Université Paul Sabatier
Cours d'intégration-probabilités

année 2011/2012
L3, 2e semestre

Corrigé

Auteur : Arnaud Chéritat.

Pile ou Face

Le but de ce problème est donner une construction d'un modèle probabiliste $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ du jeu de pile ou face infini, à partir de la mesure de Lebesgue sur un intervalle.

On rappelle le **Lemme de transport** : soient $(Y, \mathcal{B})$ et $(X, \mathcal{A})$ deux espaces mesurables. On suppose que $\mathcal{A}$ est engendrée par $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$. Alors pour qu'une fonction $f : Y \to X$ soit mesurable il faut et il suffit que $\forall E \in \mathcal{P}$, $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}$.

L'expérience aléatoire (imaginaire) consiste à lancer une pièce une infinité de fois. L'espace des épreuves Ω choisi est l'ensemble des suites de 0 et de 1 :

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$$

où 0 correspond à pile et 1 à face. Le résultat du i-ème tirage est modélisé par la fonction

$$X_i : \begin{cases} \Omega & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & x_i \end{cases}$$

où x est une notation abrégée pour la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

a. Rappeler comment est construite la tribu engendrée par des ensembles donnés et quelle est sa propriété caractéristique.

C'est l'intersection des tribus qui les contiennent : si X est un ensemble et $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$ est un ensemble de parties alors $\mathfrak{S}(\mathcal{P}) = \bigcap \mathcal{T}$ où $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ parcourt toutes les tribus telles que $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$. Elle se caractérise comme la plus petite tribu contenant $\mathcal{P}$.

b. Quelle est la plus petite tribu $\mathcal{A}$ telle que les événements $X_i = 0$ et $X_i = 1$ sont mesurables pour tout $i > 0$?

C'est la tribu engendrée par la collection d'ensembles $X_i^{-1}(0)$ et $X_i^{-1}(1)$ pour i parcourant $\mathbb{N}^*$. Notons que $X_i^{-1}(1)$ est facultatif : toute tribu contenant $X_i^{-1}(0)$ contient $X_i^{-1}(1)$ car ces deux sous-ensembles de Ω sont complémentaires.

On munit $\{0,1\}$ de la tribu $\mathcal{P}(\{0,1\})$ de toutes ses parties.

c. Démontrer que les X_i sont des variables aléatoires.

Il s'agit de démontrer que les X_i sont mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ vers $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$ c'est à dire pour tout $E \in \mathcal{P}(\{0,1\})$, $X_i^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Or il n'y a que 4 éléments dans $\mathcal{P}(\{0,1\})$: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0,1\}$. Maintenant $X_i^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $X_i^{-1}(\{0,1\}) = \Omega$ et ces deux ensembles font partie de toute tribu sur Ω donc de $\mathcal{A}$, quand à $X_i^{-1}(0) \in \mathcal{A}$ et $X_i^{-1}(0) \in \mathcal{A}$, cela a été démontré à la question précédente. Une autre façon de le dire, c'est que la tribu

$\mathcal{P}(\{0,1\})$ est engendrée par $\{0\}$ et $\{1\}$ et qu'il suffit d'après le lemme de transport de vérifier la mesurabilité de la préimage de ces deux ensembles, ce qui a été fait à la question précédente.

d. Démontrer que l'événement "le tirage contient 20 piles d'affilée" fait partie de la tribu $\mathcal{A}$.

L'évènement E se caractérise par $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n = 0,\ X_{n+1} = 0,\ \ldots,\ X_{n+19} = 0$. Donc

$$E = \bigcup_{n>0} \bigcap_{j=0}^{19} X_{j+n}^{-1}(0).$$

Cet ensemble est mesurable de par les propriétés d'une tribu et le fait que les $X_{j+n}^{-1}(0)$ sont mesurables.

e. Démontrer que pour tout $x \in \mathcal{A}$, le singleton $\{x\}$ fait partie de la tribu $\mathcal{A}$.

En effet $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \text{“}X_n = x_n\text{”} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} X_n^{-1}(x_n)$.

On veut maintenant introduire une mesure de probabilité p sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ qui pour tout n soit "compatible" avec le jeu de pile ou face fini à n parties. La condition de compatibilité s'énonce ainsi dans le présent problème :

$$\forall n,\ \forall (u_1, \ldots, u_n) \in \{0,1\}^n,\ p\big(\forall i \leqslant n,\ X_i = u_i\big) = \frac{1}{2^n}.$$

Même sur ce cas simple, il n'est pas si facile de démontrer l'existence d'une telle mesure de probabilité (c'est l'objet du théorème d'extension de Carathéodory). Si on admet l'existence de la mesure de Lebesgue (qui est tout autant difficile à établir) nous pouvons utiliser une astuce pour construire p. C'est l'objet de la suite de ce problème.

Nous allons établir une bijection, essentiellement le développement dyadique (binaire), entre l'intervalle $[0,1[$ et le sous-ensemble Dev_∞ de Ω défini ainsi :

$$\mathrm{Dev}_\infty = \big\{x \,\big|\, \forall n,\ \exists n' > n \text{ tel que } x_{n'} = 0\big\}.$$

f. Démontrer que $\Omega \setminus \mathrm{Dev}_\infty$ est dénombrable (on pourra essayer de l'exprimer comme une union dénombrable d'ensembles finis, dont on rappelle qu'elle est forcément dénombrable).

C'est l'ensemble des suites qui stabilisent sur 1. Or l'ensemble des suites qui stabilisent à partir du rang n (ou avant) forme un ensemble fini, caractérisé par les $n-1$ premiers éléments.

g. Démontrer que $\mathrm{Dev}_\infty \in \mathcal{A}$.

Il suffit de le démontrer pour le complémentaire $\Omega \setminus \mathrm{Dev}_\infty$. Or ce dernier est dénombrable. Comme $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre il suffit de démontrer que les singletons $\{x\} \in \mathcal{A}$. Cela a été fait à la question e.

h. Supposons qu'il existe une mesure de probabilité p sur $(\Omega, \mathcal{A})$ compatible au sens énoncé plus haut. Démontrer que $p(\mathrm{Dev}_\infty) = 1$.

Autrement dit que $p(\Omega \setminus \mathrm{Dev}_\infty) = 0$. Comme cet ensemble est dénombrable il suffit de démontrer que $p(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \Omega$. Or $\{x\} \subset E_n$ où E_n est l'évènement "$\forall i \leqslant n$, $X_i = x_i$", de probabilité $1/2^n$ par hypothèse. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(\{x\}) \leqslant 1/2^n$. Le seul nombre $\geqslant 0$ pouvant satisfaire cela est 0 : $p(\{x\}) = 0$. C.F.Q.D.

C'est pourquoi on peut se contenter d'une bijection sur Dev_∞.

Soit

$$f : \begin{cases} \Omega & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n>0} \frac{x_n}{2^n} \end{cases}$$

i. Démontrer que $\forall x \in \mathrm{Dev}_\infty$, $\forall n > 0$, le reste vérifie

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{x_i}{2^i} < \frac{1}{2^n}.$$

Par définition de Dev_∞, il existe $k > n$ tel que $x_k = 0$ d'où

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{x_i}{2^i} \leqslant \left(\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \right) - \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^n}.$$

j. * Démontrer que f est une bijection de Dev_∞ vers $[0,1[$.

$\underline{f(\mathrm{Dev}_\infty) \subset [0,1[}$: soit $x \in \mathrm{Dev}_\infty$. D'après la question précédente, appliquée à $n = 1$, $f(x) < 1$.

$\underline{f \text{ est injective sur } \mathrm{Dev}_\infty}$: c'est l'unicité du développement dyadique des nombres. Démontrons-la par l'absurde. Si $f(x) = f(y)$ et $x \neq y$, soit $i > 0$ minimal tel que $x_i \neq y_i$. Quitte à permuter x et y on peut supposer que $x_i = 0$ et $y_i = 1$. Alors

$$f(x) = a + \frac{0}{2^i} + r_x$$
$$f(y) = a + \frac{1}{2^i} + r_y$$

avec $a = \sum_{n=1}^{i-1} x_n/2^n = \sum_{n=1}^{i-1} y_n/2^n$, $r_x = \sum_{n>i} x_n/2^n$ et $r_y = \sum_{n>i} y_n/2^n$. D'où $r_x = 1/2^i + r_y \geqslant 1/2^i$. Or $r_x < 1/2^i$ d'après la question précédente. Contradiction.

$\underline{[0,1[\subset f(\mathrm{Dev}_\infty) \text{ (surjectivité)}}$: c'est l'existence du développement dyadique des nombres. Soit $t \in [0,1[$. Soit $k_n = \lfloor 2^n t \rfloor$, d'où

$$\frac{k_n}{2^n} \leqslant t < \frac{k_n + 1}{2^n}.$$

Soit $x_n = 0$ si k_n est pair, 1 s'il est impair. Il s'agit de vérifier que $x \in \mathrm{Dev}_\infty$ et que $f(x) = t$. Commençons par $f(x) = t$. Pour cela, notons que $k_n = 2k_{n-1} + x_n$. D'où par récurrence

$$\frac{k_n}{2^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i}.$$

D'où

$$\left| t - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i} \right| < \frac{1}{2^n}$$

donc finalement

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{2^i} = t$$

c'est à dire $f(x) = t$. Reste à vérifier que $x \in \mathrm{Dev}_\infty$. Par l'absurde, supposons $x_n = 1$ pour tout $n > a$. Alors $t = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{a} \frac{x_i}{2^i} + \sum_{a+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{k_a + 1}{2^a}$ est un nombre dyadique. Or dans ce cas, pour $n > a$, on a $2^n t = 2^{n-a}(k_a + 1)$, nombre pair et donc $x_n = 0$ et non pas 1. Contradiction.

On note $h : [0, 1[\to \mathrm{Dev}_\infty$ la réciproque de la bijection $f : \mathrm{Dev}_\infty \to [0, 1[$ et $g : [0, 1[\to \Omega$ définie par $g(t) = h(t)$.

k. Démontrer que la fonction g est mesurable (indication : il suffit de le vérifier sur un petit sous-ensemble de $\mathcal{A}$).

Soit l'évènement $E_i : X_i = 0$. On trouve :

$$g^{-1}(E_i) = \bigcup_{k=0}^{2^{i-1}-1} \left[\frac{2k}{2^i}, \frac{2k+1}{2^i} \right[.$$

Cela se voit bien sur le développement dyadique, mais on peut également effectuer une preuve rigoureuse. Il est donc borélien.
Comme la collection des E_i engendre $\mathcal{A}$, on conclut avec le lemme de transport.

Notons λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1[$. On définit maintenant p comme étant la mesure image de λ par g, c'est à dire $p : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$p(E) = \lambda(g^{-1}(E)) = \lambda(f(E \cap \mathrm{Dev}_\infty)).$$

l. Démontrer que p est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et qu'elle vérifie la condition de compatibilité énoncée plus haut.

D'après le cours, une mesure image est une mesure, donc p est une mesure. Si on n'a pas vu ça en cours, voici la preuve : p est bien sûr positive ; soit $A_n \in \mathcal{A}$ une famille dénombrable d'ensembles appartenant à la tribu $\mathcal{A}$ et deux à deux disjoints : alors les $g^{-1}(A_n)$ sont deux à deux disjoints (et on a vu qu'ils sont mesurables) donc la σ-additivité de la mesure λ implique l'égalité $*$ dans le calcul suivant :

$$p(\bigcup A_n) = \lambda(g^{-1}(\bigcup A_n)) = \lambda(\bigcup g^{-1}(A_n)) \overset{*}{=} \sum \lambda(g^{-1}(A_n)) = \sum p(A_n).$$

D'autre part $p(\Omega) = \lambda(f(\mathrm{Dev}_\infty)) = \lambda([0, 1[) = 1$. Donc la mesure p est de proba. Enfin soit E l'évènement $\forall i \leqslant n, X_i = u_i$. Alors $f(E \cap \mathrm{Dev}_\infty) = [t, t + 1/2^n[$ avec $t = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{2^i}$.

Donc

$$p(\forall i \leqslant n, X_i = u_i) = \lambda\left(\left[t, t+\frac{1}{2^n}\right[\right) = 1/2^n.$$

FIN