Université Paul Sabatier | année 2011/2012
Cours d'intégration | L3, 1er semestre

Devoir

À rendre au plus tard le 8 décembre | Auteur : Arnaud Chéritat.

I. Volumes

Le but de cet exercice est de calculer le volume de la boule euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

a. (Intégrales de Wallis) Soit

$$I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^n \mathrm{d}\theta.$$

Calculer I_0 et I_1. Pour $n \geqslant 2$ trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}. En déduire la valeur de I_n.

Soit la norme euclidienne $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. On note B_n la boule unité et V_n son volume, de sorte que

$$V_n = \int_{x \in B_n} \lambda$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

b. Démontrer que la boule de centre 0 et de rayon r a pour volume $V_n r^n$.

c. Calculer V_1.

d. Démontrer

$$V_n = \int_{x_n=-1}^{1} V_{n-1}\big(1 - x_n^2\big)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}x_n.$$

e. En déduire que $n \geqslant 2 \implies$

$$V_n = V_{n-1} I_n.$$

f. Terminer le calcul de V_n.

II. Densité dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues à support compact

On dira (par abus de langage) qu'une fonction (quelconque) est à support compact si elle est nulle en dehors d'un ensemble borné de $\mathbb{R}^n$.
Soient $p \in [1, +\infty[$ et $d \in \mathbb{N}^*$. On va travailler dans $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue. On notera fréquemment x un élément de $\mathbb{R}^d$ et $|x|$ sa norme (euclidienne). On abrégera $L^p(\mathbb{R}^n)$ en L^p et on notera $\|f\|_p$ la norme L^p de f. Le but de cet exercice est de démontrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dense dans L^p (pour la métrique induite par la norme L^p).

a. Démontrer que les fonctions L^p à support compact sont denses dans L^p.

b. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions mesurables bornées et à support compact forment un sous-ensemble dense de L^p.

c. Démontrer que toute fonction $f \in \mathcal{E}$ est limite uniforme de fonctions mesurables étagées à support compact. Indication : on considérera la suite $f_n = E(nf)/n$ où $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ est la fonction partie entière.

Nous allons démontrer que pour tout borélien borné $A \in \mathbb{R}^n$, il existe une suite $f_n \in \mathcal{C}$ telle que $\|\mathbb{1}_A - f_n\|_p \longrightarrow 0$, où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction caractéristique de A.

d. Pourquoi cela implique-t-il que $\mathcal{C}$ forme un sous-ensemble dense de L^p ?

Pour démonter l'affirmation, nous allons utiliser la propriété suivante : pour tout borélien borné A, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert borné O et un fermé F tel que $F \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus F) < \varepsilon$ où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

e. Démonter qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in F$ et $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus O$, $|y - x| > \delta$.

Soit $g(x) = \min\left(1, \dfrac{\text{distance}(x, \mathbb{R}^n \setminus O)}{\delta}\right)$.

f. Démontrer que g est continue.

g. Démontrer que $\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon$.

h. Conclure.

III. Convolution

a. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et g une fonction continue à support compact de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction convolée $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$ est bien définie en tout point $x \in \mathbb{R}^d$ et est continue. (Utiliser le théorème de Heine).

b. Démontrer sous les mêmes hypothèses que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|\mathrm{d}y\right)^p \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p|g(x-y)|\mathrm{d}y\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|\mathrm{d}y\right)^{p-1}.$$

c. En déduire que $f * g \in L^p$ et que $\|f * g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1}$.

Considérons une suite u_n de fonctions continues $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ qui vérifie pour une certaine suite $\varepsilon_n > 0$:

(1) $u_n \geqslant 0$

(2) $\int_{\mathbb{R}^d} u_n = 1$

(3) $\varepsilon_n \longrightarrow 0$

(4) $|x| \geqslant \varepsilon_n \implies u_n(x) = 0$.

d. Démontrer qu'il existe une telle suite.

e. Démontrer que si h est continue à support compact, alors $h * u_n$ tend uniformément vers h.

f. En déduire que $\forall f \in L^p$, $f * u_n \longrightarrow f$ dans L^p.