Corrigé

du devoir n°1 de calcul différentiel

Dans ce corrigé, nous donnons plusieurs réponses possibles à certaines questions. Ce n'est bien sûr pas exhaustif.

Convention : si $x > y$, la notation $[x, y]$ désignera le segment $[y, x]$.

I. Exercice 8 du Cartan

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et E un espace de Banach. Soit $f : I \to E$ une fonction de classe C^1. On pose

$$\begin{cases} g(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, & \text{si } x \neq y \\ g(x,x) = f'(x). \end{cases}$$

a. Montrer que g est continue dans $I \times I$, et de classe C^1 dans $I \times I - \bigcup_{x \in I} \{(x,x)\}$.

Comme f est de classe C^1, le numérateur $f(x) - f(y)$ et le dénominateur $x - y$ sont C^1 et donc g est C^1 là où le dénominateur ne s'annule pas c'est à dire en dehors de la diagonale. En particulier elle est continue sur cet ensemble. Reste à démontrer la continuité de g en tout point (a, a) de la diagonale. Il y a deux cas selon que $y = x$ ou pas :

$$(y \neq x) \quad g(x,y) - g(a,a) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(a)$$
$$g(x,x) - g(a,a) = f'(x) - f'(a)$$

Il y a ensuite plusieurs façons d'argumenter. Par exemple on peut utiliser l'inégalité des accroissements finis (attention, on ne peut utiliser le théorème *des accroissements finis que si E est de dimension 1) appliquée à la fonction $R(x) = f(x) - (x - a)f'(a)$ (l'idée étant de majorer l'erreur faite quand on approxime f par son développement à l'ordre 1) :*

$$|R(x) - R(y)| \leqslant |x - y| \sup_{t \in [x,y]} \|R'(t)\|$$

Or $R'(t) = f'(t) - f'(a)$. Utilisons la continuité de f' au point a : $\exists \eta > 0$ tel que $|t - a| < \eta \implies |f'(t) - f'(a)| < \varepsilon$. Donc si x et y sont dans l'intervalle $]a - \eta, a + \eta[$ alors

$\sup_{t\in[x,y]}\|R'(t)\|\leqslant\varepsilon$. D'où
$$\|R(x)-R(y)\|\leqslant\varepsilon|x-y|.$$
Maintenant,
$$\begin{aligned}(y\neq x)\qquad g(x,y) &= \frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{f(a)+(x-a)f'(a)+R(x)-f(a)-(y-a)f'(a)-R(y)}{x-y}\\ &= f'(a)+\frac{R(x)-R(y)}{x-y}\end{aligned}$$
D'où
$$\forall(x,y)\in]a-\eta,a+\eta[,\ \ x\neq y\implies\|g(x,y)-g(a,a)\|\leqslant\varepsilon.$$
Reste le cas $x=y$: or pour $x\in]a-\eta,a+\eta[$, on a $\|g(a,a)-g(x,x)\|=\|f'(a)-f'(x)\|<\varepsilon$.

Dans le cas où E est de dimension 1 on avait la preuve plus simple suivante avec le théorème des accroissements finis :
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(t)$$
avec $t=t_{x,y}$ compris entre x et y et dépendant de x et y. D'où
$$f'(a)-\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(a)-f'(t_{x,y})$$
On utilise ensuite la continuité de f' au point a : $\exists\eta>0$ tel que $|x-a|<\eta\implies|f'(x)-f'(a)|<\varepsilon$. Or $t\in]x,y[$ donc $t\in]a-\eta,a+\eta[$, donc $|f'(a)-f'(t_{x,y})|<\varepsilon$. Ainsi pour $x\neq y$ dans $]a-\eta,a+\eta$ on a $|g(a,a)-g(x,y)|<\varepsilon$. Et pour $x\in]a-\eta,a+\eta[$, on a $|g(a,a)-g(x,x)|=|f'(a)-f'(x)|<\varepsilon$.

Variante élégante (valable quelle que soit la dimension de E) : réaliser que, pour tout $(x,y)\in I$, même si $x=y$,
$$g(x,y)=\int_0^1 f'(tx+(1-t)y)dt.$$

b. Si $f''(x_0)$ existe en $x_0\in I$, montrer que g est différentiable en (x_0,x_0). (Appliquer Taylor Young.)
Erratum : L'indication dans le livre de Cartan est : Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x)-xf'(x_0)-\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0)$.

L'erratum est lui-même erronné... Il fallait en fait lire : "Appliquer l'inégalité des accroissements finis [...]". Sinon ce n'est valable que pour E de dimension 1.

Voici la réponse en tenant compte de l'erratum (nous dirons plus loin comment s'en sortir avec Taylor-Young). Soit $h(x)=f(x)-xf'(x_0)-\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0)$. Un calcul donne $\forall x\neq y$
$$\frac{h(x)-h(y)}{x-y}=g(x,y)-f'(x_0)-\frac{x+y-2x_0}{2}f''(x_0).$$
L'inégalité des accroissements finis donne
$$\frac{\|h(x)-h(y)\|}{x-y}\leqslant\sup_{t\in[x,y]}\|h'(t)\|.$$

Un calcul donne

$$h'(x) = f'(x) - f'(x_0) - (x - x_0)f''(x_0).$$

Or cette quantité est précisément l'erreur du développement à l'ordre 1 de f' en x_0 $\big(f'$ est dérivable en x_0, de dérivée $f''(x_0)\big)$. Il s'en suit que $h'(x) = o(x - x_0)$ quand $x \longrightarrow x_0$, c'est à dire $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta \implies \|h'(x)\| \leqslant \varepsilon|x - x_0|$. Donc si x et y appartiennent à $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ alors tout $t \in]x, y[$ y appartient aussi et donc $\|h'(t)\| \leqslant \varepsilon|t - x_0|$ et donc $\sup\limits_{t\in[x,y]} \|h'(t)\| \leqslant \varepsilon \max(|x - x_0|, |y - x_0|)$. Ainsi, en mettant tout bout à bout

$$g(x, y) = f'(x_0) + \frac{x + y - 2x_0}{2} f''(x_0) + o\big(\max(|x - x_0|, |y - x_0|)\big).$$

D'autre part si $x = y$:

$$g(x, x) = f'(x) = f'(x_0) + (x - x_0)f''(x_0) + o\big(|x - x_0|\big).$$

Or $x = y \implies \dfrac{x + y - 2x_0}{2} f''(x_0) = (x-x_0)f''(x_0)$. Donc $g(x, x)-\big(f'(x_0)+\dfrac{x + y - 2x_0}{2} f''(x_0)\big)$ est un $o\big(\max(|x - x_0|, |y - x_0|)\big)$ dans les deux cas $\big(x \neq y$ et $x = y\big)$. Ainsi g est différentiable en x_0 et sa différentielle est

$$(t, u) \mapsto \frac{t + u}{2} f''(x_0).$$

Voici comment on pouvait s'en sortir avec Taylor-Young. D'après Taylor Young à l'ordre 2 appliqué à f en x_0 :

$$f(x_0 + t) = f(x_0) + f'(x_0)t + f''(x_0)\frac{t^2}{2} + h(t)$$

où $h(t) = o(t^2)$ quand $t \longrightarrow 0$. D'où pour $x \neq y$:

$$\begin{aligned}
g(x_0 + t, x_0 + u) - g(x_0, x_0) &= \frac{f(x_0) + f'(x_0)t + f''(x_0)t^2/2 + h(t)}{t - u} \\
&- \frac{f(x_0) + f'(x_0)u + f''(x_0)u^2/2 + h(u)}{t - u} - f'(x_0) \\
&= \frac{f'(x_0)(t - u) + f''(x_0)(t - u)(t + u)/2 - f'(x_0)(t - u)}{t - u} \\
&+ \frac{h(t) - h(u)}{t - u} \\
&= f''(x_0)\frac{t + u}{2} + \frac{h(t) - h(u)}{t - u}
\end{aligned}$$

Nous aimerions en déduire que $(t, u) \mapsto f''(x_0)\dfrac{t + u}{2}$ est la différentielle de g en (x_0, x_0). Il nous faut pour cela majorer le reste $\dfrac{h(t) - h(u)}{t - u}$ (et ne pas oublier de traiter également le cas $t = u$). Cette majoration n'est pas si triviale. Utilisons l'inégalité des accroissements finis : $\|\dfrac{h(t) - h(u)}{t - u}$ Comme $h(t) = f(x_0+t)-$(un polynôme de t), la fonction h est C^1 et possède une dérivée seconde en 0. Donc h' est une fonction C^0 qui possède une dérivée en 0. De plus $h'(0) = 0$ et $h''(0) = 0$. Donc $h'(t) = o(t)$. Donc

$$\frac{h(t) - h(u)}{t - u} = o\big(\max(|t|, |u|)\big).$$

Reste à traiter le cas où $x = y$, où nous procédons comme dans l'autre version : d'après Taylor Young à l'ordre 1 en x_0 pour f' :

$$g(x,x) - g(x_0,x_0) = f'(x) - f'(x_0) = f''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Remarque : la fonction h de la deuxième méthode et celle de Cartan sont quasiment les mêmes.

Remarque : il était naturel de vouloir écrire $h(t) = t^2\varepsilon(t)$ puis d'essayer de simplifier ou majorer $\dfrac{h(t) - h(u)}{t - u} = \dfrac{t^2\varepsilon(t) - u^2\varepsilon(u)}{t - u}$ mais ça ne marche pas car t et u peuvent être extrêmement proches.

Troisième méthode : avec l'astuce mentionnée dans la réponse à la question 1.a, on obtient

$$g(x,y) - g(x_0,x_0) = \int_0^1 \big(f'(tx + (1-t)y) - f'(x_0)\big)dt = \int_0^1 (tx + (1-t)y - x_0)f''(x_0)dt + \int_0^1 \text{reste}\, dt$$

Or d'une part $\displaystyle\int_0^1 (tx + (1-t)y - x_0)f''(x_0)dt = \frac{x + y - 2x_0}{2} f''(x_0)$, d'autre part le reste est une fonction de $u = tx + (1-t)y$ qui est un $o(u - x_0)$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|\text{reste}| < |u - x_0|\varepsilon$ pour tout $x, y \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ puisqu'alors $u \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. Enfin $\displaystyle\int_0^1 |u - x_0|dt$ $= \int_0^1 |tx + (1-t)y - x_0|dt = \int_0^1 |t(x - x_0) + (1-t)(y - x_0)|dt \leqslant \int_0^1 |t(x - x_0)| + \int_0^1 |(1-t)(y - x_0)|dt$ $= (|x - x_0| + |y - y_0|)/2$.

II. Extrait de l'exercice 14 de la feuille de TD

L'espace $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ est muni de la norme $||.||_\infty$ de la convergence uniforme. Soit l'application suivante définie sur E

$$\delta : f \mapsto \int_0^1 \Phi(f(t))\mathrm{d}t\ ,\ \text{où } \Phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Nous allons montrer qu'elle est de classe C^1 sur $(E, ||.||_\infty)$ et déterminer sa différentielle.

Note : Autre coquille dans l'énoncé, nous démontrerons le caractère dérivable en tout point (D^1), mais pas la continuité de la dérivée (C^1).

a. Vérifier que l'application $T : E \to \mathbb{R}$ définie par $T(h) = \int_0^1 \Phi'(f(t))h(t)dt$ est linéaire continue sur $(E, ||.||_\infty)$.

La linéarité est très facile : l'intégrale est linéaire, et la multiplication par une fonction fixée également.

Continuité : soit $M = \sup\limits_{t \in [0,1]} |\phi'(f(t))|$.

$\big[M < +\infty$ car Φ' et f sont continues et donc $t \mapsto \Phi'(f(t))$ est continue, et atteint donc son sup sur le compact $[0,1]$ inclus dans son domaine de définition.$\big]$

Alors

$$\Big|\int_0^1 \Phi'(f(t))h(t)dt\Big| \leqslant \int_0^1 M\|h\|_\infty = M\|h\|_\infty$$

b. Pour majorer l'erreur $\delta(f+h)-\delta(f)-T(h)$, commencer par transformer son expression à l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à $x \mapsto \Phi(x)$ entre $x = f(t)$ et $x = f(t)+h(t)$.

On a

$$\delta(f+h)-\delta(f)-T(h) = \int_0^1 \Big(\Phi(f(t)+h(t)) - \Phi(f(t)) - \Phi'(f(t))\Big)\, h(t)\, dt$$

D'après le TAF

$\forall t$, si $h(t) \neq 0$, alors $\dfrac{\Phi(f(t)+h(t)) - \Phi(f(t))}{h(t)} = \Phi'(u_t)$ pour un certain u_t dans l'intervalle ouvert délimité par $f(t)$ et $f(t)+h(t)$.

Donc $\Phi(f(t)+h(t)) = h(t)\Phi'(u_t)$. On peut étendre cette identité aux valeurs de t telles que $h(t) = 0$ en posant $u_t = f(t)$ dans ces cas là. Alors :

$$\delta(f+h)-\delta(f)-T(h) = \int_0^1 \Big(\Phi'(u_t) - \Phi'(f(t))\Big) h(t) dt.$$

c. Puis on majorera cette expression en utilisant le théorème de Heine (uniforme continuité sur les compacts des fonctions continues), appliqué à Φ' sur un segment soigneusement choisi.

Le segment en question doit contenir les valeurs de u_t et $f(t)$ pour tout $t \in [0,1]$. La fonction f atteint son min m et son max M, et u_t diffère d'au plus $h(t)$. Donc si $\|h\|_\infty < 1$ alors $m-1 < u_t < M+1$. Soit

$$S = [m-1, M+1].$$

D'après le théorème de Heine,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in S,\ |x-y| < \eta \implies |\Phi'(x) - \Phi'(y)| < \varepsilon.$$

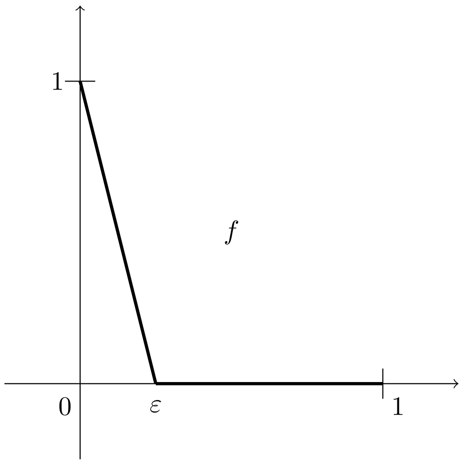
Donc, si $\|h\|_\infty < \max(1,\eta)$ alors $f(t) \in S$, $u_t \in S$ et $|\Phi'(f(t)) - \Phi'(u_t)| < \varepsilon$. D'où

$$\Big|\int_0^1 \Big(\Phi'(u_t) - \Phi'(f(t))\Big) h(t) dt\Big| \leqslant \int_0^1 \Big|\Phi'(u_t) - \Phi'(f(t))\Big| h(t) dt \leqslant \varepsilon \|h\|_\infty.$$

Partie facultative

Nous allons montrer que la plupart du temps l'application δ n'est pas différentiable sur $(E, ||.||_1)$, où $||.||_1$ est la norme de la convergence en moyenne. (i.e. $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.) Plus précisément, supposons δ différentiable pour la convergence en moyenne. Nous allons démontrer que l'application Φ est affine ($\Phi(x) = ax + b$).

d. Soit $g(t) = 1 - t : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Soit $f_\varepsilon(t)$ la fonction valant $g(t/\varepsilon)$ sur $[0, \varepsilon]$ et 0 sur $[\varepsilon, 1]$. Dessiner son graphe. Soit $x \in \mathbb{R}$. Trouver une relation entre $\delta(xf_\varepsilon)$ et $\delta(xg)$. (Ne pas se faire piéger par les notations : xg désigne l'application de $[0, 1] \to \mathbb{R}$ qui $t \mapsto xg(t)$.)



$\delta(xf_\varepsilon) \ = \int_0^1 \Phi(xf_\varepsilon(t))dt \ = \int_0^\varepsilon \Phi(xg(t/\varepsilon))dt + \int_\varepsilon^1 \Phi(0)dt \ = \int_0^1 \Phi(xg(u))\varepsilon du + (1-\varepsilon)\Phi(0)$ d'où

$$\delta(xf_\varepsilon) = \varepsilon\delta(xg) + (1-\varepsilon)\Phi(0).$$

e. À l'aide de cette relation et en faisant tendre ε vers 0, démontrer que si l'on suppose δ différentiable en 0 pour la convergence en moyenne, alors $x \mapsto \delta(xg)$ est affine.

Supposons donc δ différentiable en 0 pour la convergence en moyenne. C'est à dire qu'il existe un opérateur linéaire continu $L : (C^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_1) \to \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon(\eta)$ tels que

$$\big|\delta(f) - \delta(0) - L(f)\big| \leqslant \varepsilon(\|f\|_1) \text{ et } \varepsilon(\eta) \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Alors comme $\|xf_\varepsilon\|_1 = x\varepsilon/2 \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, on a

$$\delta(xf_\varepsilon) - \delta(0) - xL(f_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{=} o(\varepsilon)$$

En substituant l'expression trouvée en d. ainsi que l'identité $\delta(0) = \Phi(0)$ on obtient après simplification

$$(\delta(xg) - \Phi(0))\varepsilon - xL(f_\varepsilon) = o(\varepsilon).$$

Donc

$$\delta(xg) - \Phi(0) - x\frac{L(f_\varepsilon)}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{1}$$

Dans le cas particulier $x = 1$ on en déduit que $\dfrac{L(f_\varepsilon)}{\varepsilon}$ possède une limite pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ (qui est égale par à $\delta(g) - \Phi(0)$). Notons-là $a \in \mathbb{R}$. Alors en utilisant à nouveau le développement (1) :

$$\delta(xg) = \Phi(0) + ax.$$

f. En déduire que l'application Φ est affine.

Ainsi il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 \Phi(xg(t))dt = ax + b$. Or, rappelons-nous que $g(t) = 1 - t$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^1 \Phi((1-t)x)dt = ax + b.$$

Et avec un changement de variable $u = (1-t)x$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax + b = \int_x^0 \Phi(u) \frac{-1}{x} du = \frac{1}{x} \int_0^x \Phi(u)du,$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x \Phi(u)du = ax^2 + bx.$$

Si deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ont la même primitive alors elles sont égales. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = 2ax + b.$$