Université Paul Sabatier — année 2011/2012
Cours d'algèbre — L3, 1er semestre

Devoir

À rendre au plus tard le 24 octobre — Auteur : Arnaud Chéritat.

Idéaux maximaux de quelques anneaux de polynômes.

Les questions marquées d'un astérisque sont plus difficiles mais pas facultatives.

I. $\mathbb{C}[X]$

On rappelle qu'un anneau principal est un anneau *intègre* dont tout idéal est principal.

a. * Démontrer que dans un anneau principal qui n'est pas un corps, l'idéal $I = \langle x \rangle$ est maximal si et seulement si x est irréductible.

b. Décrire l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X]$ et montrer qu'il est en bijection avec $\mathbb{C}$.

II. $\mathbb{C}[X, Y]$

Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ fixé. On rappelle que la fonction d'évaluation $\Phi : \mathbb{C}[X, Y] \to \mathbb{C}$ qui à $P \mapsto P(x, y)$ est un morphisme d'anneaux.

a. Démontrer que son noyau est un idéal maximal de $\mathbb{C}[X, Y]$.

b. * Démontrer qu'il est l'idéal engendré par $(X - x)$ et $(Y - y)$.

c. Démontrer que si $(x, y) \neq (x', y')$ alors les noyaux des morphismes d'évaluation correspondants sont différents.

Soit I un idéal maximal de $\mathbb{C}[X, Y]$.

d. Peut-il exister deux valeurs différentes de $x \in \mathbb{C}$ telles que $X - x \in I$?

e. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{C}$ sauf peut-être un, il existe $P_x \in \mathbb{C}[X, Y]$ tel que $(X - x)P_x - 1 \in I$.

f. * On rappelle que $\mathbb{C}$ est indénombrable. Démontrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel qu'une infinité de P_x ont degré $\leqslant d$.[1]

g. En déduire qu'il existe une combinaison linéaire à coefficients complexes et non triviale des P_x qui égale le polynôme nul dans $\mathbb{C}[X, Y]$.

Les anneaux $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}[Y]$ peuvent être naturellement considérés comme des sous-anneaux de $\mathbb{C}[X, Y]$.

h. * En déduire que $I \cap \mathbb{C}[X]$ est non réduit à $\{0\}$.

i. L'anneau $\mathbb{C}[X]/(I \cap \mathbb{C}[X])$ est-il intègre ?

j. En déduire que $I \cap \mathbb{C}[X] = (X - x)\mathbb{C}[X]$ pour un certain $x \in \mathbb{C}$.

De même, $I \cap \mathbb{C}[Y] = (Y - y)\mathbb{C}[Y]$ pour un certain $y \in \mathbb{C}$.

k. En déduire que I contient le noyau du morphisme d'évaluation en (x, y) et conclure.

---

1. Le degré d'un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X, Y]$ peut être défini comme le maximum des degrés de ses monômes, le monôme $x^n y^m$ ayant pour degré $m + n$.