Corrigé

Auteur : Arnaud Chéritat.

I. Volumes

Le but de cet exercice est de calculer le volume de la boule euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

a. (Intégrales de Wallis) Soit

$$I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^n \mathrm{d}\theta.$$

Calculer I_0 et I_1. Pour $n \geqslant 2$ trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}. En déduire la valeur de I_n.

C'est parti : $I_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 = \pi$ et $I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \,\mathrm{d}\theta = \Big[\sin\theta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2$. Ensuite, pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^{n-1} \cos\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&\underset{\text{IPP}}{=} \Big[\cos(\theta)^{n-2}\sin(\theta)\Big]_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -(n-1)\sin\theta\,(\cos\theta)^{n-2}\sin\theta\, d\theta \\
&= 0 + (n-1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^{n-2}\sin(\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta \\
&= (n-1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^{n-2}(1-\cos(\theta)^2)\,\mathrm{d}\theta \\
&= (n-1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^{n-2}\mathrm{d}\theta - (n-1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^{n}\mathrm{d}\theta \\
I_n &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\
nI_n &= (n-1)I_{n-2}.
\end{aligned}$$

C'est à dire $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. D'où :

$$I_{2p} = I_0 \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2p-1}{2p}$$

$$I_{2p+1} = I_1 \frac{2}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2p}{2p+1}$$

donc

$$I_{2p} = \frac{1.3.\cdots.(2p-1)}{2.4.\cdots.2p}\pi$$

$$I_{2p+1} = \frac{2.4.\cdots.2p}{3.\cdots.(2p+1)}2.$$

Après on exprimer les numérateurs et dénominateurs avec des quotients de factorielles si on a envie.

Soit la norme euclidienne $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. On note B_n la boule unité et V_n son volume, de sorte que

$$V_n = \int_{x \in B_n} \lambda$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

b. Démontrer que la boule de centre 0 et de rayon r a pour volume $V_n r^n$.

Notons $\mathrm{Vol}(n,r)$ ce volume. On effectue un changement de variables $x = ry$: la matrice Jacobienne est r fois l'identité et est de déterminant r^n

$$\mathrm{Vol}(n,r) = \int_{|x|<r} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_{|y|<1} r^n \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n = r^n V_n.$$

c. Calculer V_1.

Trop facile : $V_1 = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2$.

d. Démontrer

$$V_n = \int_{x_n=-1}^{1} V_{n-1}(1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}x_n.$$

Par Fubini (on intègre une fonction mesurable positive) pour $n \geqslant 2$:

$$V_n = \int_{x_n \in \mathbb{R}} \Big(\int_{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < 1 - x_n^2} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1} \Big) \mathrm{d}x_n$$

L'intégrande interne est nulle quand $|x_n| > 1$ donc

$$V_n = \int_{x_n=-1}^{1} \mathrm{Vol}\left(n-1, \sqrt{1 - x_n^2}\right) \mathrm{d}x_n = \int_{-1}^{1} (1 - x_n^2)^{(n-1)/2} V_{n-1} \mathrm{d}x_n$$

e. En déduire que $n \geqslant 2 \implies$

$$V_n = V_{n-1} I_n.$$

On effectue le changement de variable $x_n = \sin\theta$ dans l'expression trouvée : $V_n = V_{n-1} \int_{-1}^{1} (1 - x_n^2)^{(n-1)/2} \mathrm{d}x_n = V_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2\theta)^{\frac{n-1}{2}} \cos\theta \, d\theta = V_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2\theta)^{\frac{n-1}{2}} \cos\theta \, d\theta = V_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^n d\theta = V_{n-1} I_n$.

f. Terminer le calcul de V_n.

On notera que $I_n I_{n-1}$ vaut $2\pi/n$ et ceci que n soit pair ou impair, d'où $V_{2p} = V_2 \frac{(2\pi)^{p-1}}{4.6.\cdots.2p}$ et $V_{2p+1} = V_1 \frac{(2\pi)^p}{3.5.\cdots.(2p+1)}$, et comme $V_2 = V_1 I_2 = 2\pi/2 = \pi$ (on retrouve bien l'aire du disque) on en déduit :

$$\begin{aligned} V_{2p} &= \frac{(2\pi)^p}{2.4.\cdots.2p} = \frac{\pi^p}{p!} \\ V_{2p+1} &= 2\frac{(2\pi)^p}{1.3.5.\cdots.(2p+1)} \end{aligned}$$

Qu'on peut aussi exprimer via des factorielles. On retrouve bien le volume de la boule de $\mathbb{R}^3$: $V_3 = 4\pi/3$.

II. Densité dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues à support compact

On dira (par abus de langage) qu'une fonction (quelconque) est à support compact si elle est nulle en dehors d'un ensemble borné de $\mathbb{R}^n$.
Soient $p \in [1, +\infty[$ et $d \in \mathbb{N}^*$. On va travailler dans $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue. On notera fréquemment x un élément de $\mathbb{R}^d$ et $|x|$ sa norme (euclidienne). On abrégera $L^p(\mathbb{R}^n)$ en L^p et on notera $\|f\|_p$ la norme L^p de f. Le but de cet exercice est de démontrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dense dans L^p (pour la métrique induite par la norme L^p).

a. Démontrer que les fonctions L^p à support compact sont denses dans L^p.

Il suffit d'annuler la fonction là où sa variable est grande : Soit $f_k(x) = f(x)$ si $|x| \leqslant k$ et $f_k(x) = 0$ si $|x| > k$. Alors $\int |f_k|^p \leqslant \int |f|^p < +\infty$ donc $f_k \in L^p$. D'autre part $\int |f_k - f|^p = \int_{|x|>k} |f|^p$ ce qui tend vers 0 quand k tend vers l'infini puisque $|f|^p$ est supposée d'intégrale finie (on peut, si on veut, invoquer la convergence dominée).

b. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions mesurables bornées et à support compact forment un sous-ensemble dense de L^p.

(On a précédemment écrêté f en ses variables trop élevées, on va faire de même pour ses valeurs.) L'énoncé dit implicitement que les fonctions mesurables bornées à support compact sont L^p. Justifions-le : si $|f| < M$ et si $|x| > k \implies f(x) = 0$ alors $\int |f|^p < \int_{|x|\leqslant k} M^p < M^p k^n < +\infty$ donc $f \in L^p$. Démontrons maintenant leur densité. Vu la question précédente, il suffit maintenant de montrer que toute fonction mesurable à support compact f est limite dans L^p de fonctions mesurables bornées à support compact. On définit $f_k(x) = f(x)$ si $|f(x)| \leqslant k$ et $f_k(x) = 0$ si $|f(x)| > k$. Alors f_k est effectivement bornée, à support compact vu que $f(x) = 0 \implies f_k(x) = 0$ et que f est à support compact, et $\int |f_k - f|^p \longrightarrow 0$ par convergence dominée : la suite $|f_k - f|^p$ tend simplement vers 0 $\big(f_k(x) - f(x)$ est nul dès que $k \geqslant |f(x)|\big)$ et est dominée par $|f|^p$ qui est d'intégrale convergente.

c. Démontrer que toute fonction $f \in \mathcal{E}$ est limite uniforme de fonctions mesurables étagées à support compact. Indication : on considérera la suite $f_n = E(nf)/n$ où $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ est la fonction partie entière.

On fait comme dit l'énoncé, sauf que l'on va noter f_k au lieu de f_n, pour ne pas confondre avec le n de $\mathbb{R}^n$. La fonction f_k est bien

(1) à support compact puisque $E(0) = 0$ donc $f(x) = 0 \implies E(kf(x))/k = 0$,

(2) mesurable : par définition, f est égale sur le complémentaire d'un négligeable $X \subset \mathbb{R}^n$ à une fonction borélienne g. Donc kg est borélienne. Comme E est borélienne, la composée $E(kg)$ l'est aussi (ce n'est pas vrai pour des fonctions mesurables en toute généralité). Enfin, $E(kg)/k$ est borélienne. Enfin $E(kg)/k$ et $E(kf)/k$ sont égales en dehors de X.

(3) étagée : comme f est bornée (c'est dans la définition de $\mathcal{E}$), la fonction $E(kf)/k$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant t - E(t) < 1$, on en déduit que $|E(t) - t| < 1$ donc $|E(kf(x)) - kf(x)| < 1$ donc $|f_k(x) - f(x)| < 1/k$.

Nous allons démontrer que pour tout borélien borné $A \in \mathbb{R}^n$, il existe une suite $f_n \in \mathcal{C}$ telle que $\|\mathbb{1}_A - f_n\|_p \longrightarrow 0$, où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction caractéristique de A.

d. Pourquoi cela implique-t-il que $\mathcal{C}$ forme un sous-ensemble dense de L^p ?

D'abord nous allons préciser la réponse à la question c) en démontrant que $\|f_k - f\|_p \longrightarrow 0$. En effet f est à support compact (disons que $|x| > M \implies f(x) = 0$) et $f(x) = 0 \implies f_k(x) = 0$ donc $\int |f - f_k|^p \leqslant \int_{|x|<M} \|f - f_k\|_\infty^p \leqslant M^n \|f - f_k\|_\infty^p \longrightarrow 0$.
Les fonctions de $\mathcal{C}$ (continues à support compact) sont dans $\mathcal{E}$ (mesurables bornées à support compact) donc dans L^p. (bornées : par le théorème des bornes atteintes)
Une fonction étagée f à support compact est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de boréliens bornés. Comme $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel, on en déduit facilement que les fonctions étagées à support compact sont approchées en norme L^p par les fonctions de $\mathcal{C}$. Puis par les questions c) améliorée et b) on en déduit successivement que $\mathcal{C}$ approxime pour la norme L^p les fonctions de $\mathcal{E}$ puis les fonctions L^p.

Pour démonter l'affirmation, nous allons utiliser la propriété suivante : pour tout borélien borné A, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert borné O et un fermé F tel que $F \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus F) < \varepsilon$ où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

e. Démonter qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in F$ et $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus O$, $|y - x| > \delta$.

Preuve 1 : Par l'absurde, si tel n'était pas le cas il existerait une suite $x_k \in F$ et $y_k \in \mathbb{R}^n \setminus O$ tel que $|x_k - y_k| \longrightarrow 0$. Comme F est borné, on peut extraire de x_k une sous-suite convergente. On peut donc supposer x_k convergente. Le fermé $\mathbb{R}^n \setminus O$ n'est malheureusement pas borné mais en fait la suite y_k est bornée : sa distance à x_k tend vers 0 donc est bornée et que x_k appartient à F qui est borné, donc par l'inégalité triangulaire, y_k est bornée. Donc on peut ré-extraire une sous-suite de sorte que y_k converge également. Comme F est fermé, $\lim x_k \in F$. Comme $\mathbb{R}^n \setminus O$ est fermé, $\lim y_k \in \mathbb{R}^n \setminus O$. Or $\lim x_k = \lim y_k$. Il y a donc au moins un point commun à F et $\mathbb{R}^n \setminus O$ ce qui rentre en contradiction avec $F \subset O$.
Preuve 2 : Justifier que la fonction $(x, y) \in F \times \mathbb{R}^n \setminus O \mapsto |x - y| \in [0, +\infty[$ est continue et atteint ses bornes. Etc...(c'est très proche)

Soit $g(x) = \min\left(1, \dfrac{\text{distance}(x, \mathbb{R}^n \setminus O)}{\delta}\right)$.

f. Démontrer que g est continue.

La fonction distance à un ensemble E (non vide), notons-la h, est 1-Lipschitzienne. En effet, $\forall e \in E$, $||x-e|-|y-e|| < |x-y|$ (deuxième inégalité triangulaire, conséquence de l'inégalité triangulaire). Si e est choisi pour que $|y-e| \leqslant \varepsilon + \text{distance}(y, \mathbb{R}^n \setminus O)$ c'est à dire $|y-e| \leqslant \varepsilon + h(y)$ alors $h(x) \leqslant |x-e| \leqslant |x-y| + |y-e| \leqslant |x-y| + h(y) + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout ε, on a $h(x) \leqslant |x-y| + h(y)$. Par symétrie, $h(y) \leqslant |y-x| + h(x)$. Conclusion : $|h(x) - h(y)| \leqslant |x-y|$.
Ensuite le min de deux fonctions continues est continu. Donc g est continue. (en fait la fonction g est $1/\delta$–Lipschitizenne)

g. Démontrer que $\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon$.

L'énoncé parlait de $f = \mathbb{1}_A$, bien sûr. Notons que si $x \in F$ alors d'une part la distance de x au complémentaire de O est $> \delta$ d'après la question e) ce qui fait que $g(x) = 1$; d'autre part $x \in A$ puisque $F \subset A$ donc $f(x) = 1$. Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus O$ alors la distance est nulle et donc $g(x) = 0$ et comme $A \subset O$, $f(x) = 0$. Ainsi $f(x) = g(x)$ dès que $x \in F$ ou $x \notin O$. Sur le complémentaire $O \setminus F$, g et f sont comprises entre 0 et 1 et donc $|f(x) - g(x)| \leqslant 1$. Ainsi $\int_{\mathbb{R}} |f-g|^p \leqslant \int_{O \setminus F} 1^p = \lambda(O \setminus F) \leqslant \varepsilon$. D'où

$$\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon^{1/p}$$

(l'auteur a oublié la puissance $1/p$, on se demande où il avait la tête).

h. Conclure.

La fonction g est continue d'après f). Elle est aussi à support compact car elle s'annule sur le complémentaire du borné O. Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on a bien par g) pour tout borélien borné A l'existence de fonctions $g \in \mathcal{C}$ arbitrairement proches en norme L^p de $f = \mathbb{1}_A$. D'après d) on peut conclure que $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble dense de L^p.

III. Convolution

a. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et g une fonction continue à support compact de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction convolée $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) \mathrm{d}y$ est bien définie en tout point $x \in \mathbb{R}^d$ et est continue. (Utiliser le théorème de Heine).

Remarque : l'énoncé a utilisé la notation $\mathrm{d}y$ pour la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^d$. Usuellement on note plutôt $\mathrm{d}\lambda(y)$ ou $\mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n$. Cependant ici on gardera la notation $\mathrm{d}y$, plus légère.

La fonction g est continue à support compact donc bornée. Soit M un majorant de $|g|$. La fonction $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est de valeur absolue majorée par $M|f(y)|$. Elle est donc L^p à support compact. Elle est donc intégrable (rappelons que $L^p([a,b]) \subset L^1([a,b])$). Ainsi $f*g$ est bien définie pour tout x.
Le théorème de Heine dit qu'une fonction continue d'un espace métrique compact vers un espace métrique est uniformément continue. Malheureusement ici, $\mathbb{R}^d$ n'est pas compact. Soit $B = \overline{B}(0,R)$ une boule fermée hors de laquelle g est nulle et $B' = \overline{B}(0,R+1)$. Comme B' est compacte et g continue, g est uniformément continue sur B' : pour tout $x, x' \in B'$ $|g(x) - g(x')| \leqslant h(|x-x'|)$.

$$f*g(x) - f*g(x') = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x'-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\big(g(x-y) - g(x'-y)\big)\mathrm{d}y.$$

Notons que $|(x-y)-(x'-y)| = |x-x'|$.
Note : On ne cherche pas à démontrer l'uniforme continuité de $f*g$ mais juste la continuité (bien qu'elle soit effectivement uniformément continue). On suppose dorénavant x fixé et $|x-x'| < 1$.
Alors d'une part l'expression $g(x-y) - g(x'-y)$ est nulle dès que $|y|$ est trop grand, par exemple dès que $|y| > R + |x| + 1$, car alors $|y-x| \geqslant |y| - |x| > R$ et $|y-x'| \geqslant |y| - |x'| \geqslant |y| - |x| - 1 > R$. Notez que j'ai choisi un rayon d'exclusion pour y qui ne dépend que de x. D'autre part quand l'expression $g(x-y) - g(x'-y)$ est non nulle c'est que $x-y$ ou $x'-y$ est dans B ; or $|(x-y)-(x'-y)| = |x-x'| < 1$ donc $x-y$ et $x'-y$ sont tous les deux dans B' ; ainsi $|g(x-y) - g(x'-y)| \leqslant h(|x-x'|)$.

$$\big|f*g(x) - f*g(x')\big| \leqslant h(|x-x'|) \int_{|y| \leqslant R+|x|+1} |f(y)|\mathrm{d}y.$$

Le facteur $\int_{|y|\leqslant\ldots} |f(y)|\mathrm{d}y$ est bien indépendant de x' et $h(|x-x'|)$ tend vers 0 quand x' tend vers x. On a démontré la continuité en x de $f*g$.

Variantes : On peut simplifier légèrement la preuve en utilisant le fait que g est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ mais il faut quand même restreindre le domaine d'intégration. Utiliser l'inégalité de Hölder simplifie également la rédaction. Sinon on peut utiliser pour la continuité un théorème d'intégration des fonctions continues, mais il faut comme dans la preuve ci-dessus faire attention à restreindre les valeurs de x.

b. Démontrer sous les mêmes hypothèses que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\mathrm{d}y\right)^p \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p |g(x-y)|\mathrm{d}y\right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|\mathrm{d}y\right)^{p-1}.$$

On peut utiliser l'inégalité de Hölder en écrivant $|f(y)g(x-y)| = |a(y)b(y)|$ avec $a(y) = |f(y)||g(x-y)|^{1/p}$ et $b(y) = |g(x-y)|^{1-1/p}$. Soit q tel que $1/p + 1/q = 1$: $1/q = 1 - 1/p$.

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\mathrm{d}y = \int |ab| \leqslant \left(\int |a|^p\right)^{1/p} \left(\int |b|^q\right)^{1/q}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\mathrm{d}y \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p|g(x-y)|\mathrm{d}y\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|\mathrm{d}y\right)^{1-1/p}$$

D'où le résultat en passant à la puissance p.

Variante : avec l'inégalité de Jensen. Dans le cas où g est la fonction nulle l'inégalité est triviale car toutes les intégrales sont nulles. Sinon la mesure μ définie par $\mathrm{d}\mu(x) = |g(x-y)|\mathrm{d}\lambda(x)$ est une mesure finie (rappel : λ est la mesure de Lebesgue) et la fonction $t \mapsto t^p$ de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est convexe (car $p \geqslant 1$), donc

$$\left(\frac{\int |f|\mathrm{d}\mu}{\int \mathrm{d}\mu}\right)^p \leqslant \frac{\int |f|^p\mathrm{d}\mu}{\int \mathrm{d}\mu}.$$

C'est à dire

$$\left(\int |f|\mathrm{d}\mu\right)^p \leqslant \left(\int |f|^p\mathrm{d}\mu\right)\left(\int \mathrm{d}\mu\right)^{p-1}.$$

et quand on remplace $\mathrm{d}\mu$ par sa définition $|g(x-y)|\mathrm{d}\lambda(x)$, on obtient exactement l'inégalité demandée.

c. En déduire que $f * g \in L^p$ et que $\|f * g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1}$.

Il faut montrer que la quantité suivante est finie :

$$\int |f * g(x)|^p\mathrm{d}x = \int \left|\int f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\right|^p \mathrm{d}x.$$

En utilisant la question précédente il vient (deuxième inégalité) :

$$\begin{aligned}\int \left|\int f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\right|^p \mathrm{d}x &\leqslant \int \left(\int |f(y)g(x-y)|\mathrm{d}y\right)^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int \left(\int |f(y)|^p|g(x-y)|\mathrm{d}y\right)\left(\int |g(x-y)|\mathrm{d}y\right)^{p-1} \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Comme g est continue à support compact, la quantité $\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|\mathrm{d}y$ converge. De plus elle ne dépend pas de x et vaut $\|g\|_{L^1}$

$$\int \left|\int f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\right|^p \mathrm{d}x \leqslant \|g\|_{L^1}^{p-1} \int \left(\int |f(y)|^p|g(x-y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Ensuite par Fubini :

$$\begin{aligned}
\int\left(\int |f(y)|^p|g(x-y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x &= \int\left(\int |f(y)|^p|g(x-y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
\text{(comme } |f(y)|^p \text{ est indépendant de } x) &= \int\left(|f(y)|^p\int |g(x-y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int \left(|f(y)|^p\|g\|_{L^1}\right)\mathrm{d}y \\
&= \|g\|_{L^1}\int |f(y)|^p\mathrm{d}y \\
&= \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^p}^p
\end{aligned}$$

Résumons :

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_{L^p}^p &= \int\left|\int f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x \leqslant \|g\|_{L^1}^{p-1}\|g\|_{L^1}\|f\|_{L^p}^p = \|g\|_{L^1}^p\|f\|_{L^p}^p \\
\|f*g\|_{L^p} &\leqslant \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^p}
\end{aligned}$$

Considérons une suite u_n de fonctions continues $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ qui vérifie pour une certaine suite $\varepsilon_n > 0$:

(1) $u_n \geqslant 0$

(2) $\int_{\mathbb{R}^d} u_n = 1$

(3) $\varepsilon_n \longrightarrow 0$

(4) $|x| \geqslant \varepsilon_n \implies u_n(x) = 0$.

d. Démontrer qu'il existe une telle suite.

Soit $a(x) = \max(1-|x|, 0)$. Soit $a_n(x) = a(nx)$. Soit $u_n(x) = a_n/\int_{\mathbb{R}^d} a_n$. Alors u_n convient avec $\varepsilon_n = 1/n$.

e. Démontrer que si h est continue à support compact, alors $h * u_n$ tend uniformément vers h.

Démontrons que h est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.
Méthode 1 : Comme tout à l'heure, h est nulle en dehors d'une boule fermée $B = \overline{B}(0, R)$ et uniformément continue sur la boule fermée $B' = \overline{B}(0, R+1)$. Soit m un module de continuité uniforme. Démontrons que h est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$, de module de continuité la fonction ν définie par $\nu(t) = m(t)$ si $t \leqslant 1$ et $\nu(t) = 2\sup|h|$ si $t > 1$. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Si ni x ni y n'est dans B alors $h(x) - h(y) = 0 - 0 = 0$ et donc $|h(x) - h(y)| \leqslant \nu(|x-y|)$. Sinon au moins l'un des deux est dans B.

(1) Si $|x-y| \leqslant 1$: alors tous x et y sont dans B'. On a alors $|h(x)-h(y)| \leqslant m(|x-y|) = \nu(|x-y|)$.

(2) Si $|x-y| > 1$: alors $|h(x)-h(y)| \leqslant |h(x)| + |h(y)| \leqslant 2\sup|h| = \nu(|x-y|)$.

Méthode 2 : par l'absurde en considérant des suites x_n et y_n telles que $x_n - y_n \longrightarrow 0$ mais $|h(x_n) - h(y_n)| > \varepsilon$. Etc...

Fixons maintenant $x \in \mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned}
h * u_n(x) - h(x) &= \left(\int h(y)u_n(y-x)\mathrm{d}y\right) - h(x) = \int h(y)u_n(y-x)\mathrm{d}y - \int h(x)u_n(y-x)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (h(y)-h(x))u_n(y-x)\mathrm{d}y = \int_{|y-x|<\varepsilon_n} \text{idem} \\
|h * u_n(x) - h(x)| &\leqslant \int_{|y-x|<\varepsilon_n} |h(y)-h(x)|u_n(y-x) \\
&\leqslant \int_{|y-x|<\varepsilon_n} \nu(\varepsilon_n)u_n(y-x) \;=\; \nu(\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

f. En déduire que $\forall f \in L^p$, $f * u_n \longrightarrow f$ dans L^p.

On a vu à la question c) que $f * u_n$ est bien dans L^p.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit g continue à support compact telle que $\|f-g\|_p < \varepsilon$ (existe d'après la densité démontrée au II). Alors

$$\|f*u_n-f\|_{L^p} = \|(f-g)*u_n-(f-g)+g*u_n-g\|_{L^p} \leqslant \|(f-g)*u_n\|_{L^p}+\|(f-g)\|_{L^p}+\|g*u_n-g\|_{L^p}$$

et d'après c) : $\|(f-g)*u_n\|_{L^p} \leqslant \|(f-g)\|_{L^p}\|u_n\|_{L^1}$. D'après les propriétés de u_n, $\|u_n\|_{L^1} = 1$. En résumé :

$$\|f * u_n - f\|_{L^p} \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \|g * u_n - g\|_{L^p}$$

Démontrons maintenant que $\|g * u_n - g\|_{L^p} \longrightarrow 0$. En e) on a démontré la convergence uniforme mais ce n'est pas encore suffisant. Remarquons cependant que si g est à support dans $\overline{B}(0,R)$ alors $g * u_n$ est à support dans $\overline{B}(0, R+\varepsilon_n)$. En particulier g et les $g * u_n$ sont toutes à support dans $\overline{B}(0, R')$ avec $R' = R + \sup_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n$. Cela suffit maintenant. Comme $\|g * u_n - g\|_{L^p} \longrightarrow 0$, il existe un rang à partir duquel

$$\|f * u_n - f\|_{L^p} \leqslant 3\varepsilon.$$

En résumé, pour tout ε, on a trouvé un rang à partir duquel $\|f * u_n - f\|_{L^p} \leqslant 3\varepsilon$.