Université Paul Sabatier
Cours d'algèbre

année 2011/2012
L3, 1er semestre

Corrigé

Auteur : Arnaud Chéritat.

Idéaux maximaux de quelques anneaux de polynômes.

Les questions marquées d'un astérisque sont plus difficiles mais pas facultatives.

I. $\mathbb{C}[X]$

On rappelle qu'un anneau principal est un anneau *intègre* dont tout idéal est principal.

a. * Démontrer que dans un anneau principal qui n'est pas un corps, l'idéal $I = \langle x \rangle$ est maximal si et seulement si x est irréductible.

$\Longrightarrow$: Si x était inversible alors on aurait $\langle x \rangle = A$ qui n'est pas maximal par définition. Donc x est non-inversible. Soient $a, b \in A$ tels que $x = ab$. Comme $\langle x \rangle$ est maximal, et comme $\langle x \rangle = xA = abA \subset aA = \langle a \rangle$, l'idéal $\langle a \rangle$ est soit égal à A soit égal à $\langle x \rangle$. Dans le premier cas, $1 \in \langle a \rangle$ donc 1 est multiple de a donc a est inversible. Dans le second cas, on en déduit que $a \in \langle x \rangle$ et donc $a = xc$ pour un certain $c \in A$. Donc $x = ab = xcb$. Or A est intègre (cela fait partie de la définition d'un anneau principal) et x est non nul car si $\{0\}$ était un idéal maximal alors A serait un corps (car A est isomorphe à $A/\{0\}$ qui serait un corps par maximalité de $\{0\}$), ce que l'énoncé exclut par hypothèse. Donc $1 = cb$. Donc b est inversible. Ainsi toute décomposition de x fait intervenir un inversible.

Il y a des variantes utilisant le fait que tout idéal maximal est premier.

$\Longleftarrow$: D'une part si $\langle x \rangle = A$ alors $1 \in \langle x \rangle$ donc x est inversible, ce qui n'est pas le cas. Donc $I \neq A$. D'autre part pour tout idéal J contenant I strictement, alors comme A est principal, l'idéal $J = \langle z \rangle$ pour un certain $z \in A$. Donc $x \in I \subset J = zA$ donc $x = za$ pour un certain $a \in A$. Comme x est irréductible, z ou a est inversible. Si a était inversible, on aurait $xA = zA$ donc $I = J$, or on a supposé le contraire. C'est donc z qui est inversible. Donc $J = A$.

b. Décrire l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X]$ et montrer qu'il est en bijection avec $\mathbb{C}$.

Comme $\mathbb{C}[X]$ est algébriquement clos, tout polynôme non constant est produit de facteurs de degré 1 et donc les polynômes irréductibles sont ceux de degré 1. Un tel polynôme s'écrit $\lambda(X - x)$ avec $\lambda, x \in \mathbb{C}$ et $\lambda \neq 0$ et engendre le même idéal que $(X - x)$.

Pour deux x distincts, les idéaux $(X-x)$ sont distincts : $X-x'$ n'appartient pas à $\langle X-x\rangle$ sinon la différence $(X-x')-(X-x) = x-x'$, qui est inversible, appartiendrait à $\langle X-x\rangle$, or $x-x'$ est un inversible de $\mathbb{C}[X]$ donc $\langle X-x\rangle = A$ or on a montré que ce n'est pas le cas. Une autre façon de le voir est de dire que $X-x$ engendre l'idéal des polynômes qui s'annulent en x, et que $X-x'$ ne s'annule pas en x.

Conclusion : les idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X]$ sont les $\langle X-x\rangle$ pour $x \in \mathbb{C}$ et pour deux valeurs distinctes de x, ils sont distincts.

II. $\mathbb{C}[X,Y]$

Soit $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ fixé. On rappelle que la fonction d'évaluation $\Phi : \mathbb{C}[X,Y] \to \mathbb{C}$ qui à $P \mapsto P(x,y)$ est un morphisme d'anneaux.

a. Démontrer que son noyau est un idéal maximal de $\mathbb{C}[X,Y]$.

Rappelons que l'idéal I de l'anneau A est maximal ssi A/I est un corps. Comme Φ est surjectif (Φ est l'identité sur $\mathbb{C}$) son image est isomorphe au quotient de $\mathbb{C}[X,Y]$ par son noyau. Comme sont $\mathbb{C}$ est un corps, le noyau est maximal.

b. * Démontrer qu'il est l'idéal engendré par $(X-x)$ et $(Y-y)$.

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ peut se décomposer de façon unique comme une combinaison $\mathbb{C}$-linéaire de monômes $(X-x)^m(Y-y)^n$ (ça peut se déduire du cas $(x,y) = (0,0)$ en effectuant un changement de variable $\mathbb{C}[X,Y] \to \mathbb{C}[X,Y] : P(X,Y) \mapsto P(X+x, Y+y)$ qui est un isomorphisme d'anneaux). Si $(m,n) \neq (0,0)$ alors ce monôme s'envoie sur 0 par le morphisme d'évaluation Φ. Donc $\phi(P) = 0$ ssi le terme faisant intervenir $(m,n) = (0,0)$ est nul. Auquel cas P est bien somme de monômes qui sont multiples soit de $(X-x)$ soit de $(Y-y)$ (ces deux cas n'étant pas disjoints). Donc le noyau de Φ est contenu dans $I = (X-x)\mathbb{C}[X,Y] + (Y-x)\mathbb{C}[X,Y]$. Réciproquement tout polynôme de I s'annule en (x,y) et donc est dans le noyau.

c. Démontrer que si $(x,y) \neq (x',y')$ alors les noyaux des morphismes d'évaluation correspondants sont différents.

En effet si $(x,y) \neq (x',y')$ alors soit $x \neq x'$ soit $y \neq y'$. Si $x \neq x'$ alors le polynôme $X-x$ appartient au noyau de Φ mais pas de Φ' car $\Phi'(X-x) = x'-x \neq 0$. Le cas $y \neq y'$ est analogue.

Soit I un idéal maximal de $\mathbb{C}[X,Y]$.

d. Peut-il exister deux valeurs différentes de $x \in \mathbb{C}$ telles que $X-x \in I$?

Non car si $X-x' \in I$ et $X-x \in I$ avec $x \neq x'$ alors $(X-x')-(X-x) = x-x' \in I$ et donc I contient un élément inversible de l'anneau et donc $I = \mathbb{C}[X,Y]$ n'est pas maximal.

e. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{C}$ sauf peut-être un, il existe $P_x \in \mathbb{C}[X,Y]$ tel que $(X-x)P_x - 1 \in I$.

On a vu qu'il y a au plus un x tel que $X - x \in I$. Pour tout x différent de cette valeur, $X - x \notin I$. Notons $A = \mathbb{C}[X,Y]$.
Variante 1 : passons au quotient par I et notons $\phi : A \to A/I$. Alors $X - x \notin I$ équivaut à $\phi(X-x) \neq 0$ et donc il est inversible car A/I est un corps car I est maximal. Donc il existe P_x tel que $\phi(P_x)\phi(X-x) = 1$, autrement dit $\phi((X-x)P_x - 1) = 0$ c.à.d. $(X-x)P_x - 1 \in I$.
Variante 2 : comme I est maximal et $I + (X-x)A$ est un idéal strictement plus grand que I, il égale A. En particulier $1 \in I + (X-x)A$, c'est à dire $\exists P_x \in A$ et $Q \in I$ tel que $1 = Q + (X-x)P_x$. Donc $(X-x)P_x - 1 \in I$.

f. * On rappelle que $\mathbb{C}$ est indénombrable. Démontrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel qu'une infinité de P_x ont degré $\leqslant d$.[1]

Notons que pour deux valeurs distinctes de x, les P_x ne peuvent pas être égaux : en effet $((X-x')P_{x'} - 1) - ((X-x)P_x - 1) \in I$ or si $P_x = P_{x'}$ alors cet élément est égal à $(x-x')P_x$. Donc $P_x \in I$ donc comme $(X-x)P_x - 1 \in I$, il s'en suit que $1 \in I$ donc $I = A$ donc I n'est pas maximal. Les P_x forment donc un ensemble indénombrable. Pour répondre à la question posée nous procédons alors par l'absurde. Si pour chaque degré il n'y avait qu'un nombre fini de P_x ayant ce degré, alors les P_x formeraient un ensemble dénombrable car union dénombrable d'ensembles finis.

g. En déduire qu'il existe une combinaison linéaire à coefficients complexes et non triviale des P_x qui égale le polynôme nul dans $\mathbb{C}[X,Y]$.

L'ensemble des polynômes dans $\mathbb{C}[X,Y]$ de degré $\leqslant d$ forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Une famille infinie est donc liée.

Les anneaux $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}[Y]$ peuvent être naturellement considérés comme des sous-anneaux de $\mathbb{C}[X,Y]$.

h. * En déduire que $I \cap \mathbb{C}[X]$ est non réduit à $\{0\}$.

Variante 1 : Écrivons la relation $\sum_{i=1}^k \lambda_i P_{x_i} = 0$ avec $k \geqslant 1$, $\lambda_i \neq 0$ et les x_i distincts. Multiplions-là par $\prod_{i=0}^k (X - x_i)$. On obtient

$$\sum_i \lambda_i \Big(\prod_{j \neq i} (X - x_j) \Big) (X - x_i) P_{x_i} = 0$$

Donc

$$\sum_i \lambda_i \Big(\prod_{j \neq i} (X - x_j) \Big) \in I.$$

1. Le degré d'un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X,Y]$ peut être défini comme le maximum des degrés de ses monômes, le monôme $x^n y^m$ ayant pour degré $m+n$.

(Il y a deux façons de le voir : soit on passe modulo I et alors P_{x_i} est un inverse de $(X-x_i)$ modulo I. Soit on soustrait le membre de gauche de la ligne du bas aux deux membres de la ligne du haut et on reconnaît un combinaison à coefficients polynomiaux des $(X-x_i)P_{x_i}-1$, qui est donc dans I.)
Notons que le polynôme $Q=\sum_i \lambda_i\Big(\prod_{j\neq i}(X-x_j)\Big)$ ne dépend que de X, et est non nul car par exemple $Q(x_1)=\lambda_1\prod_{j\neq 1}(x_1-x_j)\neq 0$. Ainsi on a trouvé un élément non nul Q de $I\cap\mathbb{C}[X]$.

i. L'anneau $\mathbb{C}[X]/(I\cap\mathbb{C}[X])$ est-il intègre ?

Oui car il est isomorphe à l'image de $\mathbb{C}[X]$ par le morphisme de $\mathbb{C}[X,Y]$ vers $\mathbb{C}[X,Y]/I$, or ce dernier est intègre car c'est un corps car I est maximal.

Notons qu'implicitement, l'énoncé reconnaît que $I\cap\mathbb{C}[X]$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

j. En déduire que $I\cap\mathbb{C}[X]=(X-x)\mathbb{C}[X]$ pour un certain $x\in\mathbb{C}$.

N'oublions pas que $\mathbb{C}[X]$ est un anneau principal. Donc $I\cap\mathbb{C}[X]=P\mathbb{C}[X]$ pour un certain $P\in\mathbb{C}[X]$. Comme $I\cap\mathbb{C}[X]\neq\{0\}$, le polynôme P est non nul. Comme $1\notin I$, le polynôme P est de degré au moins 1. D'autre part s'il était de degré plus grand, il serait réductible : $P=AB$ avec $A,B\in\mathbb{C}[X]$ et de degrés $\geqslant 1$. Donc A et B ont un degré $<\deg P$. Donc ni A ni B sont dans l'idéal engendré par P, donc $\mathbb{C}[X]/P\mathbb{C}[X]$ ne serait pas intègre car AB serait nul modulo P mais ni A ni B. Ainsi $P=\lambda(X-x)$ avec $\lambda,x\in\mathbb{C}$ et $\lambda\neq 0$. Ainsi $I\cap\mathbb{C}[X]=P\mathbb{C}[X]=\lambda(X-x)\mathbb{C}[X]=(X-x)\mathbb{C}[X]$.

De même, $I\cap\mathbb{C}[Y]=(Y-y)\mathbb{C}[Y]$ pour un certain $y\in\mathbb{C}$.

k. En déduire que I contient le noyau du morphisme d'évaluation en (x,y) et conclure.

Comme I contient $(X-x)$ et $(Y-y)$, il contient bien l'idéal engendré par ces deux éléments, dont on a vu qu'il était le noyau J du morphismeΦ d'évaluation en (x,y). Or J est maximal, et I est supposé maximal. Donc $I=J$.

Conclusion : les idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X,Y]$ sont les noyaux des morphismes d'évaluation, c'est à dire les $(X-x)\mathbb{C}[X,Y]+(Y-y)\mathbb{C}[X,Y]$ où $(x,y)\in\mathbb{C}^2$. De plus on a vu que pour une paire de points distincts de $\mathbb{C}^2$, ces idéaux sont distincts.