Université Paul Sabatier
Cours de fonctions holomorphes

année 2010/2011
L3, 2e semestre

Corrigé

du devoir n°2 de fonctions holomorphes

Les coordonnées de Fatou

1. Préliminaires

On s'intéresse à l'étude du système dynamique holomorphe suivant :

$$z_{n+1} = Q(z_n)$$

pour le polynôme particulier $Q(z) = z^2 + 1/4$. Si on pose $u_n = z_n - 1/2$ on trouve

$$u_{n+1} = P(u_n)$$

avec $P(u) = u + u^2$.

a. *Démontrer que si* $|z_0| > 2$ *alors* $|z_n| \longrightarrow +\infty$. *Indication : on comparera* $|z_{n+1}|$ à $|z_n|$.

Par l'inégalité triangulaire, $|z_{n+1}| = |z_n^2 - 1/4| \geqslant |z_n|^2 - 1/4$. Est-ce que cette quantité est $> |z_n|$? Notons $r = |z_n|$. Quand a-t-on $r^2 - 1/4 > r$? Cela équivaut à $r^2 - r - 1/4 > 0$. Ce trinôme a un discriminant égal à 2, et ses racines sont $(1 \pm \sqrt{2})/2$. L'une est < 0, l'autre < 2 donc si $r > 2$, alors non seulement $r^2 - r - 1/4$ est > 0, mais il est (d'après le tableau de variation du trinôme) également $>$ à sa valeur en $r = 2$, c'est à dire $1,75$. Donc $|z_n| > 2 \implies |z_{n+1}| > |z_n| + 1,75$. On obtient donc par récurrence que $|z_n| > 2 + 1,75n \longrightarrow +\infty$.

On appelle *bassin d'attraction de l'infini* l'ensemble des $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_n| \longrightarrow +\infty$

Il est facile de voir que P a un unique point fixe, $u = 0$. Ainsi, $z = 1/2$ est l'unique point fixe de Q. On le qualifie de *parabolique* car $Q'(1/2) = 1$. Si cette dérivée avait été < 1 en module, on l'aurait qualifiée d'attractif, et de répulsif si > 1. On va s'intéresser à l'ensemble des $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $z_n \underset{\neq}{\longrightarrow} 1/2$. On l'appelle *bassin parabolique* de Q.

b. *Soit* $v_n = -1/u_n$, *exprimer* v_{n+1} *en fonction de* v_n, *càd trouver une fonction* $F(v)$ *telle que*

$$v_{n+1} = F(v_n).$$

On calcule (en supposant que ni u_n ni u_{n+1} n'est nul) $v_{n+1} = -1/u_{n+1} = \dfrac{-1}{u_n + u_n^2} = \dfrac{-1}{\frac{-1}{v_n} + \left(\frac{-1}{v_n}\right)^2} == \dfrac{v_n^2}{v_n - 1}$ d'où $F(v) = \dfrac{v^2}{v-1}$.

c. *Démontrer que* $F(v) = v + 1 + o(1)$ *quand* $|v| \longrightarrow +\infty$.

On calcule $F(v)-(v+1) = \dfrac{v^2}{v-1}-(v+1) = \dfrac{v^2-(v+1)(v-1))}{v-1} = \dfrac{1}{v-1}$. Or $|1/(v-1)| \longrightarrow 0$ quand $|v| \longrightarrow +\infty$.

d. *Démontrer que si* $\mathrm{Re}(v) > 1$ *alors* $\mathrm{Re}(F(v)) > \mathrm{Re}(v) + 1$.

On utilise l'identité trouvée à la question précédente :

$$F(v) = v + 1 + \frac{1}{v-1}.$$

On en déduit que $\mathrm{Re}(F(v)) = \mathrm{Re}(v) + 1 + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{v-1}\right)$. Si $\mathrm{Re}(v) > 1$ alors $\mathrm{Re}(v-1) > 0$ et donc $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{v-1}\right) > 0$ et donc $\mathrm{Re}(F(v)) > \mathrm{Re}(v) + 1$.

e. *En déduire d'une part que* F *envoie le demi-plan* H *d'équation "*$v \in H \iff \mathrm{Re}(v) > 1$*" dans lui-même, puis que* Q *envoie la boule ouverte* B *de diamètre* $]-1/2, 1/2[$ *dans elle-même.*

Si $v \in H$ alors $\mathrm{Re}(v) > 1$ donc $\mathrm{Re}(F(v)) > \mathrm{Re}(v) + 1 > 2 > 1$ donc $F(v) \in H$. Donc P envoie dans lui-même l'ensemble d'équation $-1/u \in H$. Si $u = x + iy$ alors $-1/u = (-x+iy)/(x^2+y^2)$ donc $-1/u \in H \iff -x/(x^2+y^2) > 1 \iff x^2+y^2+x < 0 \iff (x+1/2)^2+y^2 < 1/4$ ce qui est l'équation du disque de centre $-1/2$ et de rayon $1/2$. Donc Q envoie dans lui-même l'image de ce disque par la transformation $u \mapsto z = u + 1/2$, c'est à dire le disque de centre 0 et de rayon $1/2$.

f. *D'autre part que pour tout* $z_0 \in B$*, alors* $z_n \underset{\neq}{\longrightarrow} 1/2$.

Si $z_0 \in B$ alors $v_0 \in H$ (on a raisonné par équivalences dans la question précédente). D'après la question précédente, $\forall n$, $v_n \in H$. Donc $\forall n$, $\mathrm{Re}(v_{n+1}) \geqslant \mathrm{Re}(v_n) + 1$. Donc par récurrence, $\mathrm{Re}(v_n) \geqslant n + 1$. Donc $|v_n| \longrightarrow +\infty$. Donc $u_n = -1/v_n \longrightarrow 0$. Donc $z_n = u_n + 1/2 \longrightarrow 1/2$. De plus z_n ne vaut jamais $1/2$ car u_n ne vaut jamais 0 en tant qu'inverse d'un nombre complexe.

g. *Démontrer que si* $|v| > 3$ *alors* $\left|F(v) - (v+1)\right| < \dfrac{1}{2}$.

Cette différence vaut $1/|v-1|$. Or si $|v| > 3$ alors $|v-1| \geqslant |v| - 1 > 2$ d'où le résultat.

h. *En déduire que pour tout* $z_0 \in \mathbb{C}$*, si* $z_n \longrightarrow 1/2$*, alors soit* z_n *vaut* $1/2$ *à partir d'un certain rang, soit* $z_n \in B$ *à partir d'un certain rang.*

Supposons que $z_n \longrightarrow 1/2$ et qu'il ne vaille jamais $1/2$ et montrons qu'il entre dans B (il y reste d'après la question e). Le nombre u_n n'étant jamais nul, v_n est bien défini et $z_n \longrightarrow 1/2$ équivaut à ce que $|v_n|$ tende vers l'infini. En particulier, à partir d'un certain rang N, on a $|v_n| > 3$. À partir de là, la question g nous dit que $|v_{n+1} - (v_n + 1)| > 1/2$. En particulier $\mathrm{Re}(v_{n+1}) > \mathrm{Re}(v_n) + 1/2$. Donc $\mathrm{Re}(v_n) \longrightarrow \infty$. Il entre donc dans H à partir d'un certain autre rang, c'est à dire $z_n \in B$.

On sait démontrer que le bassin d'attraction de l'infini et le bassin parabolique sont ouverts, connexes et ont pour frontière commune une courbe de Jordan*, fractale, surnommée le *chou-fleur* en raison de son allure.

(*) une courbe de Jordan est une coube fermée simple, c'est à dire l'image d'une application continue et injective du cercle dans le plan.

2. Une équation fonctionnelle

Dans la coordonnée v, le terme v_{n+1} de la suite est approximativement égal à v_n+1. On aimerait trouver un changement de variable holomorphe $\phi(z)$ défini sur un ouvert touchant 1/2 telle que la suite $\xi_n = \phi(z_n)$ vérifie exactement $\xi_{n+1} = \xi_n + 1$. Autrement dit que ϕ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\phi(Q(z)) = \phi(z) + 1.$$

On aimerait également que l'ouvert de définition de ϕ ne soit pas trop petit. On appelle une telle fonction ϕ une *coordonnée de Fatou.*

Soit $a_0 = 4$, et $a_{n+1} = F(a_n)$. Supposons $\mathrm{Re}(v_0) > 3$ et considérons la suite $w_n = v_n - a_n$. Alors $w_n = G_n(v_0)$ avec $G_n(v) = F^n(v) - a_n = F \circ \cdots \circ F(v) - a_n$.

a. *Démontrer que*

$$\mathrm{Re}(v_0) > 3 \implies \mathrm{Re}(v_n) > 3 + \frac{n}{2}.$$

On procède par récurrence. L'initialisation est une tautologie. Puis si $\mathrm{Re}(v_n) > 3+\frac{n}{2}$ alors en particulier $\mathrm{Re}(v_n) > 3$ donc a fortiori $|v_n| > 3$. D'après la question 1.g, ceci implique que $|v_{n+1} - (v_n + 1)| < 1/2$. En particulier $|\mathrm{Re}(v_{n+1} - (v_n + 1))| < 1/2$ donc $\mathrm{Re}(v_{n+1}) > \mathrm{Re}(v_n) + 1 - 1/2 > 3 + (n + 1)/2$.

b. *Démontrer que* $G'_{n+1}(v_0) = G'_n(v_0)F'(v_n)$.

Notons que $G_n = F^n - a_n$ et que $G_{n+1} = F \circ F^n - a_n$. Donc $G'_n = (F^n)'$ et $G'_{n+1} = (F' \circ F^n) \times (F^n)'$. Il suffit alors d'appliquer en v_0 : $G'_n(v_0) = (F^n)'(v_0)$ et $G'_{n+1}(v_0) = F'(F^n(v_0)) \times (F^n)'(v_0) = F'(v_n)G'_n(v_0)$ car $F^n(v_0) = v_n$.

c. *Démontrer que* $\left|F'(v) - 1\right| = \dfrac{1}{|v-1|^2}$.

On a déjà calculé que $F(v) = v + 1 + 1/(v-1)$ d'où $F'(v) = 1 - 1/(v-1)^2$ d'où le résultat.

d. *Démontrer que le produit* $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} F'(F^n(v))$ *converge uniformément sur le domaine* $\mathrm{Re}(v) > 3$.

Rappelons le critère de convergence (dite normale) des produits suivant : si f_n est une suite de fonctions vérifiant $\displaystyle\sum_n \sup|f_n - 1| < +\infty$ alors le produit $\prod f_n$ converge uniformément. Ici, $|F'(F^n(v)) - 1| = \frac{1}{|(F^n(v))^2|-1}$. Si on suppose $\mathrm{Re}(v) > 3$ alors on a vu que $\mathrm{Re}(F^n(v)) > 3 + n/2$ d'où $|F^n(v) - 1| > 2 + n/2$ d'où $|F'(F^n(v)) - 1| < \dfrac{1}{(2+\frac{n}{2})^2}$.

Comme la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(2+\frac{n}{2})^2}$ converge, le produit est normalement convergent, donc uniformément convergent.

e. *En déduire que G'_n converge vers une fonction holomorphe.*

En utilisant la question 2.b et le fait que $G'_0 = 1$, on voit que le produit partiel $\displaystyle\prod_{n=0}^{N} F'(F^n(v))$ vaut précisément G'_{N+1}. La question précédente implique que G'_n converge uniformément sur le domaine $\mathrm{Re}(v) > 3$. Puis rappelons qu'une limite uniforme de fonctions holomorphes est holomorphe.

f. *En déduire que G_n converge vers une fonction holomorphe (déterminer d'abord $G_n(a_0)$).*

On calcule $G_n(a_0) = F^n(a_0) - a_n = a_n - a_n = 0$. Comme de plus la dérivé converge uniformément—nous noterons $L(z)$ sa limite—et que le domaine $\mathrm{Re}(v) > 3$ est convexe, on en déduit que G_n converge uniformément sur tout compact du domaine vers la primitive complexe G de L qui s'annule en a_0 (preuve : $|G_n(z) - G(z)| = |\int_{a_0}^{z}(G'_n - L)(z)dz| \leqslant \|G'_n - L\|.|z - a_0|$, le segment $[a_0, z]$ étant inclus dans le domaine).

On note Φ sa limite.

g. *Démontrer que* $\mathrm{Re}(v) > 3 \implies \mathrm{Re}(F(v)) > 3$ *puis que* $\Phi(F(v)) = \Phi(v) + 1$.

L'implication $\mathrm{Re}(v) > 3 \implies \mathrm{Re}(F(v)) > 3$ a déjà été démontrée au 1.a (on a montré plus fort). L'énoncé nous la demandait de façon à souligner que les termes de l'équation à démontrer $\Phi(F(v)) = \Phi(v) + 1$ sont bien définis.

Maintenant, notons $v_0 = v$. Alors $\Phi(F(v_0)) = \Phi(v_1) = \lim\big(F^n(v_1) - a_n\big) = \lim\big(v_{n+1} - a_n\big) = \lim\big(v_n + 1 + \frac{1}{v_n - 1} - a_n\big) = \lim(v_n - a_n) + 1 = \Phi(v_0) + 1$.

h. *Démontrer que la fonction $\phi(z) = \Phi(-1/(z-1/2))$ est holomorphe et solution de l'équation fonctionnelle*

$$\phi(Q(z)) = \phi(z) + 1$$

sur un disque que l'on précisera.

Le domaine de définition de Φ est $\mathrm{Re}(v) > 3$. Celui de ϕ est donné par l'équation $\mathrm{Re}(-1/(z-1/2)) > 3$ d'où en notant $z = x + iy$: $\mathrm{Re}\,\dfrac{-1}{(x-1/2)+iy} > 3$ (ssi) $-\mathrm{Re}\,\dfrac{(x-1/2)-iy}{(x-1/2)^2+y^2} > 3$ (ssi) $\dfrac{-(x-1/2)}{(x-1/2)^2+y^2} > 3$ (ssi) $1/2 - x > 3((x-1/2)^2 + y^2)$ (ssi) $(x-1/2)^2 + y^2 + (x-1/2)/3 < 0$ (ssi) $((x-1/2)+1/6)^2 + y^2 < (1/6)^2$. C'est l'équation du disque de centre $1/2 - 1/6 = 1/3$ et de rayon $1/6$. Il intersecte $\mathbb{R}$ selon le segment $]1/6, 1/2[$.

On peut démontrer que ϕ ainsi définie est injective. On peut définir ϕ sur de plus grands domaines : elle possède en fait un prolongement analytique maximal (et non injectif) à tout le bassin parabolique, qui joue un rôle important dans l'étude des systèmes dynamiques holomorphes.