Université Paul Sabatier
Cours d'intégration-probabilités

année 2011/2012
L3, 2e semestre

Devoir

À rendre au plus tard le 9 février

Auteur : Arnaud Chéritat.

Pile ou Face

Le but de ce problème est donner une construction d'un modèle probabiliste $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ du jeu de pile ou face infini, à partir de la mesure de Lebesgue sur un intervalle.

On rappelle le **Lemme de transport** : soient $(Y, \mathcal{B})$ et $(X, \mathcal{A})$ deux espaces mesurables. On suppose que $\mathcal{A}$ est engendrée par $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$. Alors pour qu'une fonction $f : Y \to X$ soit mesurable il faut et il suffit que $\forall E \in \mathcal{P},\ f^{-1}(E) \in \mathcal{B}$.

L'expérience aléatoire (imaginaire) consiste à lancer une pièce une infinité de fois. L'espace des épreuves Ω choisi est l'ensemble des suites de 0 et de 1 :

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$$

où 0 correspond à pile et 1 à face. Le résultat du i-ème tirage est modélisé par la fonction

$$X_i : \left\{ \begin{array}{lcl} \Omega & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & x_i \end{array} \right.$$

où x est une notation abrégée pour la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

a. Rappeler comment est construite la tribu engendrée par des ensembles donnés et quelle est sa propriété caractéristique.

b. Quelle est la plus petite tribu $\mathcal{A}$ telle que les événements $X_i = 0$ et $X_i = 1$ sont mesurables pour tout $i > 0$?

On munit $\{0,1\}$ de la tribu $\mathcal{P}(\{0,1\})$ de toutes ses parties.

c. Démontrer que les X_i sont des variables aléatoires.

d. Démontrer que l'événement "le tirage contient 20 piles d'affilée" fait partie de la tribu $\mathcal{A}$.

e. Démontrer que pour tout $x \in \mathcal{A}$, le singleton $\{x\}$ fait partie de la tribu $\mathcal{A}$.

On veut maintenant introduire une mesure de probabilité p sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ qui pour tout n soit "compatible" avec le jeu de pile ou face fini à n parties. La condition de compatibilité s'énonce ainsi dans le présent problème :

$$\forall n,\ \forall (u_1, \ldots, u_n) \in \{0,1\}^n,\ p\big(\forall i \leqslant n,\ X_i = u_i\big) = \frac{1}{2^n}.$$

Même sur ce cas simple, il n'est pas si facile de démontrer l'existence d'une telle mesure de probabilité (c'est l'objet du théorème d'extension de Carathéodory). Si on admet l'existence de la mesure de Lebesgue (qui est tout autant difficile à établir) nous pouvons utiliser une astuce pour construire p. C'est l'objet de la suite de ce problème.

Nous allons établir une bijection, essentiellement le développement dyadique (binaire), entre l'intervalle $[0,1[$ et le sous-ensemble Dev_∞ de Ω défini ainsi :

$$\mathrm{Dev}_\infty = \big\{x \,\big|\, \forall n,\ \exists n' > n \text{ tel que } x_{n'} = 0\big\}.$$

f. Démontrer que $\Omega \setminus \mathrm{Dev}_\infty$ est dénombrable (on pourra essayer de l'exprimer comme une union dénombrable d'ensembles finis, dont on rappelle qu'elle est forcément dénombrable).

g. Démontrer que $\mathrm{Dev}_\infty \in \mathcal{A}$.

h. Supposons qu'il existe une mesure de probabilité p sur $(\Omega, \mathcal{A})$ compatible au sens énoncé plus haut. Démontrer que $p(\mathrm{Dev}_\infty) = 1$.

C'est pourquoi on peut se contenter d'une bijection sur Dev_∞.

Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n>0} \frac{x_n}{2^n} \end{array} \right.$$

i. Démontrer que $\forall x \in \mathrm{Dev}_\infty$, $\forall n > 0$, le reste vérifie

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{x_i}{2^i} < \frac{1}{2^n}.$$

j. * Démontrer que f est une bijection de Dev_∞ vers $[0,1[$.

On note $h : [0,1[\to \mathrm{Dev}_\infty$ la réciproque de la bijection $f : \mathrm{Dev}_\infty \to [0,1[$ et $g : [0,1[\to \Omega$ définie par $g(t) = h(t)$.

k. Démontrer que la fonction g est mesurable (indication : il suffit de le vérifier sur un petit sous-ensemble de $\mathcal{A}$).

Notons λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$. On définit maintenant p comme étant la mesure image de λ par g, c'est à dire $p : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$p(E) = \lambda(g^{-1}(E)) = \lambda(f(E \cap \mathrm{Dev}_\infty)).$$

l. Démontrer que p est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et qu'elle vérifie la condition de compatibilité énoncée plus haut.