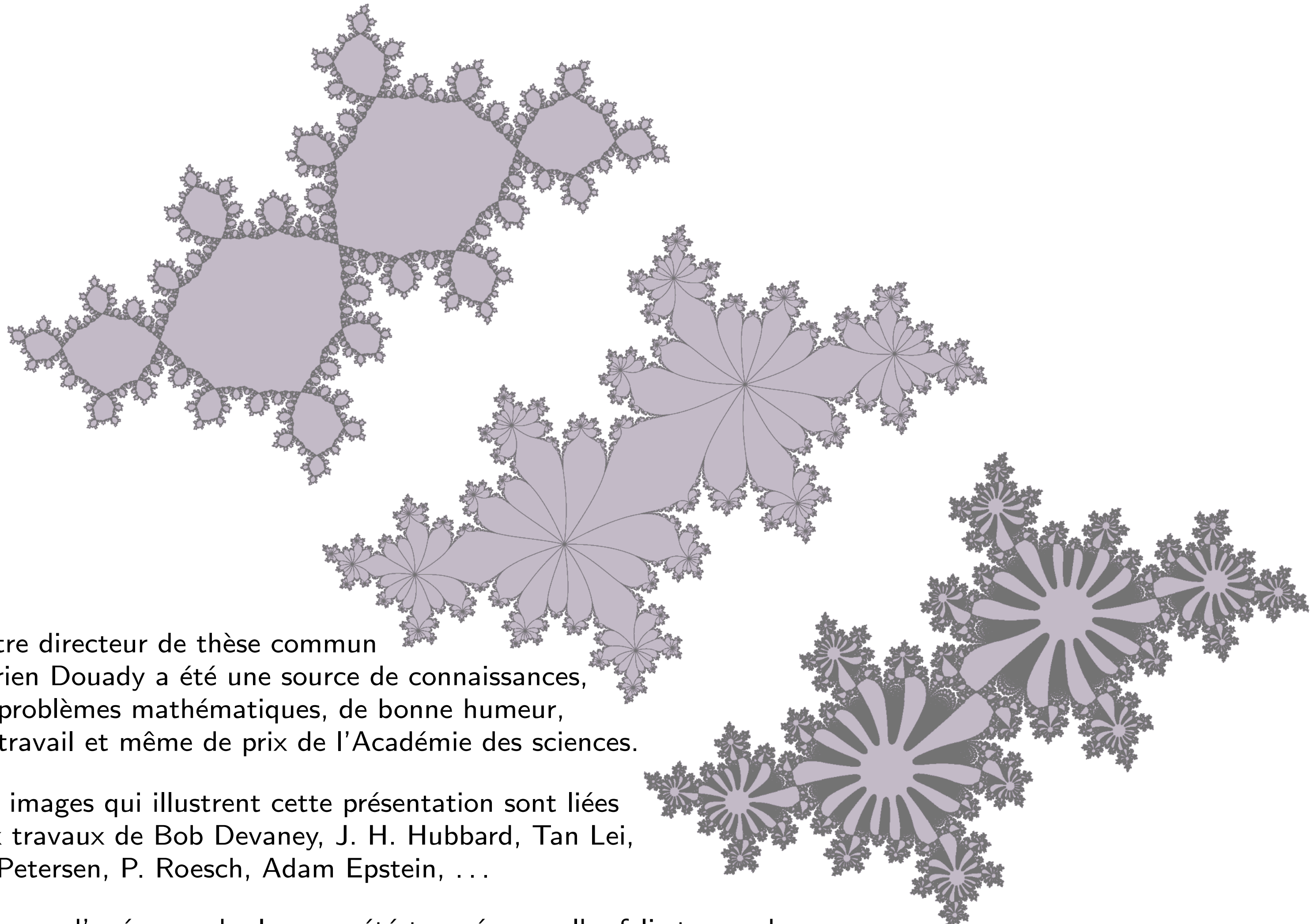
Le contrôle de l'aire se fait entre autres par la théorie de l'implosion parabolique qu'a inité et fortement développée Adrien. Il faut également des techniques de renormalisation (McMullen, Shishikura, Yoccoz, ...) et des modèles quasiconformes (Ghys, Herman, etc...).

Xavier et moi avons complété la preuve en 2005.

[3] pour cela, il suffit que P_c ait un point fixe indifférent non parabolique non linéarisable

Remerciements

Fatou, Julia
Définitions
Exemple
Montel
Hyperbolicité
Questions
Renouveau
M
Universalité
Quasiconforme
Le plan
Remerciements



Notre directeur de thèse commun
Adrien Douady a été une source de connaissances,
de problèmes mathématiques, de bonne humeur,
de travail et même de prix de l'Académie des sciences.

Les images qui illustrent cette présentation sont liées
aux travaux de Bob Devaney, J. H. Hubbard, Tan Lei,
C. Petersen, P. Roesch, Adam Epstein, . . .

L'image d'anémone du Japon a été trouvée sur olharfeliz.typepad.com
(Lugar do Olhar Feliz).

La présentation a été réalisée avec le package `powerdot` pour LaTeX.