



Présentation de la conjecture

Vue d'ensemble

Résultats antérieurs

Le plan de Douady

Conclusion

Ensembles de Julia d'aire positive

Xavier Buff & Arnaud Chéritat
Institut de Mathématiques de Toulouse



Présentation de la
conjecture

Points périodiques

L'ensemble de Julia

Exemples

L'ensemble de Fatou
Julias d'intérieur non
vide

La conjecture

Vue d'ensemble

Résultats antérieurs

Le plan de Douady

Conclusion

Présentation de la conjecture



Points périodiques

Présentation de la conjecture

Points périodiques

L'ensemble de Julia

Exemples

L'ensemble de Fatou
Julias d'intérieur non vide

La conjecture

Vue d'ensemble

Résultats antérieurs

Le plan de Douady

Conclusion

$F : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ fraction rationnelle de degré ≥ 2 .

Système dynamique : $z_{n+1} = F(z_n)$.

Si $F^n(z) = z$, avec $n > 0$, on dit que z est périodique. Son orbite s'appelle un **cycle**. Son **multiplicateur** est $\rho = (F^n)'(z)$.

Le point périodique est dit:

- **attractif** si $|\rho| < 1$ (ce cas comprend le cas superattractif: $|\rho| = 0$),
- **neutre/indifférent** si $|\rho| = 1$,
- **répulsif** si $|\rho| > 1$.

Dans le cas neutre, il est dit **parabolique** si ρ est une racine de l'unité, **irrationnel** sinon. Un point périodique irrationnel est fréquemment linéarisable (on parle de point de **Siegel**), mais pas toujours (on parle de point de **Cremer**).



L'ensemble de Julia

[Présentation de la conjecture](#)

[Points périodiques](#)

[L'ensemble de Julia](#)

[Exemples](#)

[L'ensemble de Fatou](#)
[Julias d'intérieur non vide](#)

[La conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

[Résultats antérieurs](#)

[Le plan de Douady](#)

[Conclusion](#)

Voici 4 définitions équivalentes de l'ensemble de Julia $J(F)$:

$$J(F) = \overline{\{\text{ppr}\}}, \text{ ppr} = \text{points périodiques répulsifs.}$$

$J(F) = \mathbb{S} \setminus \mathcal{F}(F)$ où $\mathcal{F}(F)$ est l'ensemble de Fatou:

$$\mathcal{F}(F) = \{z \in \mathbb{S} \mid \exists V \text{ vois. de } z, (F|_V)^n \text{ est une famille normale}\}.$$

$J(F) = \lim F^{-n}(\{z\})$, au sens de Hausdorff sur les compacts ($\forall z \in \mathbb{S}$ à au plus deux exceptions près).

$J(F) = \partial A$ pour tout bassin d'attraction d'un point périodique attractif, s'il y en a.

Etc...

Pour toutes ces raisons, on dit que l'ensemble de Julia est le lieu du chaos.



Exemples

Présentation de la conjecture

Points périodiques

L'ensemble de Julia

Exemples

L'ensemble de Fatou
Julias d'intérieur non vide

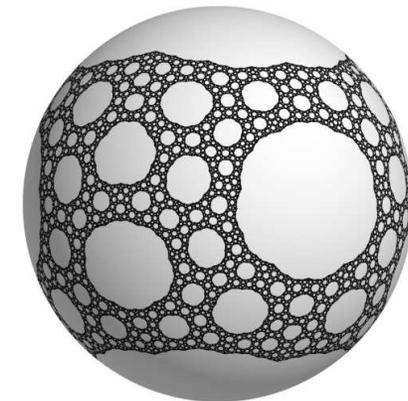
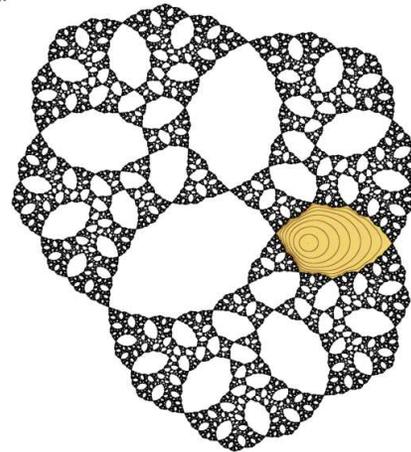
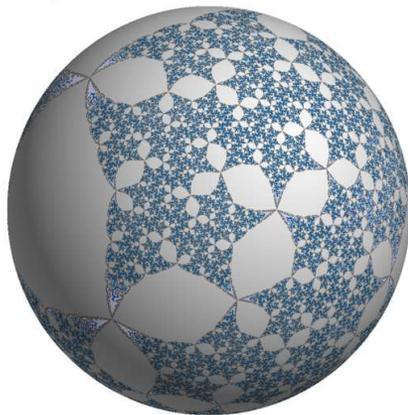
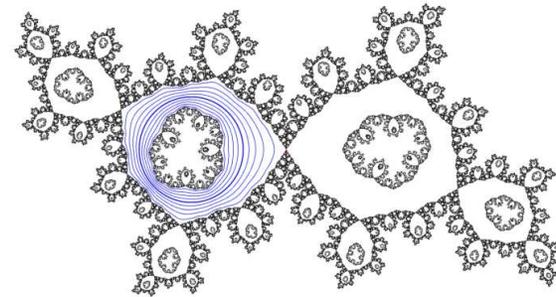
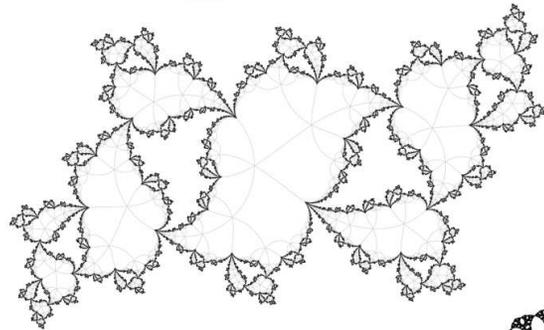
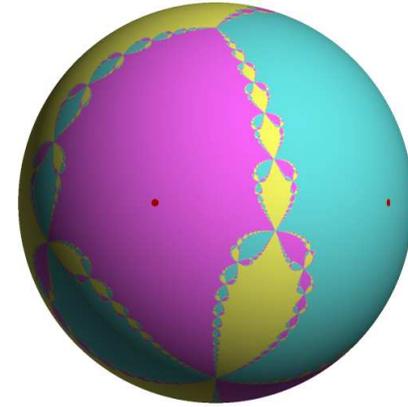
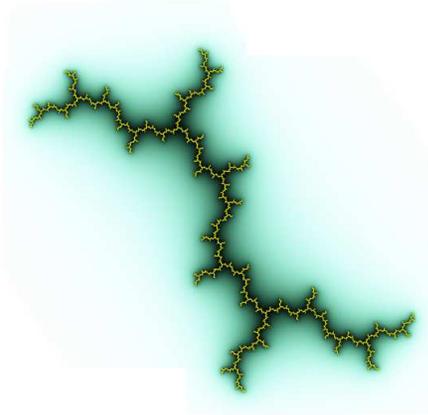
La conjecture

Vue d'ensemble

Résultats antérieurs

Le plan de Douady

Conclusion





L'ensemble de Fatou

[Présentation de la conjecture](#)

[Points périodiques](#)

[L'ensemble de Julia](#)

[Exemples](#)

[L'ensemble de Fatou](#)

[Julias d'intérieur non vide](#)

[La conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

[Résultats antérieurs](#)

[Le plan de Douady](#)

[Conclusion](#)

Classification:

L'ensemble de Fatou $\mathcal{F}(F)$ est ouvert. Pour toute composante connexe U de \mathcal{F} , $F(U)$ est encore une composante connexe de \mathcal{F} .

(Sullivan, 198x) Toute composante connexe U de \mathcal{F} est préperiodique : $\exists n \geq 0$ $F^n(U)$ est périodique.

(Fatou Julia, 191x) Toute composante *périodique* est d'un des 4 types suivants :

- Bassin attractif
- Bassin parabolique
- Disque de Siegel
- Anneau de Herman



Julias d'intérieur non vide

[Présentation de la conjecture](#)

[Points périodiques](#)

[L'ensemble de Julia](#)

[Exemples](#)

[L'ensemble de Fatou](#)

[Julias d'intérieur non vide](#)

[La conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

[Résultats antérieurs](#)

[Le plan de Douady](#)

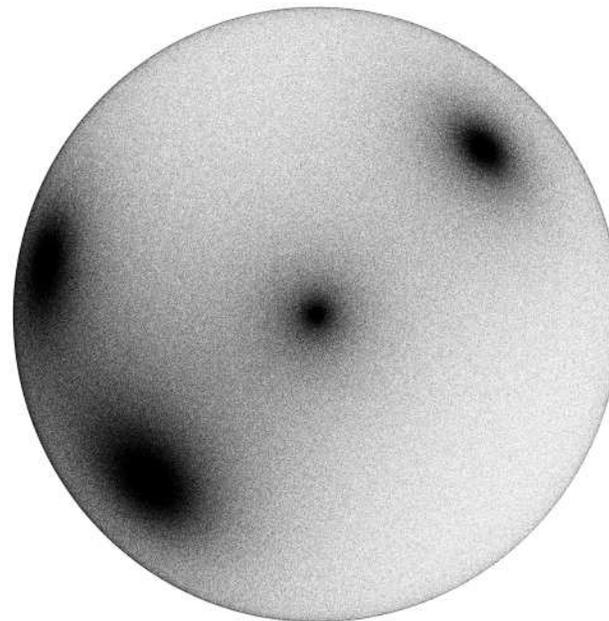
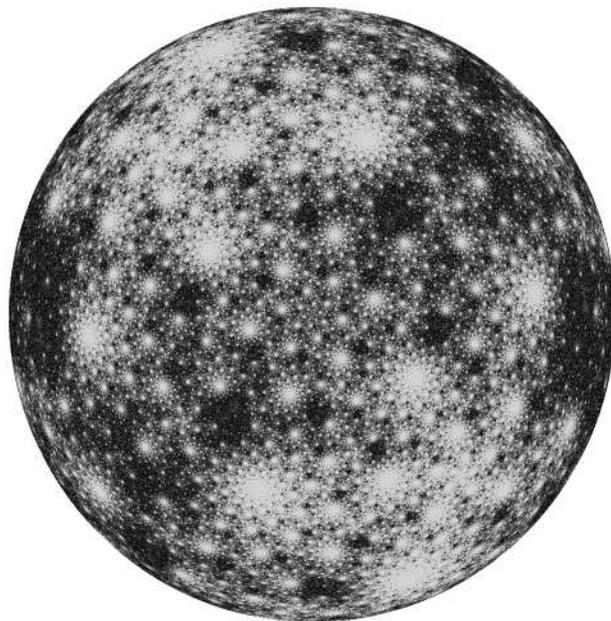
[Conclusion](#)

$$\overset{\circ}{J} \neq \emptyset \implies J = \mathbb{S}$$

Pour un polynôme, cela n'arrive jamais puisque $\infty \in \mathcal{F}(F)$.

Pour les fractions rationnelles, ça arrive.

Exemple : $F(z) = 1/(z^2 + \lambda)$, avec $\lambda \approx -0.768 - 0.145i$ (t.q. $F^3(0) = F^2(0)$).





La conjecture

[Présentation de la conjecture](#)

[Points périodiques](#)

[L'ensemble de Julia](#)

[Exemples](#)

[L'ensemble de Fatou](#)
[Julias d'intérieur non vide](#)

[La conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

[Résultats antérieurs](#)

[Le plan de Douady](#)

[Conclusion](#)

Question : existe-t-il une fraction rationnelle avec un ensemble de Julia d'intérieur vide et de mesure de Lebesgue > 0 ?

On a longtemps pensé que non.

La raison : les liens et les analogies avec d'autres conjectures et théorèmes.



[Présentation de la conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

[Lien avec d'autres conjectures](#)

[Résumé](#)

[Résultats antérieurs](#)

[Le plan de Douady](#)

[Conclusion](#)

Vue d'ensemble



Lien avec d'autres conjectures

Présentation de la conjecture

Vue d'ensemble

Lien avec d'autres conjectures

Résumé

Résultats antérieurs

Le plan de Douady

Conclusion

Une fraction rationnelle est *hyperbolique* $\iff \exists n$ tel que F^n est dilatante sur $J(F)$ \iff tous les points critiques sont attirés par un cycle attractif $\iff F$ est structurellement stable.

Nous allons nous restreindre au cas des polynômes de degré 2 :
 $P(z) = z^2 + c$.

Conjecture de Fatou : les c tels que $z^2 + c$ est hyperbolique forment un sous-ensemble dense de \mathbb{C} .

Conjecture MLC : l'ensemble de Mandelbrot M est localement connexe.

Conjecture ACDI : (Aucun Champ de Droite Invariant) aucun polynôme $z^2 + c$ ne peut être déformé par une forme de Beltrami invariante portée sur son Julia.

Conjecture d'Ahlfors : un groupe Kleinien de type fini a un ensemble limite $= \mathbb{S}$ ou de mesure de Lebesgue nulle.



Lien avec d'autres conjectures

[Présentation de la conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

[Lien avec d'autres conjectures](#)

[Résumé](#)

[Résultats antérieurs](#)

[Le plan de Douady](#)

[Conclusion](#)

Une fraction rationnelle est *hyperbolique* $\iff \exists n$ tel que F^n est dilatante sur $J(F)$ \iff tous les points critiques sont attirés par un cycle attractif $\iff F$ est structurellement stable.

Nous allons nous restreindre au cas des polynômes de degré 2 :
 $P(z) = z^2 + c$.

Conjecture de Fatou : les c tels que $z^2 + c$ est hyperbolique forment un sous-ensemble dense de \mathbb{C} .

Conjecture MLC : l'ensemble de Mandelbrot M est localement connexe.

Conjecture ACDI : (Aucun Champ de Droite Invariant) aucun polynôme $z^2 + c$ ne peut être déformé par une forme de Beltrami invariante portée sur son Julia.

Conjecture d'Ahlfors : un groupe Kleinien de type fini a un ensemble limite $= \mathbb{S}$ ou de mesure de Lebesgue nulle. **Démontrée en 2004**



Résumé

[Présentation de la conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

[Lien avec d'autres conjectures](#)

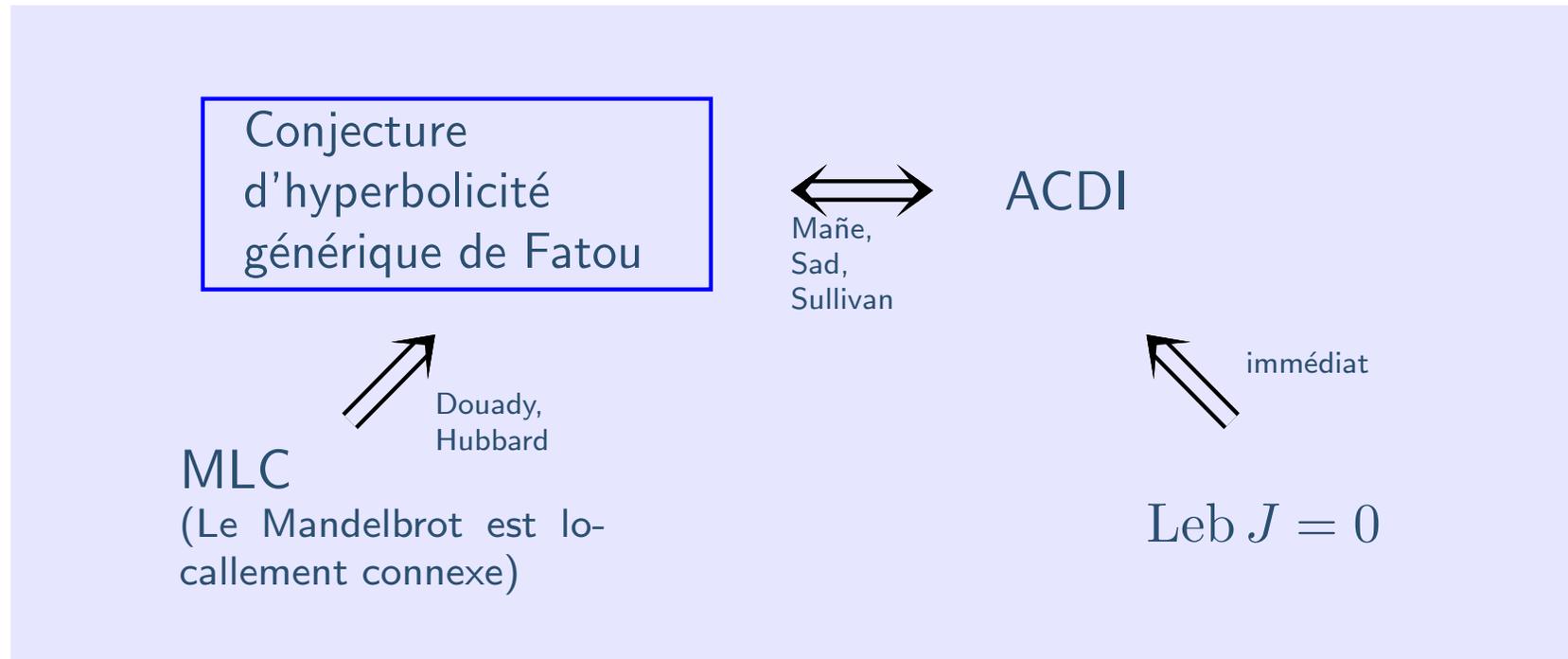
Résumé

[Résultats antérieurs](#)

[Le plan de Douady](#)

[Conclusion](#)

Chez les polynômes de degré 2





Résumé

[Présentation de la conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

[Lien avec d'autres conjectures](#)

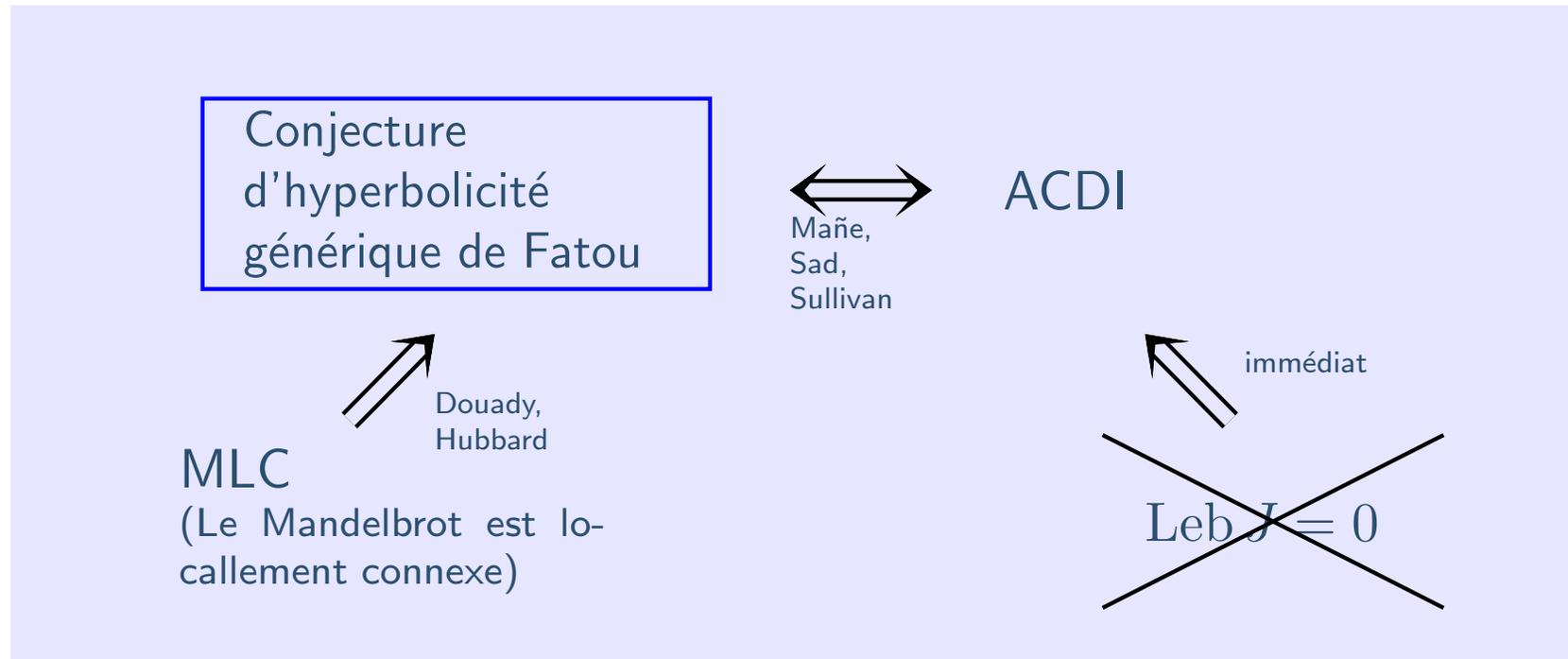
Résumé

[Résultats antérieurs](#)

[Le plan de Douady](#)

[Conclusion](#)

Chez les polynômes de degré 2





[Présentation de la conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

Résultats antérieurs

Un autre théorème de Fatou
De la mesure nulle à foison

Où chercher ?
Où ne pas chercher ?

[Le plan de Douady](#)

[Conclusion](#)

Résultats antérieurs



Un autre théorème de Fatou

[Présentation de la conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

[Résultats antérieurs](#)

[Un autre théorème de Fatou](#)

[De la mesure nulle à foison](#)

[Où chercher ?](#)

[Où ne pas chercher ?](#)

[Le plan de Douady](#)

[Conclusion](#)

Théorème (Fatou, Douady-Hubbard) :
Un polynôme de degré 2 a au plus un cycle non répulsif.

(Généralisé par Shishikura.)



De la mesure nulle à foison

$$z^2 + c$$

Présentation de la conjecture

Vue d'ensemble

Résultats antérieurs

Un autre théorème de Fatou

De la mesure nulle à foison

Où chercher ?

Où ne pas chercher ?

Le plan de Douady

Conclusion

Cantor

Attracting

Farfelue ($\exists?$)

Collet-Eckman

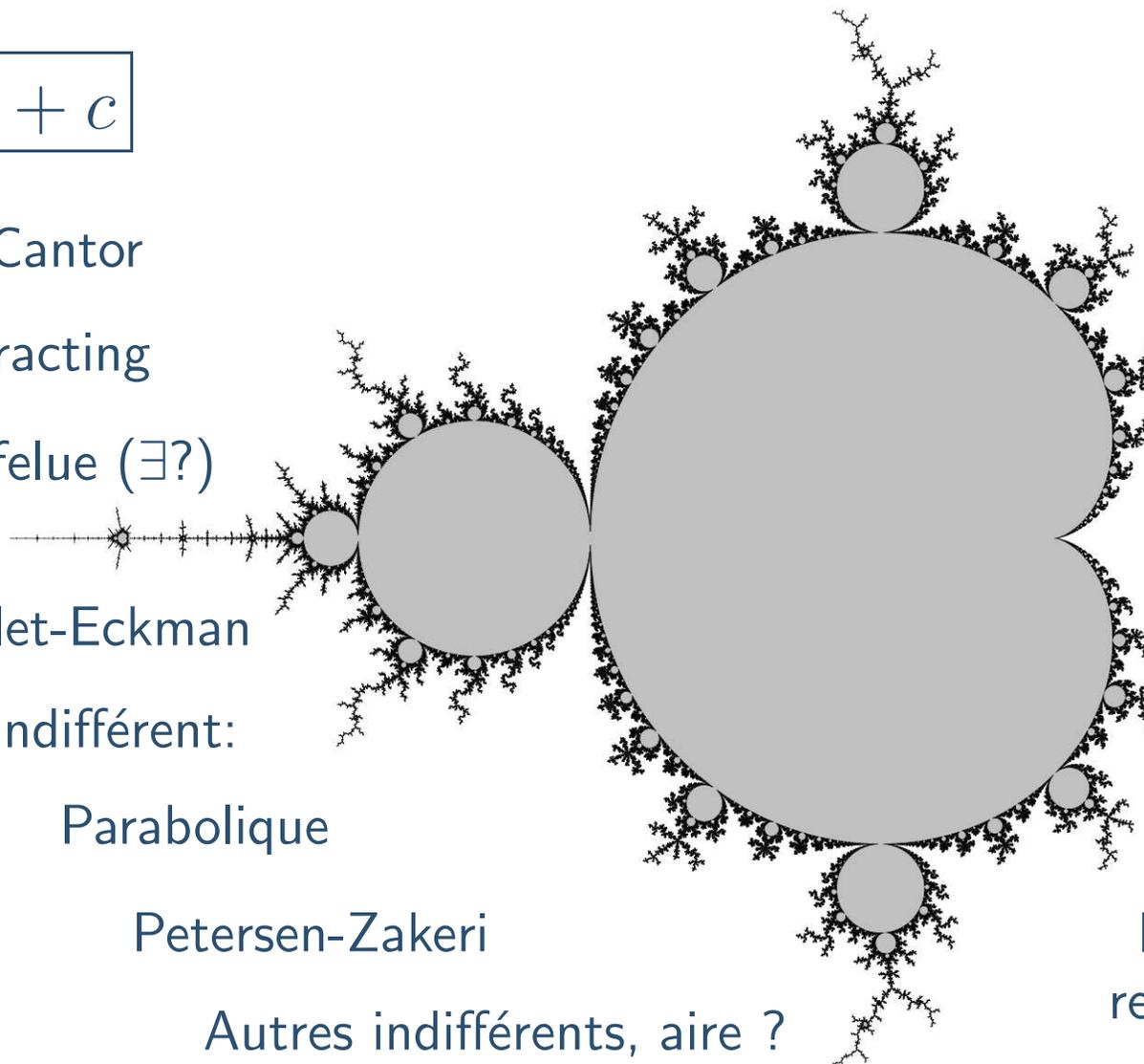
Indifférent:

Parabolique

Petersen-Zakeri

Autres indifférents, aire ?

Non renormalisable : Lyubich-Shishikura



Autres, aire ?

Avila-Lyubich

Feigenbaum

Infiniment renormalisable : ↑



Où chercher ?

Présentation de la conjecture

Vue d'ensemble

Résultats antérieurs

Un autre théorème de Fatou
De la mesure nulle à foison

Où chercher ?

Où ne pas chercher ?

Le plan de Douady

Conclusion

Pour $P = z^2 + c$

Théorème : (Sullivan) Si P est hyperbolique, alors $\dim_{\mathbb{H}} J(P) < 2$.
(Aaronson, Denker, Urbanski) Si P a un cycle parabolique, idem.

Remarque : $\dim_{\mathbb{H}} J(P) < 2 \implies \text{Leb } J(P) = 0$

Théorème : (McMullen) Si P a un cycle de $\times^{\text{eur}} = e^{2i\pi\theta}$ avec θ de type constant, alors $\dim_{\mathbb{H}} J(P) < 2$.

(Petersen, Zakeri) Pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}$, si P a un cycle de $\times^{\text{eur}} = e^{2i\pi\theta}$, alors $\text{Leb } J(P) = 0$.

Théorème : (Lyubich et Shishikura) Si P n'a pas de cycle indifférent et n'est pas infiniment renormalisable alors $\text{Leb } J(P) = 0$.

Théorème : (Mañé, Sad, Sullivan) Dans une composante farfelue de $\mathbb{C} \setminus \partial M$, les Julias ont une aire positive.

Théorème : (Shishikura)

- Pour un ensemble, gras au sens de Baire, de valeurs de θ , l'unique polynôme $z^2 + c$ qui a un point fixe de $\times^{\text{eur}} = e^{2i\pi\theta}$ vérifie $\dim_{\mathbb{H}} J(P) = 2$.
- Pour un sous-ensemble gras de ∂M , on a $\dim_{\mathbb{H}} J(P) = 2$.

Oui mais...

- Pour un sous-ensemble gras de ∂M , le pol. P est non-renormalisable, et donc par Lyubich-Shishikura, $\text{Leb } J(P) = 0$.
- On pense que les composantes farfelues n'existent pas (conjecture de Fatou).



Où ne pas chercher ?

[Présentation de la conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

[Résultats antérieurs](#)

[Un autre théorème de Fatou](#)

[De la mesure nulle à foison](#)

[Où chercher ?](#)

[Où ne pas chercher ?](#)

[Le plan de Douady](#)

[Conclusion](#)

Pour attraper un Julia d'aire positive, il faut donc regarder l'un des cas suivants :

- les infiniment renormalisables,
- ceux qui ont un cycle indifférent de type Siegel (=linéarisable),
- ceux qui ont un cycle indifférent de type Cremer (=non linéarisable),
- les composantes farfelues W .



Où ne pas chercher ?

Présentation de la conjecture

Vue d'ensemble

Résultats antérieurs

Un autre théorème

de Fatou

De la mesure nulle à foison

Où chercher ?

Où ne pas chercher ?

Le plan de Douady

Conclusion

Pour attraper un Julia d'aire positive, il faut donc regarder l'un des cas suivants :

- les infiniment renormalisables, $\exists J \text{ Leb} > 0$
- ceux qui ont un cycle indifférent de type Siegel $\exists J \text{ Leb} > 0$
(=linéarisable),
- ceux qui ont un cycle indifférent de type Cremer $\exists J \text{ Leb} > 0$
(=non linéarisable),
- les composantes farfelues W . $\forall J, \text{Leb} > 0$ mais $\exists? W \dots$

Théorème : (B.C.) Il existe des ensembles de Julia de mesure positive dans les 3 premières classes ci-dessus.



Présentation de la
conjecture

Vue d'ensemble

Résultats antérieurs

Le plan de Douady

Julia rempli et
semi-continuité
L'idée, dans le cas
Cremer

Notre contribution

Conclusion

Le plan de Douady



Julia rempli et semi-continuité

Présentation de la conjecture

Vue d'ensemble

Résultats antérieurs

Le plan de Douady

Julia rempli et semi-continuité

L'idée, dans le cas Cremer

Notre contribution

Conclusion

Julia rempli : $K = K(P) := \mathbb{C} \setminus A(\infty)$ où $A(\infty)$ est le bassin de l'infini. K est fermé et $J = \partial K$.

Contrairement à J , K peut très bien être d'intérieur non vide (\iff il y a un cycle attractif, parabolique ou irrationnel linéarisable).

Si on part d'un $P = z^2 + c$ possédant un cycle parabolique ou irrationnel linéarisable, on a une instabilité structurelle : une faible perturbation de c induit de grands changements de J et K .

L'application $c \mapsto K(z^2 + c)$ est *semi-continue supérieurement* : les limites au sens de Hausdorff de $K(z^2 + c_n)$ pour $c_n \rightarrow c$ sont toutes incluses dans $K(z^2 + c)$.

Cependant en choisissant bien les perturbations, on peut vider sensiblement K .

Illustrations !



L'idée, dans le cas Cremer

Présentation de la conjecture

Vue d'ensemble

Résultats antérieurs

Le plan de Douady

Julia rempli et semi-continuité

L'idée, dans le cas Cremer

Notre contribution

Conclusion

Si on est capable d'effectuer ces perturbations de sorte que :

- effectivement le bassin de l'infini pénètre profondément dans $K(z^2 + c)$
- mais en retirant à K une proportion $\leq 1/2^n$ de sa mesure

alors il est facile de construire une suite c_n telle que :

- $z^2 + c_n$ a un point fixe indifférent linéarisable,
- c_{n+1} est construite par perturbation de c_n comme illustré précédemment,
- $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\text{Leb } K(z^2 + c_n) \geq \varepsilon$,
- c_n tend vers une limite c_∞ ,
- le point fixe de $z^2 + c_\infty$ est de Cremer.

Alors par la semi-continuité supérieure de K , on en déduit que

$$\text{Leb } K(z^2 + c_\infty) \geq \varepsilon.$$

Or $z^2 + c_\infty$ a un point de Cremer en 0, donc $J(z^2 + c_\infty) = K(z^2 + c_\infty)$.
Donc $J(z^2 + c_\infty)$ est de mesure positive !



Notre contribution

[Présentation de la conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

[Résultats antérieurs](#)

[Le plan de Douady](#)

[Julia rempli et semi-continuité](#)
[L'idée, dans le cas Cremer](#)

[Notre contribution](#)

[Conclusion](#)

Encore faut-il trouver la recette de ces perturbations.

Trois ingrédients :

- Borne inférieure sur l'aire des disques de Siegel digités tendant vers un disque de Siegel donné : on perd au plus la moitié de l'aire. Utilise nos techniques de contrôle de l'implosion parabolique et les techniques de renormalisation de Yoccoz.
- Contrôle de l'ensemble postcritique : il ne sort pas d'un ε -voisinage de Δ . On utilise pour cela la renormalisation d'Inou et Shishikura.
- Argument de pull-back pour promouvoir la proportion p d'aire conservée : on passe de $p = 1/2$ à $p = 1$. C'est une adaptation du travail de McMullen sur la densité au point critique des Julia remplis ayant un point indifférent irrationnel de type constant.

Illustration...



[Présentation de la conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

[Résultats antérieurs](#)

[Le plan de Douady](#)

Conclusion

[Remarques](#)

[Problèmes ouverts](#)

[Fin](#)

Conclusion



Remarques

[Présentation de la conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

[Résultats antérieurs](#)

[Le plan de Douady](#)

[Conclusion](#)

[Remarques](#)

[Problèmes ouverts](#)

[Fin](#)

1. La construction pour les infiniment renormalisables ou avec des disques de Siegel est analogue.
2. Avec la théorie des applications à allure polynomiale (=renormalisation de Douady-Hubbard, universalité de l'ensemble de Mandelbrot), on sait qu'il existe donc des ensembles de Julia de mesure positive dans pratiquement toutes les familles : on y trouve des copies quasiconformes des Julias des polynômes quadratiques. En particulier chez les polynômes de degré $d \geq 3$ donné.



Problèmes ouverts

[Présentation de la conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

[Résultats antérieurs](#)

[Le plan de Douady](#)

[Conclusion](#)

[Remarques](#)

[Problèmes ouverts](#)

[Fin](#)

- À quoi ressemblent ces bêtes ? Peut-on produire un dessin de ces ensembles de Julia ? D'un point de Cremer quelconque ?
- Quelles sont les propriétés ergodiques de ces Julias de mesure positive ?
- Quelle est la mesure du Julia Feigenbaum ?
- Existe-t-il un Julia avec un point de Cremer mais de mesure nulle ? Ou un Julia non localement connexe mais de mesure nulle ? (les Cremer sont automatiquement non localement connexes)
- Qu'en est-il de la conjecture de Fatou ? Nos exemples peuvent-ils nous éclairer sur un éventuel mécanisme prévenant l'existence des champs de droites invariants ?



Fin

[Présentation de la conjecture](#)

[Vue d'ensemble](#)

[Résultats antérieurs](#)

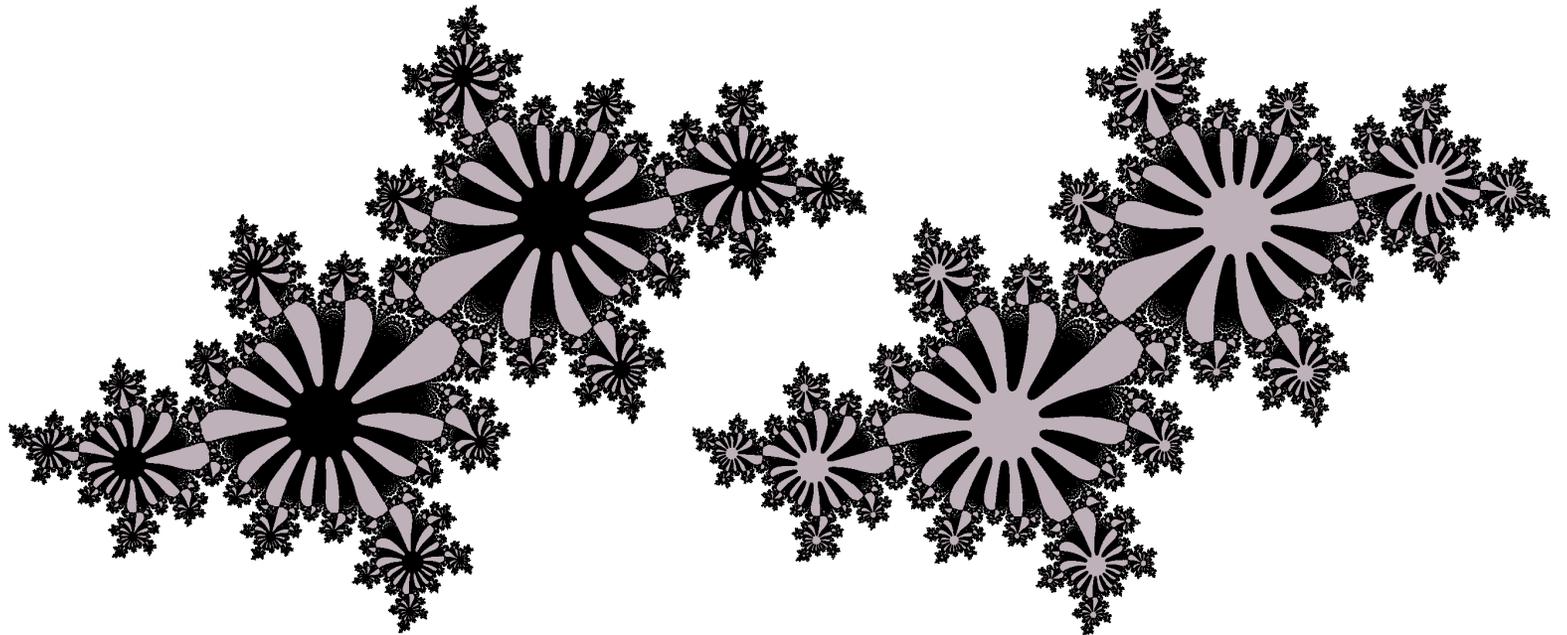
[Le plan de Douady](#)

[Conclusion](#)

[Remarques](#)

[Problèmes ouverts](#)

[Fin](#)



À Adrien Douady, notre directeur de thèse.

Images créées avec GNU C++, libpng, Maple, et Gimp.

Présentation préparée avec le package powerdot pour \LaTeX

Anémone du Japon : courtesy of Lugar do Olhar Feliz (olharfeliz.typepad.com)