

INTRODUCTION AUX FONCTIONS SPLINES

HERY Sophie et LACAZE Marion

Sous la direction de : Jean – Paul CALVI
Laboratoire Emile Picard
Bureau 241 Bâtiment 1R2
Université Paul Sabatier
31062 TOULOUSE Cedex 04
Tel. : 05.61.55.76.66
calvi@picard.ups – tlse.fr

Table des matières

1	Interpolation de Lagrange-Hermite	5
1.1	Rappels sur les polynômes	5
1.2	Polynôme de Lagrange-Hermite	5
1.3	Interpolation de Fejer-Hermite	8
1.4	Exemples :	11
1.5	Commentaires sur les résultats	13
2	Étude des fonctions splines	15
2.1	Rappels sur les fonctions de classe C^k	15
2.2	Définition des fonctions monômiales tronquées	16
2.3	Définition des fonctions splines	17
2.4	Base de $S_m(x_1, \dots, x_k)$	19
3	Splines cubiques d'interpolation	23
3.1	Définition du problème	23
3.2	Étude des conditions	23
3.3	Résolution des systèmes tridiagonaux	28
3.4	Exemples :	30
3.5	Commentaires sur les résultats	33

Préface

Dans ce mémoire, nous allons traiter de l'approximation d'une fonction f dont on ne connaît les valeurs et celles de ses dérivées successives qu'en certains points. Plus précisément, étant donnés k couples $(x_i, f(x_i))$, $\forall i = 1, \dots, k$, le problème consiste à trouver une fonction P telle que

$$P^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, k, \forall j = 0, \dots, n_i - 1$$

où les $f(x_i)$ sont des valeurs données et les $n_i \in \mathbf{N}$ tels que $f^{(n_i-1)}(x_i)$ existent. Nous considérerons deux approches différentes : l'approximation par des polynômes d'interpolation et l'approximation par des fonctions splines d'interpolation, les fonctions splines n'étant pas des fonctions polynômiales mais des fonctions polynômiales par morceaux.

L'interpolation a pour but de remplacer une fonction f donnée par une fonction plus simple en vue d'un calcul numérique, par exemple, un calcul d'intégrale, de dérivée ou simplement pour obtenir une représentation graphique approchée de la fonction f .

Pour illustrer l'interpolation polynômiale, nous étudierons l'interpolation de Lagrange-Hermite, et en particulier, le cas de Fejer-Hermite (où seules les dérivées premières rentrent en jeu), puis pour l'interpolation polynômiale par morceaux, le cas des fonctions splines cubiques.

Les mathématiques utilisés font appel à l'algèbre linéaire élémentaire, la théorie algébrique élémentaire des polynômes, le calcul différentiel d'une fonction à une variable.

Chapitre 1

Interpolation de Lagrange-Hermite

1.1 Rappels sur les polynômes

Une fonction polynômiale est une combinaison linéaire de monômes. Si f est une fonction polynômiale non nulle, il existe un unique $n \in \mathbf{N}$ et un unique $(n+1)$ -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^*$ tel que $\forall t \in \mathbf{R}$, on ait $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$. Dans ce cas-là, n est appelé le degré de f . Dans le cas où $f \equiv 0$, on dit que $\deg f = -\infty$.

On a les propriétés suivantes :

Si P, Q sont des polynômes on a :

- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(P + Q) \leq \sup \{ \deg(P), \deg(Q) \}$
- Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P + Q) = \sup \{ \deg(P), \deg(Q) \}$

En particulier, l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ est un espace-vectoriel de dimension $n + 1$. On le note $\mathbf{R}_n[\mathbf{X}]$.¹

1.2 Polynôme de Lagrange-Hermite

Définition : Soient $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ un ensemble de k réels distincts et pour chaque $1 \leq i \leq k$, un entier $n_i \geq 1$. Étant donnée une fonction f pour laquelle la dérivée $f^{(n_i-1)}(x_i)$ existe (en particulier, les dérivées précédentes existent et sont définies dans un voisinage de x_i), on cherche un polynôme P vérifiant les

¹ $\mathbf{R}_n[\mathbf{X}]$ est un espace vectoriel : démontrons que $\lambda P \in \mathbf{R}_n[\mathbf{X}]$ et $P + Q \in \mathbf{R}_n[\mathbf{X}]$

- $\begin{cases} \deg \lambda P = \deg P & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \deg \lambda P = -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$
- et comme on a toujours $-\infty \leq \deg P$ alors si $\deg P \leq n$ on a $\deg \lambda P \leq n \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$

- $\deg(P + Q) \leq \max \{ \deg P, \deg Q \}$ donc si $\deg P \leq n$ et $\deg Q \leq n$ alors $\deg(P + Q) \leq n$
Sa base canonique est $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$.

conditions suivantes :

$$P^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad \forall 0 \leq j \leq n_i - 1, \quad \forall 1 \leq i \leq k. \quad (1.1)$$

On impose $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ conditions, donc si on veut l'unicité en général, on doit chercher un polynôme de degré $d = n_1 + n_2 + \dots + n_k - 1$. On a effectivement :

Théorème 1. *Il existe un et un seul polynôme P de degré d vérifiant les conditions (1.1)*

Ce polynôme est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite.

Exemples :

- 1) Si $n_i = 1 \quad \forall i$, on retrouve le polynôme d'interpolation de Lagrange.
- 2) Si $k = 1$, $n_1 = n$, les conditions sont :

$$\begin{aligned} P(x_1) &= f(x_1), \\ P'(x_1) &= f'(x_1), \\ &\vdots \\ P^{(n-1)}(x_1) &= f^{(n-1)}(x_1). \end{aligned}$$

On retrouve le polynôme de Taylor à l'ordre $n - 1$:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_1)}{j!} \times (x - x_1)^j.$$

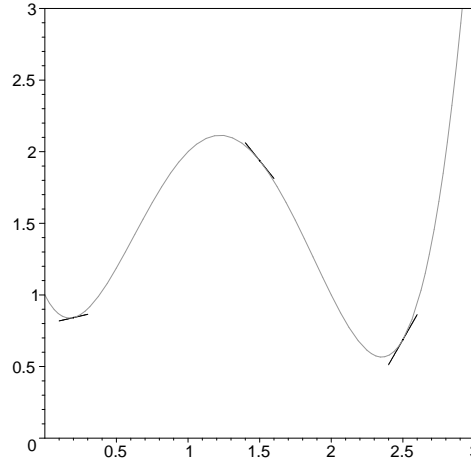
Les polynômes de Taylor et de Lagrange sont donc deux cas particuliers de Lagrange-Hermite.

Illustration géométrique des conditions lorsque $n_i = 2 \quad \forall i$:

C'est le cas particulier considéré en détail plus loin sous le nom d'interpolation de Fejer-Hermite.

Se donner $P(x_i)$ et $P'(x_i)$ revient à se donner la tangente du graphe de P au point x_i . (Rappelons l'équation de la tangente $y = P'(x_i) \times (x - x_i) + P(x_i)$)

Dans ce cas, le problème posé revient à chercher un polynôme dont on a imposé les tangentes.



Démonstration. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{R}_d[\mathbf{X}] &\longrightarrow \mathbf{R}^{d+1} \\ P &\longmapsto (P(x_1), P'(x_1), \dots, P^{(n_1-1)}(x_1), \dots, P(x_k), \dots, P^{(n_k-1)}(x_k)) \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que φ est linéaire ($\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$). Cela provient de la linéarité de la dérivation :

$$(f + g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)} \quad \text{et} \quad (\lambda f)^{(k)} = \lambda f^{(k)}$$

Pour montrer l'existence et l'unicité du polynôme P du théorème, il suffit de montrer que φ est bijective. Ici pour montrer φ bijective, il suffit de démontrer que $\text{Ker } \varphi = \{0\}$. (Attention : En général, si $\text{Ker } \varphi = \{0\}$, on peut seulement dire que φ est injective, mais comme ici la dimension de l'espace de départ est égale à la dimension de l'espace d'arrivée, on a φ bijective $\iff \varphi$ injective $\iff \varphi$ surjective).

Déterminons donc $\text{Ker } \varphi$: Soit $P \in \text{Ker } \varphi$ alors $\varphi(P) = (0)$ donc en particulier $P(x_1) = 0, P'(x_1) = 0, \dots, P^{(n_1-1)}(x_1) = 0$ donc x_1 est une racine multiple d'ordre $\geq n_1$. On peut donc factoriser le polynôme P par $(x - x_1)^{n_1}$, on a alors $P(x) = (x - x_1)^{n_1}Q(x)$ avec $\deg Q \leq d - n_1$.

En utilisant le fait que $P(x_2) = 0, P'(x_2) = 0, \dots, P^{(n_2-1)}(x_2) = 0$, on peut déduire $P(x) = (x - x_2)^{n_2}R(x)$. Or les polynômes $(x - x_1)^{n_1}$ et $(x - x_2)^{n_2}$ sont premiers entre eux car le seul polynôme irréductible qui divise $(x - x_1)^{n_1}$ est $(x - x_1)$ et, de la même manière, le seul polynôme irréductible qui divise $(x - x_2)^{n_2}$ est $(x - x_2)$. Or x_1 et x_2 sont distincts donc $(x - x_1) \neq (x - x_2)$. On peut alors écrire $P(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2}T(x)$

En continuant on arrive à :

$$P(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_k)^{n_k} S(x)$$

Déterminons le degré de S : on a $\deg P \leq d$.

$$\Rightarrow d \geq n_1 + n_2 + \dots + n_k + \deg S$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow d \geq (d+1) + \deg S \\
&\Rightarrow \deg S = -\infty \\
&\Rightarrow S = 0 \\
&\Rightarrow P = 0
\end{aligned}$$

□

Pour calculer les polynômes d'interpolation de Lagrange-Hermite, il existe une méthode générale, celle des différences divisées, que nous n'étudierons pas car elle nous entraînerait trop loin. Néanmoins, nous chercherons des polynômes d'interpolation par la méthode de Fejer-Hermite, moins globale puisqu'elle se restreint au cas où $n_i = 2$.

1.3 Interpolation de Fejer-Hermite

Définition : Soient k réels x_i , pour $i = 1, \dots, k$. Posons, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i) \text{ et } l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j}.$$

l_i est l'unique polynôme de degré k tel que $l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Théorème 2. On a l'égalité suivante :

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j} = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_i)} \frac{1}{x - x_i}, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Démonstration. Pour $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
l_i(x) &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j} \\
&= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (x - x_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{1}{x_i - x_j} \\
&= \frac{\omega(x)}{x - x_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{1}{x_i - x_j}
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\omega'(x) &= (x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_k) + (x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_k) \\ &\quad + \dots + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^k (x - x_l)\end{aligned}$$

donc $\forall i = 1, \dots, k$, $\omega'(x_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (x_i - x_j)$.

On a bien $\forall i = 1, \dots, k$, $l_i(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_i)} \frac{1}{x - x_i}$. □

Définition : Soient $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, un ensemble de k réels distincts et une fonction f définie et dérivable en ces points. On cherche un unique polynôme $P \in \mathbf{R}_{2k-1}[\mathbf{X}]$ tel que

$$\forall i = 1, \dots, k \quad , \quad \begin{cases} P(x_i) = f(x_i) \\ P'(x_i) = f'(x_i) \end{cases}$$

Ce polynôme est appelé le polynôme d'interpolation de Fejer-Hermite.

Théorème 3. *Le polynôme $P \in \mathbf{R}_{2k-1}[\mathbf{X}]$ vérifiant les conditions*

$$\forall i = 1, \dots, k \quad , \quad \begin{cases} P(x_i) = f(x_i) \\ P'(x_i) = f'(x_i) \end{cases} \quad \text{est donné par :}$$

$$P(x) = \sum_{i=1}^k f(x_i)A_i(x) + \sum_{i=1}^k f'(x_i)B_i(x)$$

avec $A_i(x) = [1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(x - x_i)]l_i^2(x)$ et $B_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x)$, des polynômes.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, il nous suffit de vérifier les trois conditions qui sont :

1. $P \in \mathbf{R}_{2k-1}[\mathbf{X}]$ (i.e $\deg P \leq 2k - 1$).
2. $\forall 1 \leq i \leq k$, $P(x_i) = f(x_i)$.
3. $\forall 1 \leq i \leq k$, $P'(x_i) = f'(x_i)$.

1- Si $P(x) = \sum_{i=1}^k f(x_i)A_i(x) + \sum_{i=1}^k f'(x_i)B_i(x)$ alors d'après les propriétés sur les polynômes, on a $\deg P \leq \max_{1 \leq i \leq k} \{\deg A_i, \deg B_i\}$.

Calculons donc le degré de A_i et le degré de B_i :

$\deg(l_i) = k - 1$ donc $\deg(l_i^2) = 2(k - 1) = 2k - 2$ et $\deg(1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(x - x_i)) = 1$.

Comme $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$, on a $\deg(A_i) = 1 + 2k - 2 = 2k - 1$.

De même, $\deg(B_i(x)) = \deg(x - x_i) + \deg(l_i^2(x)) = 1 + 2k - 2 = 2k - 1$.

On a bien $\deg P \leq 2k - 1$.

2- Vérifions maintenant que $\forall 1 \leq i \leq k$, $P(x_i) = f(x_i)$.

Soit $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ quelconque. Montrons que $P(x_{i_0}) = f(x_{i_0})$.

$$P(x_{i_0}) = \sum_{i=1}^k f(x_i)A_i(x_{i_0}) + \sum_{i=1}^k f'(x_i)B_i(x_{i_0})$$

Distinguons 2 cas :

- $i = i_0$:

$$A_i(x_{i_0}) = A_{i_0}(x_{i_0}) = \left[1 - \frac{\omega''(x_{i_0})}{\omega'(x_{i_0})}(x_{i_0} - x_{i_0})\right]l_{i_0}^2(x_{i_0}) = l_{i_0}^2(x_{i_0}) = 1 \text{ et}$$

$$B_i(x_{i_0}) = B_{i_0}(x_{i_0}) = (x_{i_0} - x_{i_0})l_{i_0}^2(x_{i_0}) = 0$$

- $i \neq i_0$: Dans ce cas, $l_i(x_{i_0}) = 0$ donc $A_i(x_{i_0}) = 0$ et $B_i(x_{i_0}) = 0$.

Ainsi, nous obtenons $P(x_{i_0}) = f(x_{i_0})$, $\forall 1 \leq i_0 \leq k$.

3- Il nous reste à vérifier que $P'(x_{i_0}) = f'(x_{i_0})$. Pour cela, dérivons $P(x_{i_0})$.

$$P'(x_{i_0}) = \sum_{i=1}^k f(x_i)A'_i(x_{i_0}) + \sum_{i=1}^k f'(x_i)B'_i(x_{i_0})$$

Or, $B'_i(x_{i_0}) = l_i^2(x_{i_0}) + 2(x_{i_0} - x_i)l_i(x_{i_0})l'_i(x_{i_0})$ donc si $i = i_0$, $B'_{i_0}(x_{i_0}) = l_{i_0}^2(x_{i_0}) = 1$ et si $i \neq i_0$, $B'_i(x_{i_0}) = 0$ car $l_i(x_{i_0}) = 0$.

Ceci montre que $(\sum_{i=1}^k f'(x_i)B'_i(x))|_{x=x_{i_0}} = f'(x_{i_0})$.

Si nous montrons que $(\sum_{i=1}^k f(x_i)A'_i(x))|_{x=x_{i_0}} = 0$, nous aurons démontré que $P'(x_{i_0}) = f'(x_{i_0})$.

Pour ce faire, montrons que $A'_i(x_{i_0}) = 0$.

$$A'_i(x_{i_0}) = -\frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}l_i^2(x_{i_0}) + 2\left[1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(x_{i_0} - x_i)\right]l_i(x_{i_0})l'_i(x_{i_0})$$

Si $i \neq i_0$ alors $l_i(x_{i_0}) = 0$ donc $A'_i(x_{i_0}) = 0$. Par contre si $i = i_0$, on a

$$A'_i(x_{i_0}) = A'_{i_0}(x_{i_0}) = -\frac{\omega''(x_{i_0})}{\omega'(x_{i_0})}l_{i_0}^2(x_{i_0}) + 2\left[1 - \frac{\omega''(x_{i_0})}{\omega'(x_{i_0})}(x_{i_0} - x_{i_0})\right]l_{i_0}(x_{i_0})l'_{i_0}(x_{i_0}).$$

Or $l_{i_0}(x_{i_0}) = 1$, d'où $A'_{i_0}(x_{i_0}) = -\frac{\omega''(x_{i_0})}{\omega'(x_{i_0})} + 2l'_{i_0}(x_{i_0})$.

Nous cherchons à montrer que $A'_{i_0}(x_{i_0}) = 0$:

$$\begin{aligned}
A'_{i_0}(x_{i_0}) = 0 &\iff -\frac{\omega''(x_{i_0})}{\omega'(x_{i_0})} + 2l'_{i_0}(x_{i_0}) = 0 \\
&\iff l'_{i_0}(x_{i_0}) = \frac{\omega''(x_{i_0})}{2\omega'(x_{i_0})}
\end{aligned}$$

Calculons $l'_{i_0}(x)$:

$$l_{i_0}(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_{i_0})(x-x_{i_0})} \text{ donc } l'_{i_0}(x) = \frac{1}{\omega'(x_{i_0})} \frac{\omega'(x)(x-x_{i_0}) - \omega(x)}{(x-x_{i_0})^2}$$

Pour que $l'_{i_0}(x_{i_0})$ soit bien défini, il faut que x_{i_0} soit racine double du numérateur $N(x) = \omega'(x)(x-x_{i_0}) - \omega(x)$ (i.e $N(x_{i_0}) = 0$ et $N'(x_{i_0}) = 0$).

$\omega(x_{i_0}) = 0$ donc $N(x_{i_0}) = 0$ et comme $N'(x) = \omega''(x)(x-x_{i_0}) + \omega'(x) - \omega'(x) = \omega''(x)(x-x_{i_0})$, $N'(x_{i_0}) = 0$.

Nous venons de montrer que x_{i_0} est bien racine double de N . De ce fait, on sait qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbf{R}_{k-2}[\mathbf{X}]$ tel que $N(x) = (x-x_{i_0})^2 Q(x)$ ($\deg Q = \deg N - 2$ et $\deg N \leq k$)

En dérivant N , on obtient

$$\begin{aligned}
N'(x) &= 2(x-x_{i_0})Q(x) + (x-x_{i_0})^2 Q'(x) \\
&= (x-x_{i_0})[2Q(x) + (x-x_{i_0})Q'(x)].
\end{aligned}$$

On obtient alors l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
\omega''(x)(x-x_{i_0}) &= (x-x_{i_0})[2Q(x) + (x-x_{i_0})Q'(x)] \\
\implies \omega''(x) &= 2Q(x) + (x-x_{i_0})Q'(x).
\end{aligned}$$

En particulier, pour $x = x_{i_0}$, on a $\omega''(x_{i_0}) = 2Q(x_{i_0})$ i.e $Q(x_{i_0}) = \frac{\omega''(x_{i_0})}{2}$

Comme

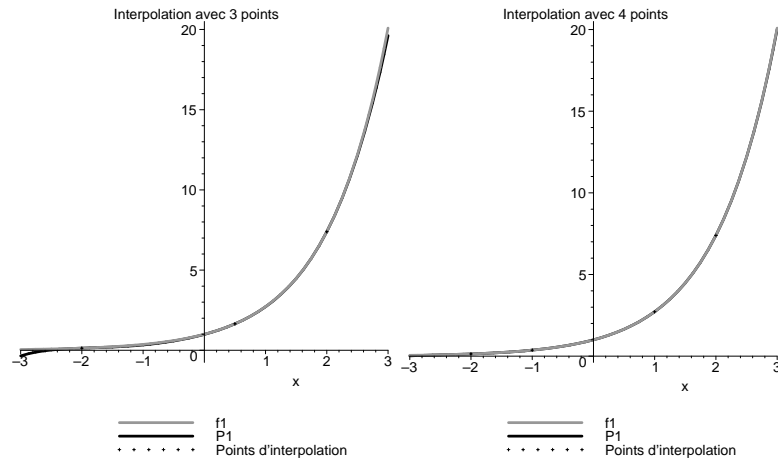
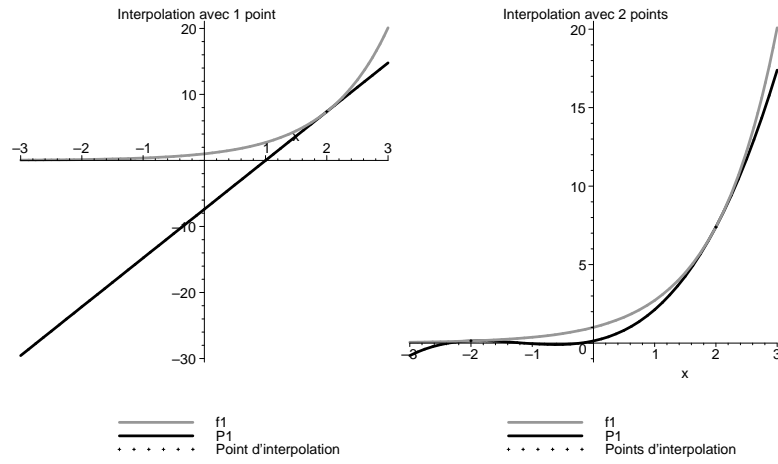
$$\begin{aligned}
l'_{i_0}(x_{i_0}) &= \frac{1}{\omega'(x_{i_0})} \frac{N(x)}{(x-x_{i_0})^2} \\
&= \frac{Q(x)}{\omega'(x_{i_0})},
\end{aligned}$$

nous avons $l'_{i_0}(x_{i_0}) = \frac{\omega''(x_{i_0})}{2\omega'(x_{i_0})}$.

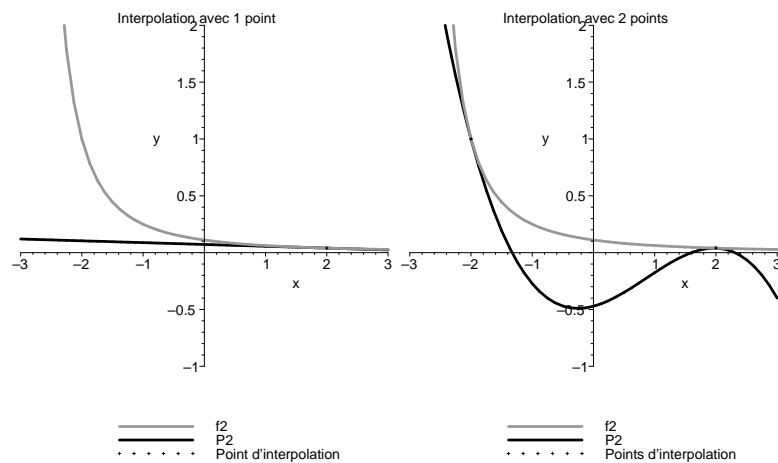
Ce qui prouve que $A'_{i_0}(x_{i_0}) = 0$, ainsi que le théorème. \square

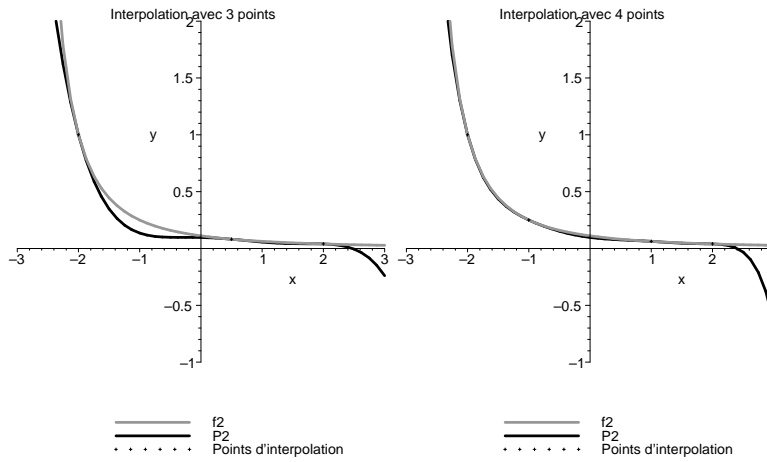
1.4 Exemples :

1. $f_1(x) = e^x$ pour $x \in [-3; 3]$

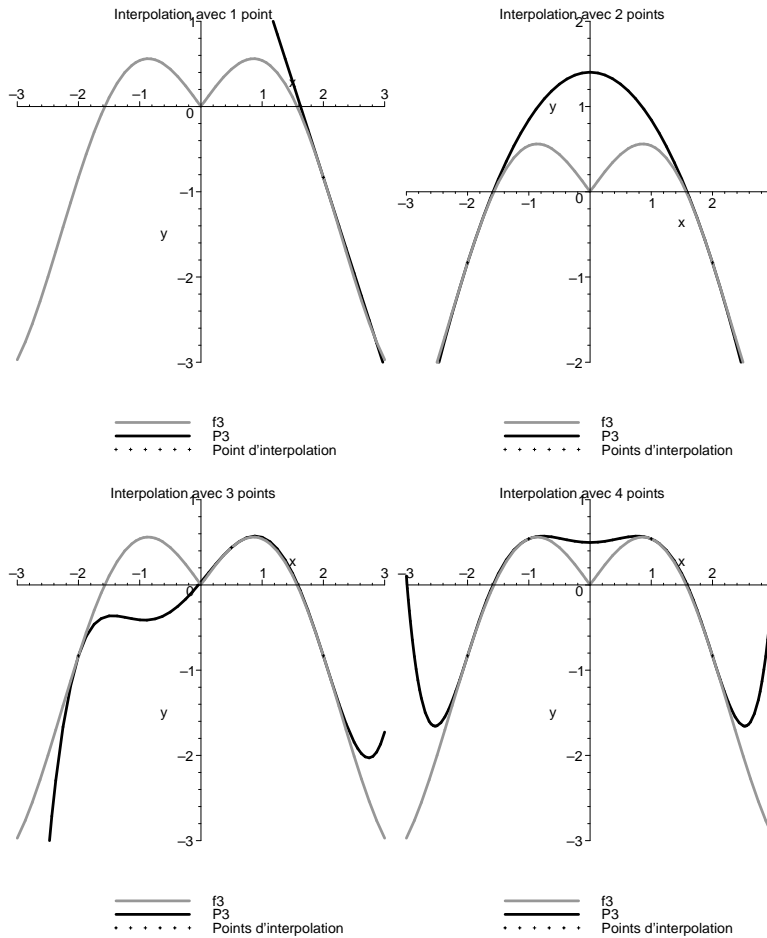


2. $f_2(x) = \frac{1}{(3+x)^2}$ pour $x \in]-3; 3]$





3. $f_3(x) = |x|\cos(x)$ pour $x \in [-3; 3]$



1.5 Commentaires sur les résultats

Interprétons les graphes :

- Lorsqu’il n’y a qu’un point d’interpolation, le degré du polynôme interpolateur est égal à 1, c’est pourquoi son graphe est la tangente de la fonction en ce point.
- Pour la fonction exponentielle, on remarque que l’approximation est très satisfaisante avec quatre points, néanmoins elle est correcte avec trois. On a l’impression que c’est surtout la position des points qui importe et non le nombre.
- Pour la fonction rationnelle, l’approximation est acceptable pour quatre points excepté sur l’intervalle $[2,3]$.
- Enfin, pour la fonction $f(x) = |x| \times \cos(x)$, il nous a fallu étudier le domaine de définition de la dérivée $f'(x)$ pour choisir les points d’interpolation. On ne peut pas prendre zéro car f' n’est pas définie en ce point. Avec le choix de nos points, l’approximation obtenue n’est pas assez précise.

Ainsi, on constate que l’interpolation polynômiale n’est pas bien adaptée à l’approximation de certaines fonctions.

Pour approcher une fonction par des polynômes, il existe d’autres méthodes, notamment celles des splines (qui sont des polynômes par morceaux) que nous allons étudier dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Étude des fonctions splines

2.1 Rappels sur les fonctions de classe C^k

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. On dit que f est dérivable sur $[a, b]$ si :

1. f est dérivable sur $]a, b[$ au sens usuel,
2. f est dérivable à droite en a i.e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{existe}$$

et on note cette limite $f'(a)$,

3. f est dérivable à gauche en b i.e

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \quad \text{existe}$$

et on note cette limite $f'(b)$.

De la même manière, on définit les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction définie sur $[a, b]$.

Définition : On dit qu'une fonction $f : E \rightarrow F$ est de classe C^n sur I ($n \in \mathbf{N}, I \subset E$) si f est n fois dérivable sur I et si sa $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}$ est continue.

C^0 désigne l'ensemble des fonctions continues et C^∞ l'ensemble des fonctions dont toutes les dérivées successives sont continues.

On a alors les inclusions suivantes :

$$C^\infty \subset \dots \subset C^{n+1} \subset C^n \subset \dots \subset C^1 \subset C^0.$$

On a les propriétés suivantes :

- Si $f, g \in C^n$ sur I alors on a :
- $f + g \in C^n$ sur I et on a $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$,
 - $\forall \alpha \in \mathbf{K}$, $\alpha f \in C^n$ sur I et $(\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}$,
 - Si $\forall t \in I$, $f(t) \neq 0$ alors $\frac{1}{f} \in C^n$ sur I .

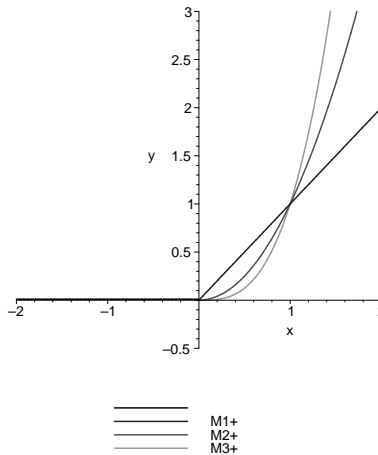
2.2 Définition des fonctions monômiales tronquées

Définition : On définit pour $m \geq 1$, la fonction

$$\mathbf{M}_m^+ : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^m & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Graphe des fonctions \mathbf{M}_1^+ , \mathbf{M}_2^+ , \mathbf{M}_3^+ :



Théorème 4. $\forall m \geq 2$, M_m^+ est dérivable et on a

$$(M_m^+)' = m(M_{m-1}^+).$$

Démonstration. $M_m^+|_{]0, +\infty[}$ est une fonction polynôme donc elle appartient à C^∞ .

$M_m^+|_{]-\infty, 0[}$ est la fonction nulle donc elle appartient à C^∞ .

On peut alors calculer les dérivées :

Sur $]0, +\infty[$, $(M_m^+)' = m(M_{m-1}^+)$ et sur $]-\infty, 0[$, $(M_m^+)' = 0 = m(M_{m-1}^+)$.

Il suffit donc d'établir la formule en 0. Autrement dit, $(M_m^+)'(0) = m(M_{m-1}^+)'(0)$

i.e $(M_m^+)'(0) = 0$.

On démontre cette formule par récurrence sur $m \geq 2$:

Initialisation : $m = 2$.

On a $M_2^+(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{M_2^+(x) - M_2^+(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{M_2^+(x) - M_2^+(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = 0$$

donc M_2^+ est dérivable sur \mathbf{R} et on a bien $(M_2^+)'(0) = 0$.

Hérédité : on suppose l'hypothèse vraie jusqu'au rang $m \geq 2$ et on la montre pour $m + 1$.

On a $M_{m+1}^+ = M_m^+ \times M_1^+$ donc M_{m+1}^+ est dérivable sur \mathbf{R} comme produit de fonctions dérivables sur \mathbf{R} .

$$(M_{m+1}^+)'(0) = (M_m^+)'(0) \times M_1^+(0) + M_m^+(0) \times (M_1^+)'(0) = 0. \quad \square$$

Théorème 5. $M_m^+ \in C^{m-1}(\mathbf{R})$, $\forall m \geq 1$.

Démonstration. Démontrons ce théorème par récurrence sur $m \geq 1$.

C'est vrai pour $m = 1$ car la fonction M_1^+ est continue (voir graphe).

Supposons maintenant que $M_m^+ \in C^{m-1}$, alors il faut montrer que $M_{m+1}^+ \in C^m$.

Or $M_{m+1}^+ \in C^m \iff (M_{m+1}^+)' \in C^{m-1}$.

D'après le théorème précédent, on a $(M_{m+1}^+)' = (m+1)M_m^+$, et comme $M_m^+ \in C^{m-1}$, on en déduit que $(M_{m+1}^+)' \in C^{m-1}$. \square

2.3 Définition des fonctions splines

Le terme anglais "spline" désigne une latte de bois flexible utilisée par les dessinateurs pour tracer une courbe passant par des points donnés.

Définition : Soient $I = [a, b]$ et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b$, une subdivision σ de $[a, b]$.

On définit

$$S_m(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \{s \in C^{m-1}([a, b]) / s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbf{R}_m[X], i = 0, \dots, k\}.$$

Les éléments de $S_m(x_1, \dots, x_k)$ s'appellent les fonctions splines d'ordre m associées à la subdivision σ .

Proposition 1. 1. $S_m(x_1, \dots, x_k)$ contient $\mathbf{R}_m[X]$.

$$2. (x \mapsto M_m^+(x - x_i)) \in S_m(x_1, \dots, x_k)$$

Démonstration. 1. évidente.

2. Pour montrer que la fonction $(M_m^+(\cdot - x_i) : t \mapsto M_m^+(t - x_i)) \in S_m(x_1, \dots, x_k)$ on doit démontrer que :

(a) $M_m^+(\cdot - x_i) \in C^{m-1}$.

(b) $M_m^+(\cdot - x_i)$ coïncide avec un polynôme de degré $\leq m$ sur chaque intervalle.

$$(a) M_m^+(x - x_i) = \begin{cases} (x - x_i)^m & \text{si } x > x_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

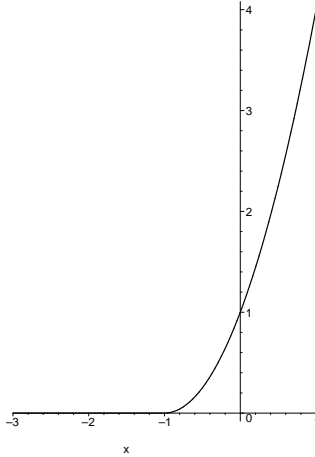
$$M_m^+(x - x_i) = (M_m^+ \circ f)(x) \text{ avec } f : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto x - x_i \end{cases}$$

$f \in C^\infty$ et $M_m^+ \in C^{m-1}$ donc $M_m^+ \circ f \in C^{m-1}$

$$(b) M_m^+(\cdot - x_i)|_{[x_l, x_{l+1}]} = \begin{cases} (\cdot - x_i)^m & \text{si } x_l \geq x_i \\ 0 & \text{si } x_l < x_i \end{cases}$$

donc dans tous les cas, on trouve un polynôme de degré $\leq m$. □

Exemple : Graphe de la fonction $M_2^+(\cdot - x_1)$ avec $x_1 = -1$ obtenu par translation de vecteur $(x_1, 0)$ à partir du graphe de M_1^+



Proposition 2. $S_m(x_1, \dots, x_k)$ est un sous-espace vectoriel de $C^{m-1}([a, b])$.

Démonstration. Par définition, on a $S_m(x_1, \dots, x_k) \subset C^{m-1}([a, b])$.

Soient $s_1, s_2 \in S_m(x_1, \dots, x_k)$ alors il faut montrer que $s_1 + s_2 \in S_m(x_1, \dots, x_k)$ et $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \lambda s_1 \in S_m(x_1, \dots, x_k)$.

Comme $s_1, s_2 \in S_m(x_1, \dots, x_k)$, $s_1, s_2 \in C^{m-1}([a, b])$ et $s_1|_{[x_i, x_{i+1}]}, s_2|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbf{R}_m[\mathbf{X}] \quad \forall i = 0, \dots, k$.

D'après les propriétés sur les classes, $s_1 + s_2 \in C^{m-1}([a, b])$ et $\lambda s_1 \in C^{m-1}([a, b])$. De plus, on a vu que $\mathbf{R}_m[\mathbf{X}]$ est un espace vectoriel donc $s_1 + s_2 \in \mathbf{R}_m[\mathbf{X}]$ et $\lambda s_1 \in \mathbf{R}_m[\mathbf{X}]$. En particulier, $(s_1 + s_2)|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbf{R}_m[\mathbf{X}]$ et $(\lambda s_1)|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbf{R}_m[\mathbf{X}]$, $\forall i = 0, \dots, k$.

On a montré que $s_1 + s_2 \in S_m(x_1, \dots, x_k)$ et $\lambda s_1 \in S_m(x_1, \dots, x_k)$. \square

2.4 Base de $S_m(x_1, \dots, x_k)$

Théorème 6. *L'ensemble des fonctions*

$$\{(t \mapsto t^l) \mid 0 \leq l \leq m, (t \mapsto M_m^+(t - x_i)) \mid 1 \leq i \leq k\}$$

forme une base de $S_m(x_1, \dots, x_k)$.

En particulier, la dimension de $S_m(x_1, \dots, x_k)$ est égale à $1 + m + k$.

Démonstration. D'après la proposition précédente on a que $\{(t \mapsto t^l) \mid 0 \leq l \leq m, (t \mapsto M_m^+(t - x_i)) \mid 1 \leq i \leq k\}$ est un sous-ensemble de $S_m(x_1, \dots, x_k)$.

Il reste à montrer que tout $s \in S_m(x_1, \dots, x_k)$ s'écrit de manière unique :

$$(*) \quad s(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i + \sum_{i=1}^k b_i M_m^+(t - x_i) \quad t \in [a, b].$$

Soit une fonction $s \in S_m(x_1, \dots, x_k)$ donnée. On pose

$$p_i(t) = s(t), \quad t \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, k$$

alors on a $p_0, \dots, p_k \in \mathbf{R}_m[X]$.

En particulier, $p_0 \in \mathbf{R}_m[X]$ donc p_0 s'écrit de manière unique :

$$p_0(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i, \quad t \in [x_0, x_1].$$

De plus, $p_0(x_1) = p_1(x_1) = s(x_1)$ et comme $s \in C^{m-1}[a, b]$, on a

$$p_1^{(i)}(x_1) = p_0^{(i)}(x_1) \quad \forall i = 0, \dots, m-1.$$

Comme $p_1 \in \mathbf{R}_m[X]$, $p_1 - p_0 \in \mathbf{R}_m[X]$, ce qui implique que $p_1 - p_0$ s'écrit de manière unique :

$$p_1(t) - p_0(t) = b_1(t - x_1)^m$$

(car x_1 racine $m^{\text{ième}}$ de $p_1 - p_0$ et $\deg(p_1 - p_0) \leq m \implies p_1(t) - p_0(t) = (t - x_1)^m Q(t)$ avec $\deg Q = \deg(p_1 - p_0) - m = 0$).

$$\text{Pour } t \in [x_0, x_2], \quad s(t) = \begin{cases} p_0(t) & \text{si } x_0 \leq t \leq x_1 \\ p_1(t) & \text{si } x_1 \leq t \leq x_2 \end{cases}$$

Par conséquent, on a $s(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m a_i t^i & \text{si } x_0 \leq t \leq x_1 \\ \sum_{i=0}^m a_i t^i + b_1(t-x_1)^m & \text{si } x_1 \leq t \leq x_2 \end{cases}$

on a alors

$$s(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i + b_1 M_m^+(t-x_1) \quad \text{si } x_0 \leq t \leq x_2.$$

De même, on a

$$p_2^{(i)}(x_2) = p_1^{(i)}(x_2) \quad \forall i = 0, \dots, m-1.$$

Comme $p_2 \in \mathbf{R}_m[X]$, $p_2 - p_1 \in \mathbf{R}_m[X]$, ce qui implique que $p_2 - p_1$ s'écrit de manière unique :

$$p_2(t) - p_1(t) = b_2(t-x_2)^m$$

(car x_2 racine $m^{\text{ième}}$ de $p_2 - p_1$ et $\deg(p_2 - p_1) \leq m \implies p_2(t) - p_1(t) = (t-x_2)^m R(t)$ avec $\deg R = \deg(p_2 - p_1) - m = 0$).

Pour $t \in [x_0, x_3]$, $s(t) = \begin{cases} p_0(t) & \text{si } x_0 \leq t \leq x_1 \\ p_1(t) & \text{si } x_1 \leq t \leq x_2 \\ p_2(t) & \text{si } x_2 \leq t \leq x_3 \end{cases}$

Par conséquent, on a $s(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m a_i t^i & \text{si } x_0 \leq t \leq x_1 \\ \sum_{i=0}^m a_i t^i + b_1(t-x_1)^m & \text{si } x_1 \leq t \leq x_2 \\ \sum_{i=0}^m a_i t^i + b_1(t-x_1)^m + b_2(t-x_2)^m & \text{si } x_2 \leq t \leq x_3 \end{cases}$

on a alors

$$s(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i + \sum_{i=1}^2 b_i M_m^+(t-x_i) \quad \text{si } x_0 \leq t \leq x_3.$$

En continuant cette méthode, on obtient finalement (*).

Montrons l'unicité de s :

Supposons que

$$\sum_{i=0}^m a_i t^i + \sum_{i=1}^k b_i M_m^+(t-x_i) = \sum_{i=0}^m a'_i t^i + \sum_{i=1}^k b'_i M_m^+(t-x_i) \quad \text{si } x_0 \leq t \leq x_{k+1}$$

et montrons que $a_i = a'_i$ et $b_i = b'_i \quad \forall i$.

D'après l'hypothèse, on a :

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{i=0}^m a_i t^i + \sum_{i=1}^k b_i M_m^+(t-x_i) - \sum_{i=0}^m a'_i t^i - \sum_{i=1}^k b'_i M_m^+(t-x_i) \quad \text{si } x_0 \leq t \leq x_{k+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\iff h(t) = \sum_{i=0}^m (a_i - a'_i) t^i + \sum_{i=1}^k (b_i - b'_i) M_m^+(t-x_i) = 0 \quad \text{si } x_0 \leq t \leq x_{k+1}.$$

Maintenant, étudions l'égalité sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, \dots, k$:

- Sur $[x_0, x_1]$, $h(t) = \sum_{i=0}^m (a_i - a'_i)t^i + \sum_{i=1}^k (b_i - b'_i)M_m^+(t - x_i) = 0$.
Or $M_m^+(t - x_l) = 0, \forall l = 1, \dots, k$ d'où $h(t) = \sum_{i=0}^m (a_i - a'_i)t^i$, ce qui implique $a_i - a'_i = 0$ donc on a montré que $a_i = a'_i \forall i$.

Maintenant, montrons que $b_i = b'_i \forall i$:

- Sur $[x_1, x_2]$, $h(t) = \sum_{i=1}^k (b_i - b'_i)M_m^+(t - x_i) = 0$.
Or $M_m^+(t - x_l) = 0, \forall l = 2, \dots, k$ et $M_m^+(t - x_1) \neq 0$ d'où $h(t) = (b_1 - b'_1)M_m^+(t - x_1)$, ce qui implique $b_1 - b'_1 = 0$.
- Sur $[x_2, x_3]$, $h(t) = \sum_{i=2}^k (b_i - b'_i)M_m^+(t - x_i) = 0$.
Or $M_m^+(t - x_l) = 0, \forall l = 3, \dots, k$ et $M_m^+(t - x_2) \neq 0$ d'où $h(t) = (b_2 - b'_2)M_m^+(t - x_2)$, ce qui implique $b_2 - b'_2 = 0$.

En continuant cette méthode sur chaque intervalle, on a :

- Sur $[x_k, x_{k+1}]$, $h(t) = (b_k - b'_k)M_m^+(t - x_k) = 0$.
Or $M_m^+(t - x_k) \neq 0$ d'où $h(t) = (b_k - b'_k)M_m^+(t - x_k)$, ce qui implique $b_k - b'_k = 0$.

On a montré que pour tout i , $a_i = a'_i$ et $b_i = b'_i$.

□

Chapitre 3

Splines cubiques d'interpolation

3.1 Définition du problème

Dans ce chapitre, on considère l'espace $S_3(x_1, \dots, x_k)$ des fonctions splines d'ordre 3 associé à la subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b$. Ce sont donc des fonctions de classe $C^2([a, b])$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est un polynôme de degré ≤ 3 . D'après le théorème 6, nous savons que S_3 est un espace de dimension $4+k$. On veut résoudre le problème d'interpolation suivant :

Problème : Étant données des valeurs $f_0, f_1, \dots, f_k, f_{k+1}$, trouver $s \in S_3(x_1, \dots, x_k)$ telle que

$$s(x_i) = f_i \quad \text{pour } i = 0, \dots, k+1.$$

Remarquons qu'on impose $k+2$ conditions donc si on veut, en général, une solution unique, il faudra rajouter 2 conditions.

3.2 Étude des conditions

Notons s_i la restriction de la fonction cherchée s à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, \dots, k$. Nous savons que s_i est un polynôme de degré ≤ 3 .

Le problème impose les conditions de raccordement suivantes :
pour $i = 1, \dots, k$,

$$\begin{aligned} s_{i-1}(x_i) &= s_i(x_i) \text{ (continuité de } s), \\ s'_{i-1}(x_i) &= s'_i(x_i) \text{ (existence et continuité de la dérivée première),} \\ s''_{i-1}(x_i) &= s''_i(x_i) \text{ (existence et continuité de la dérivée seconde).} \end{aligned}$$

Notations : On pose, pour $i = 0, \dots, k + 1$,

$$\begin{cases} s(x_i) = f_i & \text{imposée par le problème à résoudre} \\ s'(x_i) = m_i & \text{pure notation} \\ s''(x_i) = M_i & \text{pure notation} \end{cases}$$

et pour $i = 1, \dots, k + 1$, $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Lemme 1. Soient $\alpha < \beta$, deux réels. Si $P \in \mathbf{R}_3[\mathbf{X}]$, alors on a

$$P''(x) = P''(\alpha) \frac{(\beta - x)}{\beta - \alpha} + P''(\beta) \frac{(x - \alpha)}{\beta - \alpha} \quad (3.1)$$

Démonstration. Les 2 membres de l'égalité sont des polynômes de degré ≤ 1 . Pour montrer qu'ils sont égaux, il suffit de montrer qu'ils sont égaux en 2 points. Or pour $x = \beta$ et $x = \alpha$, on a l'égalité. \square

Remarque : La formule (3.1) correspond à celle de l'interpolation de Lagrange appliquée à 2 points distincts.

En effet, la formule générale pour k points x_i est :

$$P(x) = \sum_{i=1}^k f(x_i) l_i(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

et si f est une fonction polynomiale de degré $\leq k - 1$ alors f est égale à son polynôme d'interpolation de Lagrange.

Pour $k = 2$,

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_1) l_1(x) + f(x_2) l_2(x) \\ &= f(x_1) \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Nous savons que s_{i-1} est un polynôme de degré ≤ 3 donc en appliquant le lemme à s_{i-1} sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, on trouve :

$$s''_{i-1}(x) = s''_{i-1}(x_{i-1}) \frac{(x_i - x)}{h_i} + s''_{i-1}(x_i) \frac{(x - x_{i-1})}{h_i}.$$

Or, $s''_{i-1}(x_{i-1}) = s''(x_{i-1})$ et de la même manière, $s''_{i-1}(x_i) = s''(x_i)$ (parce que les fonctions se raccordent bien à chaque bout d'intervalle).

Finalement, on a la relation :

$$s''_{i-1}(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)}{h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})}{h_i}, \quad \text{pour } x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Pour trouver s_{i-1} , on intègre deux fois cette formule :

$$s_{i-1}(x) = \frac{M_{i-1}}{h_i} \frac{(x-x)^3}{h_i} + \frac{M_i}{h_i} \frac{(x-x_{i-1})^3}{6} + C_{i-1}(x - x_{i-1}) + \tilde{C}_{i-1}.$$

Nous devons donc déterminer les constantes C_{i-1} et \tilde{C}_{i-1} . Pour les déterminer nous allons utiliser les deux conditions suivantes :

$$f_{i-1} = s(x_{i-1}) = s_{i-1}(x_{i-1}) \text{ et } f_i = s(x_i) = s_{i-1}(x_i).$$

Les premières égalités sont dues au problème qu'on doit résoudre et les secondes au fait que sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ la fonction s_{i-1} coïncide avec la fonction s_i . Déterminons les constantes : en faisant $x = x_{i-1}$ puis $x = x_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} f_{i-1} = s_{i-1}(x_{i-1}) &= \frac{M_{i-1}}{h_i} \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{6} + \tilde{C}_{i-1} \\ &= \frac{M_{i-1}}{6} h_i^2 + \tilde{C}_{i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_i = s_{i-1}(x_i) &= \frac{M_i}{h_i} \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{6} + C_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + \tilde{C}_{i-1} \\ &= \frac{M_{i-1}}{6} h_i^2 + C_{i-1} \times h_i + \tilde{C}_{i-1} \end{aligned}$$

Ceci donne,

$$\tilde{C}_{i-1} = f_{i-1} - M_{i-1} \frac{h_i^2}{6} \text{ et } C_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} (M_i - M_{i-1}). \quad (3.2)$$

En dérivant s_{i-1} , on obtient :

$$s'_{i-1}(x) = -3 \frac{M_{i-1}}{6 \times h_i} (x - x)^2 + 3 \frac{M_i}{6 \times h_i} (x - x_{i-1})^2 + C_{i-1}$$

donc

$$\begin{aligned} s'_{i-1}(x_i) &= \frac{M_i}{2} (x_i - x_{i-1}) + C_{i-1} \\ &= \frac{M_i}{2} (x_i - x_{i-1}) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} (M_i - M_{i-1}) \\ &= \frac{h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}. \end{aligned}$$

On a $s_i(x) = M_i \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x-x_i)^3}{6h_{i+1}} + C_i(x-x_i) + \tilde{C}_i$.

En dérivant s_i on obtient :

$$s'_i(x) = M_i(-3) \frac{(x_{i+1}-x)^2}{6h_{i+1}} + 3M_{i+1} \frac{(x-x_i)^2}{6h_{i+1}} + C_i$$

donc

$$\begin{aligned} s'_i(x_i) &= \frac{-M_i}{2} h_{i+1} + C_i \\ &= \frac{-M_i}{2} h_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6} (M_{i+1} - M_i) \\ &= \frac{-M_i}{3} h_{i+1} - \frac{M_{i+1}}{6} h_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}}. \end{aligned}$$

Imposons à présent la continuité de la dérivée première en x_i , c'est à dire $s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$. On obtient alors un système linéaire : pour $i = 1, \dots, k$,

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i}{3} M_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} = \frac{-h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}}$$

$$\iff \frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{(h_i + h_{i+1})}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}. \quad (3.3)$$

Multiplions (3.3) par $\frac{6}{h_i + h_{i+1}}$:

$$\iff \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} M_{i-1} + 2M_i + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} M_{i+1} = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right).$$

On pose : $\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$, $\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$, $d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right)$.

$\implies (*) \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \forall i = 1, \dots, k$.

Le système $(*)$ a $k+2$ inconnues et k équations, 2 conditions restent donc à fixer. En général, ces conditions sont de la forme

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0 \text{ et } \mu_{k+1} M_k + 2M_{k+1} = d_{k+1}$$

où $0 \leq \lambda_0, \mu_{k+1} \leq 1$ et d_0, d_{k+1} sont des valeurs données. (Pour fixer ces conditions, deux possibilités simples s'offrent à nous : soit on pose tous les coefficients égaux à 0, soit on pose $\lambda_0 = \mu_{k+1} = 1, d_0 = d_1$ et $d_{k+1} = d_k$.)

Nous avons donc le système suivant :

$$\begin{cases} 2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0 \\ \mu_1 M_0 + 2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1 \\ \vdots \\ \mu_k M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_{k+1} = d_k \\ \mu_{k+1} M_k + 2M_{k+1} = d_{k+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \mu_k & 2 & \lambda_k \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_{k+1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_k \\ M_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_k \\ d_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons un système linéaire de la forme $AM = d$ (d'inconnue M) où

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \mu_k & 2 & \lambda_k \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_{k+1} & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_k \\ M_{k+1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_k \\ d_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Nous remarquons que A est une matrice tridiagonale, c'est à dire que tous ses coefficients sont nuls excepté sur la diagonale et juste au-dessus et juste au-dessous de la diagonale. Nous avons alors un système tridiagonal.

Nous venons de démontrer le théorème suivant :

Théorème 7. *La détermination d'une fonction spline cubique d'interpolation est égale à la résolution d'un système linéaire tridiagonal.*

Dans le paragraphe suivant nous verrons comment on résout un système tridiagonal.

3.3 Résolution des systèmes tridiagonaux

Par la méthode de Thomas :

Soit A , une matrice tridiagonale de la forme $A =$

$$\begin{bmatrix} a_0 & \lambda_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu_1 & a_1 & \lambda_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \mu_k & a_k & \lambda_k \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_{k+1} & a_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Considérons les matrices L et U , des matrices bidiagonales définies de la manière suivante :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \beta_k & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_{k+1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \lambda_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \lambda_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \alpha_k & \lambda_k \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_{k+1} \end{bmatrix}$$

où les coefficients α_i et β_i sont définis par les relations suivantes :

$$\alpha_0 = a_0, \quad \beta_i = \frac{\mu_i}{\alpha_{i-1}}, \quad \alpha_i = a_i - \beta_i \lambda_{i-1}, \quad \forall i = 1, \dots, k+1.$$

Ces formules sont connues sous le nom d'algorithme de Thomas. On peut étendre cet algorithme à la résolution du système tridiagonal $Ax = d$ (d'inconnue x). Cependant, nous avons la proposition suivante :

Proposition 3. *On a $A = LU$.*

Cette proposition montre que le problème posé revient à résoudre deux systèmes bidiagonaux : $Ly = d$ (d'inconnue y) et $Ux = y$ (d'inconnue x). En effet on a :

$$\begin{aligned} Ax = d &\iff (L.U)x = d \\ &\iff L.(Ux) = d \\ &\iff Ly = d \text{ et } Ux = y \end{aligned}$$

Nous allons commencer par résoudre le système $Ly = d$:

$$\begin{aligned}
Ly = d &\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \beta_k & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_{k+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_k \\ d_{k+1} \end{bmatrix} \\
&\iff \begin{cases} y_0 = d_0 \\ \beta_1 y_0 + y_1 = d_1 \\ \vdots \\ \beta_k y_{k-1} + y_k = d_k \\ \beta_{k+1} y_k + y_{k+1} = d_{k+1} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y_0 = d_0 \\ \beta_i y_{i-1} + y_i = d_i, & \forall i = 1, \dots, k+1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y_0 = d_0 \\ y_i = d_i - \beta_i y_{i-1}, & \forall i = 1, \dots, k+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Maintenant on résout le système $Ux = y$:

$$\begin{aligned}
Ux = y &\iff \begin{bmatrix} \alpha_0 & \lambda_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \lambda_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \alpha_k & \lambda_k \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \alpha_0 x_0 + \lambda_0 x_1 = y_0 \\ \alpha_1 x_1 + \lambda_1 x_2 = y_1 \\ \vdots \\ \alpha_k x_k + \lambda_k x_{k+1} = y_k \\ \alpha_{k+1} x_{k+1} = y_{k+1} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha_{k+1} x_{k+1} = y_{k+1} \\ \alpha_i x_i + \lambda_i x_{i+1} = y_i, & \forall i = 0, \dots, k. \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\alpha_{k+1}} \\ x_i = \frac{y_i - \lambda_i x_{i+1}}{\alpha_i}, & \forall i = 0, \dots, k. \end{cases}
\end{aligned}$$

Maintenant, revenons à notre problème et explicitons les M_i afin de déterminer la fonction d'interpolation spline cubique.

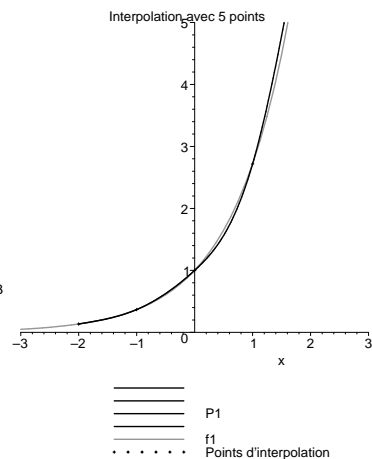
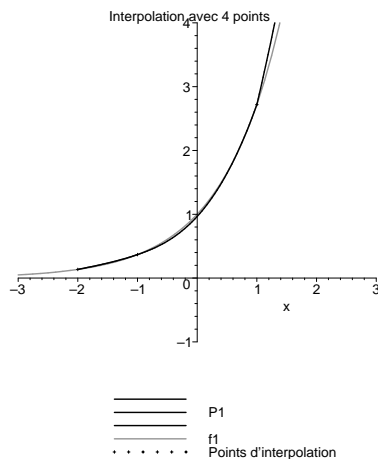
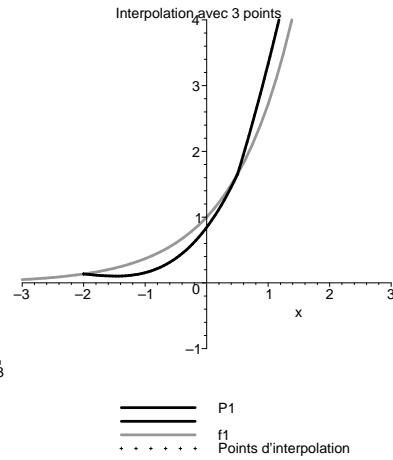
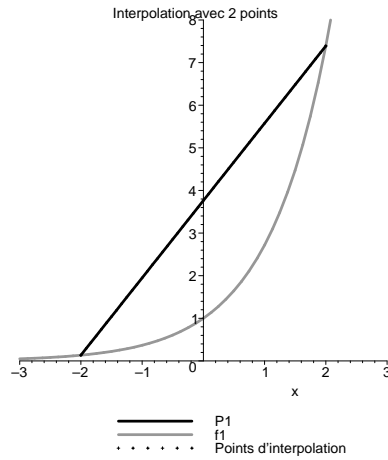
Ici, $a_i = 2$ et $x = M$. D'après ce qui précède, on trouve :

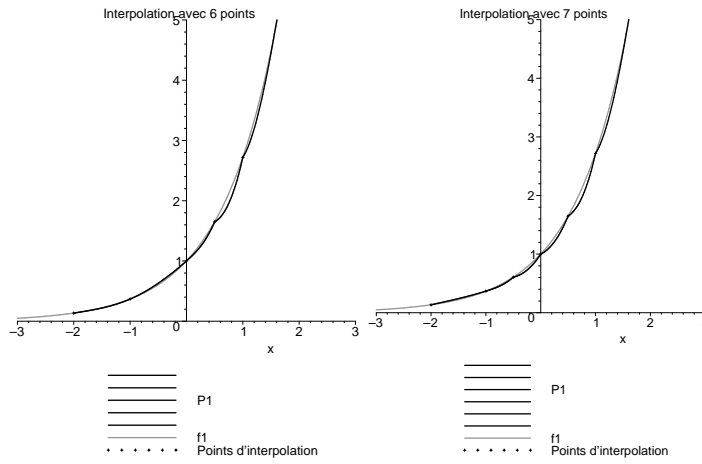
$$\begin{cases} M_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\alpha_{k+1}} \\ M_i = \frac{y_i - \lambda_i M_{i+1}}{\alpha_i}, \quad \forall i = 0, \dots, k. \end{cases}$$

Comme $s_i(x) = M_i \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x-x_i)^3}{6h_{i+1}} + C_i(x-x_i) + \tilde{C}_i$, pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$, on a résolu le problème, grâce aux formules (3.2).

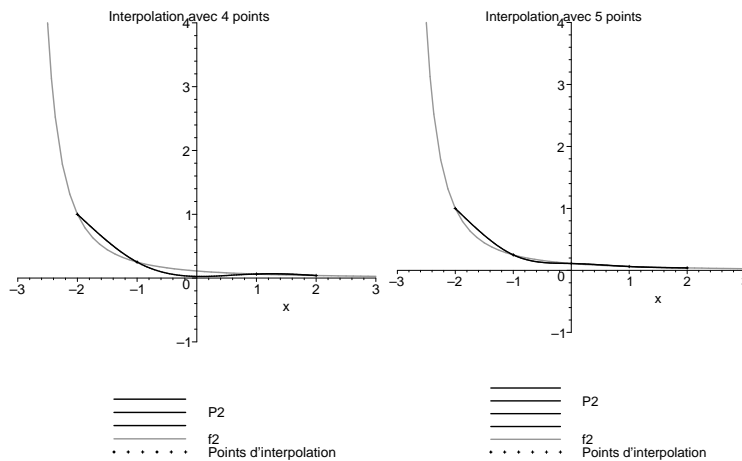
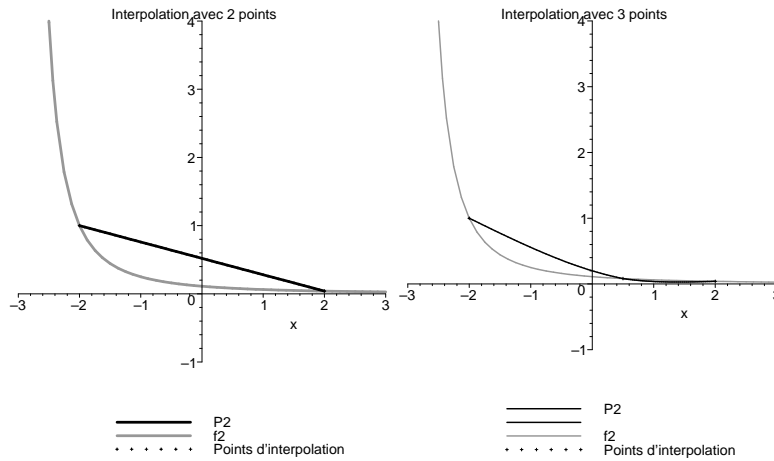
3.4 Exemples :

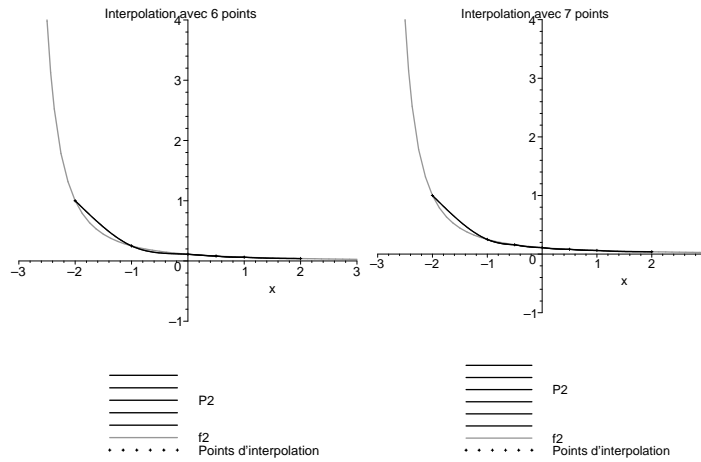
1. $f_1(x) = e^x$ pour $x \in [-2; 2]$



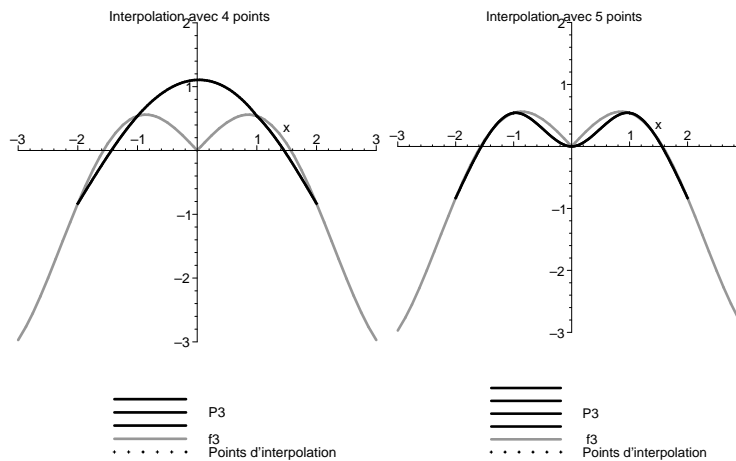
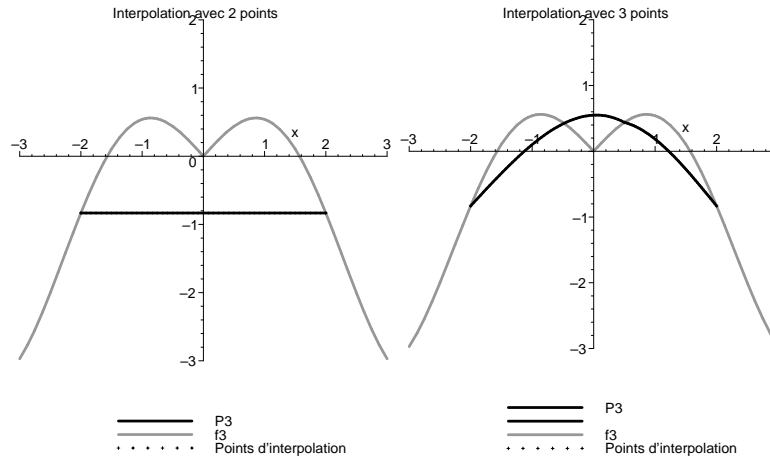


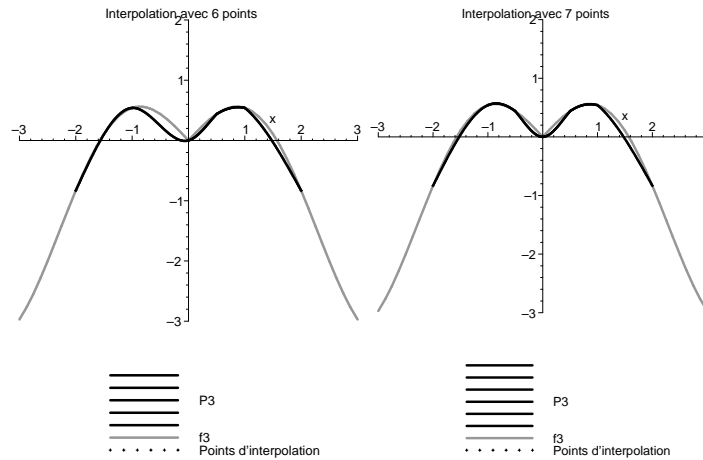
2. $f_2(x) = \frac{1}{(3+x)^2}$ pour $x \in [-2; 2]$





3. $f_3(x) = |x|\cos(x)$ pour $x \in [-2; 2]$





3.5 Commentaires sur les résultats

Interprétons les graphes :

- Quand il n'y a que deux points d'interpolation, la spline est un polynôme de degré 1 (sa représentation graphique est la droite passant par ces deux points). Ceci s'explique par le fait qu'aucune condition de raccordement n'est imposée.
- Pour la fonction exponentielle, nous constatons que les meilleures approximations sont celles avec quatre et cinq points. On a l'impression qu'elles sont meilleures que celles avec six et sept points car sur le graphe de ces dernières, nous remarquons un léger "décrochage".
- Pour la fonction rationnelle et pour la dernière fonction, nous observons que plus il y a de points, meilleure est l'approximation.
- Pour la dernière fonction, zéro est un point stratégique : on note une nette différence lorsqu'il est point d'interpolation ou non.

Exemple de programme MAPLE pour obtenir les graphes de la fonction et de la fonction spline associée :

Points d'interpolation: $x_0:=-2$: $x_1:=-1$: $x_2:=1$: $x_3:=2$:

Fonction: $f_1(x):=1/(3+x)^2$:

Posons:

$h_1:=x_1-x_0$: $h_2:=x_2-x_1$: $h_3:=x_3-x_2$:

$\mu_1:=h_1/(h_1+h_2)$: $\mu_2:=h_2/(h_2+h_3)$:
 $\mu_3:=0$: # μ_3 est une valeur choisie.

$\lambda_0:=0$: # λ_0 est une valeur choisie.
 $\lambda_1:=h_2/(h_1+h_2)$: $\lambda_2:=h_3/(h_2+h_3)$:

$d_0:=0$: # d_0 est une valeur choisie.
 $d_1:=6/(h_1+h_2)*(((\text{subs}(x=x_2,f_1(x))-\text{subs}(x=x_1,f_1(x)))/h_2)$
 $\quad -(\text{subs}(x=x_1,f_1(x))-\text{subs}(x=x_0,f_1(x))/h_1))$:
 $d_2:=6/(h_2+h_3)*(((\text{subs}(x=x_3,f_1(x))-\text{subs}(x=x_2,f_1(x)))/h_3)$
 $\quad -(\text{subs}(x=x_2,f_1(x))-\text{subs}(x=x_1,f_1(x))/h_2))$:
 $d_3:=0$: # d_3 est une valeur choisie.

Maintenant, appliquons la méthode de Thomas afin de trouver les M_i :
 $\alpha_0:=2$:

$\beta_1:=\mu_1/\alpha_0$:
 $\beta_2:=\mu_2/\alpha_1$:
 $\beta_3:=\mu_3/\alpha_2$:

$\alpha_1:=2-\beta_1*\lambda_0$:
 $\alpha_2:=2-\beta_2*\lambda_1$:
 $\alpha_3:=2-\beta_3*\lambda_2$:

$y_0:=d_0$:
 $y_1:=d_1-\beta_1*y_0$:
 $y_2:=d_2-\beta_2*y_1$:
 $y_3:=d_3-\beta_3*y_2$:

$M_3:=y_3/\alpha_3$:
 $M_2:=(y_2-\lambda_2*M_3)/\alpha_2$:
 $M_1:=(y_1-\lambda_1*M_2)/\alpha_1$:
 $M_0:=(y_0-\lambda_0*M_1)/\alpha_0$:

Calculons les constantes C_i et $C_{\tilde{i}}$:

$$C0 := ((\text{subs}(x=x1, f1(x)) - \text{subs}(x=x0, f1(x)))/h1) - 1/6*h1*(M1-M0):$$

$$C1 := ((\text{subs}(x=x2, f1(x)) - \text{subs}(x=x1, f1(x)))/h2) - 1/6*h2*(M2-M1):$$

$$C2 := ((\text{subs}(x=x3, f1(x)) - \text{subs}(x=x2, f1(x)))/h3) - 1/6*h3*(M3-M2):$$

$$C_{\tilde{0}} := \text{subs}(x=x0, f1(x)) - M0*h1^2/6:$$

$$C_{\tilde{1}} := \text{subs}(x=x1, f1(x)) - M1*h2^2/6:$$

$$C_{\tilde{2}} := \text{subs}(x=x2, f1(x)) - M2*h3^2/6:$$

Enfin, nous pouvons obtenir les restrictions s_i de la fonction spline cherchée:

$$s0(x) := M0*(x1-x)^3/(6*h1) + M1*(x-x0)^3/(6*h1) + C0*(x-x0) + C_{\tilde{0}};$$

$$s0(x) := -0.741093750 + 0.1205468750 (x + 2)^3 - 0.8705468750 x$$

$$s1(x) := M1*(x2-x)^3/(6*h2) + M2*(x-x1)^3/(6*h2) + C1*(x-x1) + C_{\tilde{1}};$$

$$s1(x) := 0.06027343750 (1 - x)^3 - 0.01675781250 (x + 1)^3 + 0.2143750000 x - 0.0178125000$$

$$s2(x) := M2*(x3-x)^3/(6*h3) + M3*(x-x2)^3/(6*h3) + C2*(x-x2) + C_{\tilde{2}};$$

$$s2(x) := -0.03351562500 (2 - x)^3 + 0.1520312500 - 0.05601562500 x$$

Commandes pour obtenir les graphes:

with(plots):

p:=plot(f1(x),x=-3..3,y=-1..4,colour=yellow):

p0:=plot(s0(x),x=-2..-1):

p1:=plot(s1(x),x=-1..1):

p2:=plot(s2(x),x=1..2):

X:=[-2,-1,1,2]: #liste des abscisses des points d'interpolations

Yf1:=[subs(x=-2,f1(x)),subs(x=-1,f1(x)),subs(x=1,f1(x)),subs(x=2,f1(x))]:

pointsf1:=plot([seq([X[i],Yf1[i]],i=1..4)],style=point,colour=black, title="Interpolation avec 4 points"):

display(p0,p1,p2,p,pointsf1);

Conclusion

Dans un premier temps, nous avons étudié l'interpolation de Fejer-Hermite : étant donnés k couples distincts $\{(x_1, f(x_1)), \dots, (x_k, f(x_k))\}$, il existe un unique polynôme P vérifiant les conditions :

$$\forall i = 1, \dots, k, \quad \begin{cases} P(x_i) = f(x_i) \\ P'(x_i) = f'(x_i) \end{cases} .$$

Graphiquement, cela correspond à se donner k points dans le plan, une fonction f et à trouver un unique polynôme qui passe par ces points. Ensuite, nous nous sommes intéressées à l'approximation par les fonctions splines cubiques : étant donnés k couples distincts $\{(x_1, f(x_1)), \dots, (x_k, f(x_k))\}$, il existe une fonction polynômiale par morceaux s telle que

$$\forall i = 1, \dots, k, \quad s(x_i) = f(x_i).$$

Graphiquement, cela revient à découper l'intervalle de départ en $k + 1$ intervalles et dans chacun d'eux à trouver un unique polynôme passant par les bornes.

Dans ce mémoire, nous nous sommes limitées à des études graphiques. D'après celles-ci, on constate que les polynômes convergent très rapidement dans le cas d'une fonction très régulière (par exemple l'exponentielle), par contre les fonctions splines collent plus rapidement aux fonctions moins régulières, c'est à dire qui peuvent avoir des problèmes de continuité, de dérivabilité... (par exemple $|x| \times \cos(x)$ en 0). D'après nos exemples, dans le cas de l'interpolation de Fejer-Hermite, nous pouvons observer que la qualité de l'interpolation dépend de la fonction et des points choisis. On pourrait penser que plus il y a de points d'interpolation, meilleure sera l'approximation ; or ce n'est pas le cas. Quand on augmente le nombre de points (qui influe sur le degré du polynôme interpolateur), il arrive que le polynôme se mette à osciller fortement entre ces points. Dans le cas des splines cubiques, nous constatons que seuls le nombre et la position des points influent sur la précision de l'interpolation. Plus le nombre de points d'interpolation sera élevé, plus l'interpolation sera précise.

Ces phénomènes pourraient s'expliquer : on peut démontrer que les polynômes d'interpolation sont très sensibles au choix des points et les points équidistribués (c'est à dire qu'il y a le même intervalle entre chaque point) donnent souvent de

très mauvais résultats. En revanche, pour améliorer l'approximation par les fonctions splines, on augmente le nombre de points, ce qui correspond à augmenter le nombre d'intervalles (et non le degré du polynôme). Ceci permet aux fonctions splines d'approcher toutes les fonctions suffisamment dérivables. Cependant, la vitesse d'approximation est limitée, c'est à dire qu'elle ne décroît pas comme une suite géométrique (il y a convergence rapide lorsque l'erreur est de l'ordre q^d où d est le degré du polynôme interpolant et $q \in \mathbf{R}$ tel que $q < 1$).

Pour conclure, il faut choisir la méthode d'interpolation à utiliser en fonction de l'allure du graphe de la fonction.

Bibliographie

- [1] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*, Springer – Verlag, New – York, 1978.
- [2] G. Nurnberger, *Approximation by Spline Functions*, Springer – Verlag, Berlin, 1989.
- [3] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Méthodes Numériques*, Springer – Verlag, Paris, 2000.
- [4] J.P. Calvi, [*Cours de DEUG : Interpolation*].
- [5] I. Camanes, D. Jean, [*Les polynômes de Tchebyshev*].