Licence MAPES - Projet Juin 2005

Les Polynômes de Tchebychev

Isabelle Camanes
Delphine Jean

Sous la direction de : Jean-Paul Calvi
Laboratoire Emile Picard
Bureau 219, Bâtiment 1R2
Université Paul Sabatier
31062 Toulouse Cedex 04
calvi@picard.ups-tlse.fr
05.61.55.62.23.

Table des matières

Introduction et historique

[1] Pafnuty Tchebychev est né en Russie le 16 mai 1821 au sein d'une famille aisée.
Sa mère lui apprend les principes de base de lecture et d'écriture et son cousin l'initie au français et à l'arithmétique.
En 1832, il est pris en charge par le meilleur professeur de mathématiques de Moscou, ce qui lui permet cinq ans plus tard d'entrer à l'Université de Moscou.
En 1840, Tchebychev participe à un coucours de mathématiques en soumettant un travail (qui sera publié seulement vers 1950) sur le calcul des racines des équations dans lequel il résout l'équation $y = f(x)$ en utilisant le développement en série de l'inverse de la fonction f.
En 1842, il écrit, en français, son premier travail significatif sur les intégrales multiples.
En 1844, il publie un second article cette fois sur la convergence des séries de Taylor.
Deux ans plus tard, Tchebychev est encore étudiant et choisit comme sujet de thèse "la théorie des probabilités" en se penchant plus particulièrement sur la loi faible des grands nombres de Poisson. Après son entrée à l'Université de Saint Petersbourg en 1847, il rédige un second sujet de thèse sur "l'intégration au moyen des logarithmes".
En 1853, Tchebychev écrit un livre important sur la théorie des congruences qui reçoit le prix de l'Académie des Sciences.
Tout au long de sa carrière, et notamment dans les années 1850, il voyage beaucoup, ce qui lui permet de rencontrer de nombreux mathématiciens, essentiellement européens, comme Bienaymé, Lebesgue, Cayley, Sylvester,

Dirichlet...
En 1854, il introduit, dans une de ses publications, les polynômes unitaires de degré inférieur ou égal à n qui ont la norme la plus petite sur $[-1,1]$, polynômes aujourd'hui connus sous le nom de polynômes de Tchebychev (cf. le théorème (3.1)). A l'origine, il a donné ces polynômes sous l'expression $\frac{1}{2}\Big((x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n\Big)$, et ce n'est qu'en 1873 qu'il reconnaît la "forme trigonométrique" qui est aujourd'hui la définition courante (cf. (1.1.1)). Plus tard, il développe une théorie générale sur les polynômes orthogonaux, concept dont il est probablement le précurseur.
En 1867, il généralise la loi des grands nombres à l'aide de l'inégalité de Bienaymé, puis en 1887, il publie deux théorèmes sur les probabilités : l'un sur la théorie des données statistiques et l'autre généralisant le théorème central limite de De Moivre et Laplace.
Tchebychev a ainsi contribué à l'évolution des mathématiques grâce à ses nombreux travaux dont certains n'ont été publiés qu'après sa mort le 8 décembre 1894.

Dans ce mémoire, nous nous limiterons à étudier des applications des polynômes de Tchebychev à l'interpolation polynômiale et à l'approximation des fonctions continues.

Chapitre 1

Définition et premiers résultats

1.1 Définition des polynômes de Tchebychev

Notons $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Théorème 1.1.1 (Définition). *Pour tout $n \geq 0$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathcal{P}_n$ tel que*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad \forall\, x \in [-1, 1]. \tag{1.1}$$

Le polynôme T_n s'appelle le n-ième polynôme de Tchebychev.

Démonstration. [3] Montrer l'existence d'un polynôme vérifiant la formule précédente revient à chercher T_n tel que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
On remarque que $\cos(n\theta) = \Re\Big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\Big)$.
La formule de Moivre donne $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$.
D'où,

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \Re\Big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\Big) \\ &= \Re\Big(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k\Big) \end{aligned}$$

Si k est impair, le terme est un imaginaire pur. On ne considère donc que les k pairs.

On obtient, en posant $k = 2p$ et en notant $[n/2]$ la partie entière de $n/2$

$$\cos n\theta = \sum_{p=0}^{[n/2]} (-1)^p \ \mathrm{C}_n^{2p} \ (\cos\theta)^{n-2p} \ (1 - (\cos\theta)^2)^p.$$

Donc, en posant $x = \cos\theta$, on peut prendre

$$T_n(x) = \sum_{p=0}^{[n/2]} (-1)^p \ \mathrm{C}_n^{2p} \ x^{n-2p} \ (1 - x^2)^p \qquad \forall \ x \in [-1, 1].$$

Montrons maintenant l'unicité de T_n.
Supposons que Q_n soit un autre polynôme tel que $Q_n(\cos\theta) = \cos n\theta$, pour tout θ.
Alors, pour tout θ, $(T_n - Q_n)(\cos\theta) = 0$. Or, $\cos\theta$ décrit l'intervalle $[-1, 1]$, ce dernier contenant une infinité de valeurs. Ceci implique que le polynôme $T_n - Q_n$ admet une infinité de racines et par conséquent, $T_n - Q_n$ est le polynôme nul.
Finalement, $T_n = Q_n$ d'où l'unicité de T_n. $\square$

1.2 Propriétés élémentaires de ces polynômes

1.2.1 Relation de récurrence

Théorème 1.2.1. *Les polynômes de Tchebychev vérifient la relation de récurrence suivante*

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \ n \in \{1, 2, \ldots\} \tag{1.2}$$

Démonstration. [3] Il suffit de vérifier l'égalité pour $x \in [-1, 1]$ avec le même argument que dans la démonstration de l'unicité de T_n du théorème précédent. En effet, si deux polynômes P et Q de degré quelconque sont tels que : $P(x) = Q(x) \ \ \forall x \in [-1, 1]$, alors le polynôme $P - Q$ admet une infinité de racines sur $[-1, 1]$. C'est donc le polynôme nul et par conséquent, $P(x) = Q(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$. Donc, montrer que $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ revient à montrer que
$T_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta T_n(\cos\theta) - T_{n-1}(\cos\theta)$.
Or, comme $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$, cela revient à prouver :

$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\ \cos n\theta - \cos(n-1)\theta$.
Sachant que $\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\ \cos\theta - \sin n\theta\ \sin\theta$
et que $\cos(n-1)\theta = \cos n\theta\ \cos\theta + \sin n\theta\ \sin\theta$, on obtient en additionnant membre à membre ces égalités :
$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta\ \cos\theta$. D'où la formule de récurrence recherchée. □

Quelques exemples de courbes de représentation des premiers polynômes de Tchebychev :

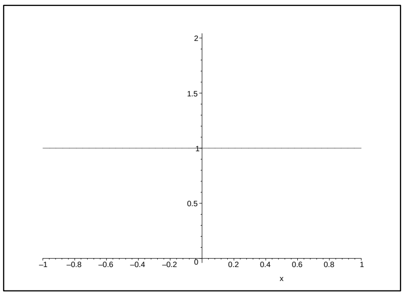


Fig. 1.1: $T_0(x) = 1$

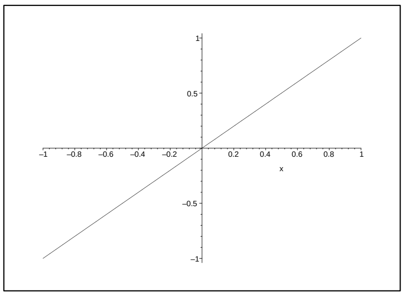


Fig. 1.2: $T_1(x) = x$

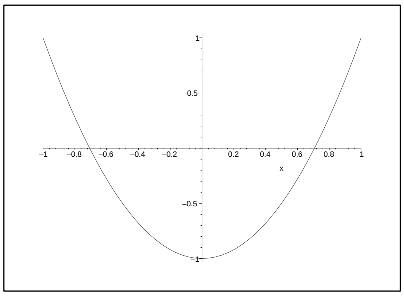


Fig. 1.3: $T_2(x) = 2x^2 - 1$

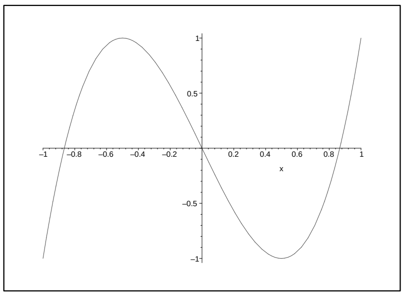


Fig. 1.4: $T_3(x) = 4x^3 - 3x$

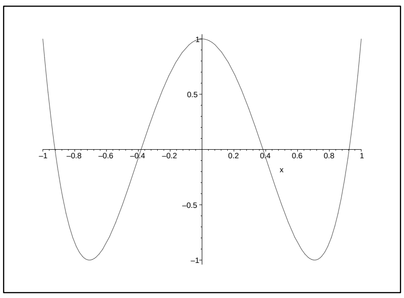


Fig. 1.5: $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

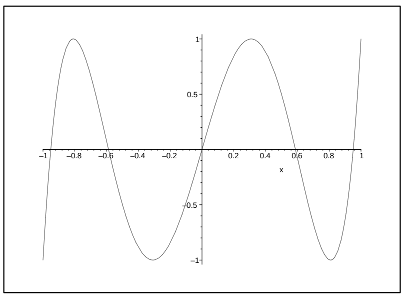


Fig. 1.6: $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

Corollaire 1.2.2. *Si n est pair, alors T_n est une fonction paire.*
Si n est impair, alors T_n est une fonction impaire.

Démonstration. Définissons la propriété $(\mathcal{R}_n)$: $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.
Le corollaire découle immédiatement de cette propriété. En effet,

si n est pair, on a $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x) = T_n(x)$ et donc T_n est paire,

si n est impair, on a $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x) = -T_n(x)$ et donc T_n est impaire.

Montrons cette propriété par récurrence sur n.

$*$Initialisation :

D'après la figure (1.1), $T_0(-x) = 1 = (-1)^0 T_0(x)$ d'où $(\mathcal{R}_0)$ est vraie.
De même, d'après la figure (1.2), $T_1(-x) = -x = (-1)^1 T_1(x)$ d'où $(\mathcal{R}_1)$ est vraie.

$*$ Hérédité :

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang k et montrons que $(\mathcal{R}_{k+1})$ est vraie.
D'après (1.2), pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned}
T_{k+1}(-x) &= -2xT_k(-x) - T_{k-1}(-x) \\
&= -2x(-1)^k T_k(x) - (-1)^{k-1} T_{k-1}(x) \\
&= (-1)^{k+1}(2xT_k(x) - T_{k-1}(x)) \\
&= (-1)^{k+1} T_{k+1}(x).
\end{aligned}$$

$*$ Conclusion :

La propriété est vraie aux rangs 0 et 1 et est héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Corollaire 1.2.3 (Valeur du coefficient dominant[1]). *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + t_{n-1}(x) \qquad \forall n \geq 1$$

où $t_{n-1}(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Démonstration. [3] Raisonnons par récurrence sur n.

$*$ Initialisation :

Pour $n = 1$, on a par définition $T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$ car $x \in [-1, 1]$.
T_1 vérifie bien la relation de récurrence.

$*$ Hérédité :

---

[1] Nous appelons coefficient dominant le coefficient du monôme de plus haut degré, i.e. si $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ avec $a_n \neq 0$ le coefficient a_n de x^n est le coefficient dominant de P.

Supposons que l'égalité du corollaire soit vraie jusqu'au rang k et montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$.
D'après (1.2), on a $T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$.
D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) &= 2x(2^{k-1}x^k + t_{k-1}(x)) - (2^{k-2}x^{k-1} + t_{k-2}(x)) \\ &= 2^k x^{k+1} + (2xt_{k-1}(x) - 2^{k-2}x^{k-1} - t_{k-2}(x)) \\ &= 2^k x^{k+1} + [\text{ poly. de degré } \leq k\ ]. \end{aligned}$$

$*$ Conclusion :
La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \{1, 2, \ldots\}$. □

Remarque 1 *(Coefficient dominant).* D'après le théorème-définition (1.1.1) (cf. preuve) on a $T_n(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{[n/2]} (-1)^p \ \mathrm{C}_n^{2p} \ x^{n-2p} \ (1-x^2)^p$, pour tout $x \in [-1, 1]$.
Le coefficient de x^n est donc $\displaystyle\sum_{p=0}^{[n/2]} (-1)^p \ \mathrm{C}_n^{2p} \ (-1)^p = \sum_{p=0}^{[n/2]} \mathrm{C}_n^{2p}$.
Or, d'après le corollaire précédent, le coefficient de plus haut degré est 2^{n-1}.
En particulier, on retrouve l'égalité suivante :

$$\sum_{p=0}^{[n/2]} \mathrm{C}_n^{2p} = 2^{n-1}.$$

1.2.2 Racines et extrema de T_n

Théorème 1.2.4. *T_n admet n racines simples définies par :*

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n}\pi \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \ .$$

Démonstration. [3] Chercher les racines de T_n revient à résoudre l'équation $T_n(x) = 0$.

$*$ Recherche des racines dans $[-1, 1]$.
Soit r une racine de T_n appartenant à $[-1, 1]$. Il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $r = \cos\theta$.
Par définition, $T_n(r) = 0$, c'est à dire $T_n(\cos\theta) = 0$.
D'où, $\cos(n\theta) = 0$, ce qui revient à : $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Finalement, $\theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} = \frac{2k+1}{2n}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que les x_k définis par

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n}\pi, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

sont bien racines de T_n.

$*$ Il n'y a pas d'autres racines.

En effet, la fonction cos étant injective sur $[0, \pi]$ et comme les $\dfrac{2k+1}{2n}\pi$ sont des valeurs distinctes dans $[0, \pi]$, on a trouvé n racines distinctes dans l'intervalle $[-1, 1]$. Or, le polynôme T_n est de degré n. Comme tout polynôme réel de degré n admet au plus n racines, les x_k trouvés précédemment sont les seuls zéros distincts de T_n et sont donc simples.

□

Théorème 1.2.5. *Sur l'intervalle $[-1, 1]$, T_n admet $n+1$ extrema*[2] *atteints en les points :*

$$x'_k = \cos \frac{k}{n}\pi, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Démonstration. [3] Pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$. On a alors $T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ donc les extrema sur $[-1, 1]$ sont -1 et $+1$. Si on trouve des points y tels que $T_n(y) = \pm 1$, on est sûr que ce sont des extrema.
Chercher leur expression revient à résoudre $T_n(y) = \pm 1$ avec $y = \cos\theta$, c'est à dire $\cos n\theta = \pm 1$.

$$\begin{aligned}
\cos n\theta = \pm 1 &\iff n\theta = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\iff \theta = \frac{k}{n}\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\implies y = \cos \frac{k}{n}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi $n+1$ extrema sur $[-1, 1]$ définis par [3]

$$x'_k = \cos \frac{k}{n}\pi, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

[2]Dans ce qui suit, on notera toujours x_k les racines du polynôme de Tchebychev et x'_k ses extrema.

[3]Prenons un entier k dans $\{n, \dots, 2n\}$, il existe un entier $p \in \{0, \dots, n\}$ tel que $k = n+p$, alors, $\cos(\frac{p+n}{n}\pi) = \cos(\frac{p}{n}\pi + \pi) = -\cos(\frac{p}{n}\pi) = \cos(\pi - \frac{p}{n}\pi) = \cos(\frac{n-p}{n}\pi)$. On peut montrer par récurrence que ceci est vrai pour tout entier k dans l'ensemble $\{in, \dots, (i+1)n\}$, donc on peut toujours se ramener à choisir k dans l'ensemble $\{0, \dots, n\}$.

Montrons pour finir que ce sont les seuls.
Il y a au plus $n-1$ extrema dans $]-1,1[$ car si x est extremum dans cet intervalle, alors $T_n'(x)$ s'annule et T_n' a au plus $n-1$ racines car son degré est $n-1$.
Donc, on a $n+1$ extrema sur [-1,1] et ce sont les seuls. $\square$

Corollaire 1.2.6. *On a* $T_n(x_k') = (-1)^k \qquad \forall\ k = 0, \ldots, n.$

Démonstration. Pour tout $k = 0, \ldots, n$, on a effectivement
$T_n(x_k') = \cos(n \arccos(\frac{k}{n}\pi)) = \cos(n\frac{k}{n}\pi)) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$ $\square$

Chapitre 2

Interpolation de fonctions

2.1 Interpolation de Lagrange-Hermite

Théorème 2.1.1. *Soient* $a_0, \ldots, a_k$, $k+1$ *points deux à deux distincts,* $n_0, \ldots, n_k$ *des entiers et* y_i^j *des réels avec* $0 \leq i \leq k$ *et* $0 \leq j \leq n_i$.

Alors, il existe un unique polynôme P *de degré* $n = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}(n_i+1) - 1$ *tel que*

$$P^{(j)}(a_i) = y_i^j \qquad \forall j = 0, \ldots, n_i \quad \text{et} \quad \forall i = 0, \ldots, k.$$

Démonstration. Considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{P}_n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), \ldots, P^{(n_0)}(a_0), P(a_1), \ldots, P^{(n_1)}(a_1), \ldots, P(a_k), \ldots, P^{(n_k)}(a_k)). \end{array}$$

φ est bien définie car il y a $(n_0+1) + (n_1+1) + \ldots + (n_k+1) = n+1$ coordonnées.
Démontrer le théorème revient à montrer que φ est bijective. Or, φ étant une application linéaire et les espaces de départ et d'arrivée étant de dimension finie égale, il suffit de montrer qu'elle est injective. Montrons pour cela que $\ker(\varphi) = \{0\}$.

Soit $P \in \mathcal{P}_n$ tel que $\varphi(P) = (0, \ldots, 0)$.
On a en particulier $P^{(i)}(a_0) = 0$ pour tout $i = 0, \ldots, n_0$. a_0 est donc racine d'ordre n_0+1 de P et par conséquent, il existe $Q_0 \in \mathcal{P}_{n-n_0-1}$ tel que $P(x) = (x-a_0)^{n_0+1}Q_0(x)$.
De même, il existe $Q_1 \in \mathcal{P}_{n-n_1-1}$ tel que $P(x) = (x-a_1)^{n_1+1}Q_1(x)$, ce qui donne $(x-a_0)^{n_0+1}Q_0(x) = (x-a_1)^{n_1+1}Q_1(x)$.
Ceci implique que $(x-a_1)^{n_1+1}$ divise $(x-a_0)^{n_0+1}Q_0(x)$.

Mais $(x-a_1)^{n_1+1}$ est premier avec $(x-a_0)^{n_0+1}$ car $a_0 \neq a_1$. En effet, s'ils n'étaient pas premiers entre eux, ils auraient un diviseur commun irréductible. Or, le seul polynôme unitaire irréductible qui divise $(x-a_1)^{n_1+1}$ est $(x-a_1)$ et le seul polynôme irréductible qui divise $(x-a_0)^{n_0+1}$ est $(x-a_0)$. Comme a_1 est distinct de a_0, on ne peut trouver aucun polynôme irréductible divisant à la fois $(x-a_1)^{n_1+1}$ et $(x-a_0)^{n_0+1}$.
Donc $(x-a_1)^{n_1+1}$ divise $Q_0(x)$.
On obtient alors $P(x) = (x-a_0)^{n_0+1}(x-a_1)^{n_1+1}Q_2(x)$ où $Q_2 \in \mathcal{P}_{n-n_0-1-n_1-1}$.
En continuant selon le même principe, on arrive à :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-a_0)^{n_0+1} \dots (x-a_k)^{n_k+1} R(x) \\ &= \prod_{j=0}^{k} (x-a_j)^{n_j+1} R(x). \end{aligned}$$

Or, P étant au plus de degré n et $\prod_{j=0}^{k}(x-a_j)^{n_j+1}$ de degré $\sum_{j=0}^{k}(n_j+1) = n+1$, on a $R \equiv 0$. Par conséquent, $P \equiv 0$, donc $\ker(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective.
On a ainsi montré que φ est bijective, d'où le théorème. □

On va s'intéresser à deux cas particuliers de ce théorème : l'interpolation de Lagrange, obtenue en prenant $n_i = 0$ et celle de Fejer-Hermite, dans laquelle $n_i = 1$, $y_i^1 = 0$ et où les a_i sont les points de Tchebychev.
Etudions maintenant ces deux méthodes d'interpolation.

2.2 Interpolation de Lagrange

Etant donnés $n+1$ points distincts $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ où les b_i sont les valeurs d'une fonction f aux points a_i, on sait, d'aprés le théorème (2.1.1), qu'il existe un unique polynôme $p \in \mathcal{P}_n$ vérifiant $p(a_i) = b_i = f(a_i)$, pour $i = 0, 1, \dots, n$.
On l'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points a_i et on le note $L_{A_n}(f)$ avec $A_n = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$.

Théorème 2.2.1. *La formule d'interpolation de Lagrange est donnée par l'expression suivante pour tout réel x :*

$$L_{A_n}(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) l_i(x) \quad \textit{avec} \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x-a_j}{a_i-a_j}. \tag{2.1}$$

Démonstration. Vérifions que pour tout $k = 0, \dots, n$, $L_{A_n}(f)(a_k) = f(a_k)$ et que $\deg L_{A_n}(f) \leq n$.

On a $L_{A_n}(f)(a_k) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) l_i(a_k)$. Or, $l_i(a_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a_k - a_j}{a_i - a_j}$, d'où

$$l_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc, $L_{A_n}(f)(a_k) = f(a_k)$.

De plus, par définition des l_i, $\deg l_i = n$ et L_{A_n} étant une somme de polynômes de degré n, $\deg L_{A_n}(f) \leq n$.

$L_{A_n}(f)$ est donc bien le polynôme d'interpolation de Lagrange de f. $\square$

Théorème 2.2.2. *Soit* $w(x) = (x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_n) \ \in \mathcal{P}_{n+1}$, *on a*

$$l_i(x) = \frac{w(x)}{x - a_i} \frac{1}{w'(a_i)} \qquad \forall \ i = 0, \dots, n.$$

Démonstration. On a par hypothèse,

$w(x) = (x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_n) = \prod_{j=0}^{n} (x - a_j)$,

donc $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - a_j) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{w(x)}{x - a_i} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{a_i - a_j}$.

De plus,

$$\begin{aligned} w'(x) &= (x - a_1) \dots (x - a_n) + \dots + (x - a_0) \dots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \dots (x - a_n) \\ &+ \dots + (x - a_0) \dots (x - a_{n-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} (x - a_k), \end{aligned}$$

donc, pour tout $i = 0, \dots, n$,

$$\begin{aligned} w'(a_i) &= (a_i - a_0) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n) \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j). \end{aligned}$$

D'où, pour tout $i = 0, \dots, n$, $\quad l_i(x) = \frac{w(x)}{x - a_i} \frac{1}{w'(a_i)}$. $\square$

2.2.1 Etude de l'erreur

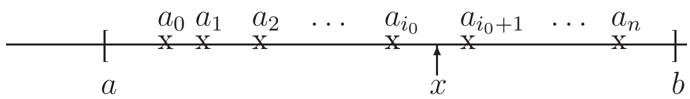
Lorsque la fonction interpolée f est suffisamment de fois dérivable, on peut donner une estimation de la différence entre $f(x)$ et $L_{A_n}(f)(x)$. Lorsque x est un point d'interpolation, la différence est nulle.

Théorème 2.2.3 (Formule de l'erreur). *Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ et $A_n = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset [a,b]$. On suppose que $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$. Pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que*

$$f(x) - L_{A_n}(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_n). \tag{2.2}$$

Démonstration. [2] Soit $x \in [a,b]$.
Si $x \in A_n$ n'importe quel ξ convient puisqu'on obtient $0 = 0$.
Supposons donc que $x \notin A_n$.
On a alors trois possibilités :
- $*$ $x \in [a, a_0]$
- $*$ il existe un indice $i_0 \in 0, \ldots, n-1$ tel que $x \in]a_{i_0}, a_{i_0+1}[$
- $*$ $x \in [a_n, b]$.

On peut alors représenter les points comme suit :



• Penchons-nous tout d'abord sur le deuxième cas.
Posons $w(t) = (t-a_0)\ldots(t-a_n)$ et prenons $K(x)$ tel que

$$f(x) - L_{A_n}(f)(x) = K(x)w(x).$$

On remarque que $K(x)$ est bien défini car $x \notin A_n \Rightarrow w(x) \neq 0$.
Considérons maintenant la fonction

$$u(t) = f(t) - L_{A_n}(f)(t) - K(x)w(t)$$

définie pour tout $t \in [a,b]$.
En tant que somme de fonctions de $\mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $u \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$.
De plus, pour $0 \leq i \leq n$,
$u(a_i) = f(a_i) - L_{A_n}(f)(a_i) - K(x) \times 0 = f(a_i) - f(a_i) = 0$. Et, par définition de K,

$$u(x) = f(x) - L_{A_n}(f)(x) - K(x)w(x) = 0.$$

La fonction u s'annule donc en $n+2$ points : x et a_i pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$.

$*$ Etape 1 :
Appliquons le théorème de Rolle à la fonction u sur l'intervalle $[a_0, a_1]$.

$$\left.\begin{array}{l} u(a_0) = 0 \\ u(a_1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c_1^1 \in]a_0, a_1[\text{ tel que } u'(c_1^1) = 0.$$

Par un raisonnement analogue, on trouvera un zéro de u' dans les intervalles $]a_1, a_2[$, $]a_2, a_3[$, $\ldots$, $]a_{i_0}, x[$, $]x, a_{i_0+1}[$, $\ldots$, $]a_{n-1}, a_n[$. On a ainsi $n+1$ intervalles qui donnent $n+1$ zéros de u'.
Il existe ainsi $n+1$ réels $c_1^1 < c_2^1 < \ldots < c_{n+1}^1$ dans $]a, b[$ tels que $u'(c_i^1) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n+1$.

$*$ Etape 2 :
De la même façon que pour l'étape 1, utilisons le théorème de Rolle sur les intervalles $]c_i^1, c_{i+1}^1[$.

$$\left.\begin{array}{l} u'(c_1^1) = 0 \\ u'(c_2^1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c_1^2 \in]c_1^1, c_2^1[\text{ tel que } u''(c_1^2) = 0,$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} u'(c_n^1) = 0 \\ u'(c_{n+1}^1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c_n^2 \in]c_n^1, c_{n+1}^1[\text{ tel que } u''(c_n^2) = 0.$$

Il existe alors n réels $c_1^2 < c_2^2 < \ldots < c_{n+1}^2$ dans $]a, b[$ tels que $u''(c_i^2) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

En itérant ce raisonnement pendant $n-1$ étapes (pour u'', u''', $\ldots$, $u^{(n)}$), on obtient :
il existe c_1^{n+1} dans $]a, b[$ tel que

$$u^{(n+1)}(c_1^{n+1}) = 0.$$

Revenons maintenant à l'expression de la fonction u :

$$u(t) = f(t) - L_{A_n}(f)(t) - K(x)w(t).$$

Puisque $L_{A_n}(f)(t)$ est un polynôme de degré n, quand on le dérive $n+1$ fois, on obtient 0.
Quant à $w(t)$, on a :

$$\begin{array}{rcl} w(t) & = & (t-a_0)(t-a_1)\ldots(t-a_n) \\ & = & t^{n+1} + [\text{poly. de degré} \leq n\ ]. \end{array}$$

En dérivant ce polynôme $n+1$ fois, on obtient $(n+1)!$ donc

$$u^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!K(x).$$

En prenant $t = c_1^{n+1}$, il vient $0 = f^{(n+1)}(c_1^{n+1}) - (n+1)!K(x)$ et donc

$$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_1^{n+1})}{(n+1)!}.$$

Revenant à la définition de $K(x)$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} f(x) - L_{A_n}(f)(x) &= K(x)w(x) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c_1^{n+1})}{(n+1)!}(x-a_0)\dots(x-a_n). \end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule annoncée en prenant $\xi = c_1^{n+1}$.

• Penchons-nous maintenant sur le cas où $x \in [a, a_0]$(celui où $x \in [a_n, b]$ est analogue).
Comme précédemment, on considère l'application
$u(t) = f(t) - L_{A_n}(f)(t) - K(x)w(t)$ définie pour tout $t \in [a,b]$ telle que $u(x) = 0$ et $u(a_i) = 0$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.
Appliquons le théorème de Rolle à cette fonction :

$$\left.\begin{array}{l} u(x) = 0 \\ u(a_0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c_1^1 \in]x, a_0[\text{ tel que } u'(c_1^1) = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} u(a_0) = 0 \\ u(a_1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c_2^1 \in]a_0, a_1[\text{ tel que } u'(c_2^1) = 0,$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$\left.\begin{array}{l} u(a_{n-1}) = 0 \\ u(a_n) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c_{n+1}^1 \in]a_{n-1}, a_n[\text{ tel que } u'(c_{n+1}^1) = 0.$$

Il existe alors $n+1$ réels $c_1^1 < c_2^1 < \dots < c_{n+1}^1$ dans $]a,b[$ tels que $u'(c_i^1) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n+1$.
En itérant ce raisonnement (comme dans le cas précédent) pendant n étapes (pour $u', u'', \dots, u^{(n)}$), on obtient qu'il existe c_1^{n+1} dans $]a,b[$ tel que

$$u^{(n+1)}(c_1^{n+1}) = 0.$$

En procédant maintenant comme dans le cas précédent, on obient la formule de l'erreur cherchée. $\square$

2.2.2 Majoration de l'erreur

Corollaire 2.2.4.

$$\| f - L_{A_n}(f) \|_\infty \leq \frac{\| f^{(n+1)} \|_\infty}{(n+1)!} \| w \|_\infty$$

où $w(x) = (x - a_0) \dots (x - a_n)$ *et* $\| h \|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} | h(x) |$.

2.3 Constante de Lebesgue

2.3.1 Rappel sur la continuité des applications linéaires sur un espace vectoriel normé

Soit $u : E \to E$ linéaire,

$$\begin{aligned} u \text{ continue sur } E &\Leftrightarrow u \text{ continue en } 0 \\ &\Leftrightarrow u \text{ lipschitzienne, i.e. } \exists M \text{ tel que } \forall x \in E, \| u(x) \| \leq M \| x \| \\ &\Leftrightarrow \| u(x) \| \text{ est bornée sur la boule unité.} \end{aligned}$$

La plus petite constante M vérifiant la condition de Lipschitz est
$M = \sup_{x \in E}\{\| u(x) \|, \| x \| = 1\} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\| u(x) \|}{\| x \|}$; M est notée $|||u|||$ et définit une norme sur $\mathcal{L}(E, E)$.

2.3.2 Définition de la constante

On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}([-1,1])$ des fonctions continues sur l'intervalle $[-1,1]$, muni de la norme $\| f \| = \max_{x \in [-1,1]} | f(x) |$. Rappelons la définition de l'application suivante :

$$\begin{aligned} L_{A_n} : \mathcal{C}([-1,1]) &\longrightarrow \mathcal{C}([-1,1]) \\ f &\longmapsto L_{A_n}(f) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) l_i \end{aligned}$$

avec $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$, pour tout $i = 0, \dots, n$.

Théorème 2.3.1. *L_{A_n} est une application linéaire continue dont la norme est égale à :*

$$\Lambda_{A_n} = \max_{x\in[-1,1]} \sum_{i=0}^{n} \mid l_i(x) \mid . \qquad (2.3)$$

Cette quantité Λ_{A_n} s'appelle la constante de Lebesgue de A_n où $A_n = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.

Démonstration. [4]

$*$ Linéarité

L_{A_n} est linéaire puisque, grâce aux propriétés de la somme, si f et g appartiennent à $\mathcal{C}([-1,1])$ et λ à $\mathbb{R}$, on obtient facilement :

$$L_{A_n}(\lambda f + g) = \lambda L_{A_n}(f) + L_{A_n}(g).$$

$*$ Continuité

Utilisons pour cela le critère de Lipschitz.

$$\begin{aligned}
\parallel L_{A_n}(f) \parallel &= \max_{x\in[-1,1]} \mid L_{A_n}(f)(x) \mid \\
&= \max_{x\in[-1,1]} \left| \sum_{i=0}^{n} f(a_i) l_i(x) \right| \\
&\leq \max_{x\in[-1,1]} \sum_{i=0}^{n} \mid f(a_i) \mid \mid l_i(x) \mid \\
&\leq \max_{x\in[-1,1]} \sum_{i=0}^{n} \parallel f \parallel \mid l_i(x) \mid .
\end{aligned}$$

On a obtenu la dernière inégalité en utilisant la majoration $\mid f(a_i) \mid \leq \parallel f \parallel$, la norme infinie étant bien définie puisque f est bornée en tant que fonction continue sur un compact, d'où

$$\begin{aligned}
\parallel L_{A_n}(f) \parallel &\leq \max_{x\in[-1,1]} \parallel f \parallel \sum_{i=0}^{n} \mid l_i(x) \mid \\
&\leq \parallel f \parallel \max_{x\in[-1,1]} \sum_{i=0}^{n} \mid l_i(x) \mid .
\end{aligned}$$

De cette inégalité, on déduit que L_{A_n} est une application linéaire continue.

$*$ Recherche de la norme

On doit montrer que $\Lambda_{A_n} = \sup\limits_{\substack{f\in \mathcal{C}([-1,1]) \\ f\neq 0}} \dfrac{\parallel L_{A_n}(f) \parallel}{\parallel f \parallel} = ||| L_{A_n} ||| .$

Comme $f \neq 0$, en utilisant les calculs effectués pour la continuité, on obtient : $\dfrac{\| L_{A_n}(f) \|}{\| f \|} \leq \Lambda_{A_n}, \quad \forall f \in \mathcal{C}([-1,1]), f \neq 0.$
D'où,

$$\sup_{\substack{f\in \mathcal{C}([-1,1]) \\ f\neq 0}} \frac{\| L_{A_n}(f) \|}{\| f \|} \leq \Lambda_{A_n}. \tag{2.4}$$

Il nous reste à démontrer que $\quad \Lambda_{A_n} \leq \sup\limits_{\substack{f\in \mathcal{C}([-1,1]) \\ f\neq 0}} \dfrac{\| L_{A_n}(f) \|}{\| f \|}.$

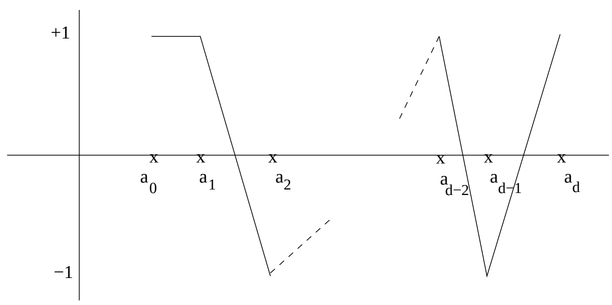
Pour cela, construisons une fonction f_p telle que $\Lambda_{A_n} \leq \dfrac{\| L_{A_n}(f_p) \|}{\| f_p \|}.$

Prenons $x_0 \in [-1,1]$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{n} \mid l_i(x_0) \mid = \Lambda_{A_n}.$

Un tel x_0 existe car la fonction $\sum\limits_{i=0}^{n} \mid l_i \mid$ étant continue sur l'espace compact $[-1,1]$, elle est bornée et y atteint ses bornes.
Définissons f_p comme une fonction affine par morceaux telle que :

$$f_p(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } l_i(x_0) \geq 0 \\ -1 & \text{si } l_i(x_0) < 0 \end{cases}$$

et qui prend toutes ses valeurs dans $[-1,1]$, de sorte que $\| f_p \| = 1$.
Par exemple, la fonction f_p peut être de la forme suivante :



Calculons $L_{A_n}(f_p)(x_0)$:

$$\begin{aligned} L_{A_n}(f_p)(x_0) &= \sum_{i=0}^{n} f_p(a_i) l_i(x_0) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mid l_i(x_0) \mid, \qquad \text{par définition de } f_p. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \| L_{A_n}(f_p) \| &\geq | L_{A_n}(f_p)(x_0) | \\ &\geq \sum_{i=0}^{n} | l_i(x_0) | = \Lambda_{A_n}. \end{aligned}$$

Comme $\| f_p \| = 1$, on a $\dfrac{\| L_{A_n}(f_p) \|}{\| f_p \|} \geq \Lambda_{A_n}$ et donc

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{C}([-1,1]) \\ f \neq 0}} \frac{\| L_{A_n}(f) \|}{\| f \|} \geq \Lambda_{A_n}. \tag{2.5}$$

Ainsi, (2.4) et (2.5) nous donnent

$$\Lambda_{A_n} = \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}([-1,1]) \\ f \neq 0}} \frac{\| L_{A_n}(f) \|}{\| f \|}.$$

□

2.3.3 Inégalité remarquable

Théorème 2.3.2. *Soit* $A_n = \{a_0, \ldots, a_n\}$.
Pour tout P *polynôme de degré* n *et pour tout* f *dans* $\mathcal{C}([-1,1])$, *on a*

$$\| f - L_{A_n}(f) \| \leq (1 + \Lambda_{A_n}) \| f - P \| .$$

Démonstration. [4] L_{A_n} étant linéaire, on remarque que
$L_{A_n}(f - P) = L_{A_n}(f) - L_{A_n}(P)$.
De plus, on sait que le polynôme d'interpolation de Lagrange d'un polynôme de degré n est ce polynôme lui-même [1] donc $L_{A_n}(f - P) = L_{A_n}(f) - P$.

$$\begin{aligned} f - L_{A_n}(f) &= f - P - (L_{A_n}(f) - P) \\ &= f - P - L_{A_n}(f - P). \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \| f - L_{A_n}(f) \| &= \| f - P - L_{A_n}(f - P) \| \\ &\leq \| f - P \| + \| L_{A_n}(f - P) \| \\ &\leq \| f - P \| + \| f - P \| \Lambda_{A_n} \\ &\leq \| f - P \| (1 + \Lambda_{A_n}). \end{aligned}$$

[1] Si $deg(P) \leq n$, alors $L_{A_n}(P) = P$.
En effet, par définition de L_{A_n}, $L_{A_n}(P) - P$ s'annule aux points $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et admet donc $n + 1$ racines.
Or, son degré est inférieur ou égal à n donc $L_{A_n}(P) - P \equiv 0$ et $L_{A_n}(P) = P$.

□

Remarque 2. Cette inégalité mesure la perte de précision induite par l'emploi de l'interpolant de Lagrange plutôt que par le polynôme de meilleure approximation.
Par exemple, si $\Lambda_{A_n} \leq 9, \| f - L_{A_n}(f) \| \leq 10 \| f - P \|$.
En utilisant le polynôme d'interpolation de Lagrange, on perd la précision d'une décimale par rapport à l'approximation obtenue en utilisant le polynôme de meilleure approximation. Donc, on a intérêt à choisir les points $a_0, \ldots, a_n$ de telle sorte que Λ_{A_n} soit le plus petit possible.
En pratique, le meilleur choix possible est donné par les racines du polynôme de Tchebychev.

2.4 Interpolation de Fejer-Hermite

Etant donnés n triplets distincts $(x_1, y_1, y'_1), \ldots, (x_n, y_n, y'_n)$, on va trouver un unique polynôme $P \in \mathcal{P}_{2n-1}$ tel que $P(x_k) = y_k$ et $P'(x_k) = y'_k$. Ce polynôme est appelé le polynôme d'interpolation de Fejer-Hermite.

Théorème 2.4.1. *L'unique polynôme $P \in \mathcal{P}_{2n-1}$ vérifiant les conditions*

$$\begin{cases} P(x_k) = y_k \\ \\ P'(x_k) = y'_k \end{cases} \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$$

est donné par :

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k A_k(x) + \sum_{k=1}^{n} y'_k B_k(x)$$

avec [2] $A_k(x) = \left[1 - \dfrac{w''(x_k)}{w'(x_k)}(x - x_k)\right] l_k^2(x) \quad$ *et* $\quad B_k(x) = (x - x_k) l_k^2(x).$

[2]On rappelle que $l_k(x) = \dfrac{w(x)}{w'(x_k)} \dfrac{1}{x - x_k} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \dfrac{x - x_i}{x_k - x_i}$,
avec $w(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$ tel que

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Vérifions les conditions imposées sur P.

$*$ Calcul du degré.

$deg(l_k) = n-1$, donc $deg(l_k^2) = 2(n-1)$.

De plus, on a $deg\Big(1 - \dfrac{w''(x_k)}{w'(x_k)}(x-x_k)\Big) = 1$. D'où, $deg(A_k(x)) = 2n-1$.

D'autre part, $deg(B_k) = deg(x-x_k) + deg(l_k^2(x)) = 2n-1$. Donc, on a bien

$$deg(P) \leq \max\Big\{\{deg(A_k), deg(B_k)\}, k = 0, \ldots, n\Big\} \leq 2n-1.$$

$*$ Soit $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ quelconque. Vérifions que $P(x_{k_0}) = y_{k_0}$.

On a $P(x_{k_0}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k A_k(x_{k_0}) + \sum_{k=1}^{n} y'_k B_k(x_{k_0})$.

Si $k = k_0$, on a $A_k(x_{k_0}) = A_{k_0}(x_{k_0}) = l_{k_0}^2(x_{k_0}) = 1$,

et si $k \neq k_0$, alors $A_k(x_{k_0}) = 0$ car $l_k(x_{k_0}) = 0$.

De plus, quel que soit k, $B_k(x_{k_0}) = 0$ donc, on a bien $P(x_{k_0}) = y_{k_0}$ $\forall k_0 \in \{1, \ldots, n\}$.

$*$ Vérifions que $P'(x_{k_0}) = y'_{k_0}$.

Par dérivation, on obtient $B'_k(x_{k_0}) = l_k^2(x_{k_0}) + 2(x_{k_0} - x_k)l_k(x_{k_0})l'_k(x_{k_0})$.

Si $k = k_0$, $B'_{k_0}(x_{k_0}) = l_{k_0}^2(x_{k_0}) = 1$,

et si $k \neq k_0$, $B'_k(x_{k_0}) = 0$ car x_{k_0} est racine de l_k.

Ceci montre que $\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y'_k B_k(x)\Big)' |_{x=x_{k_0}} = y'_{k_0}$.

Il nous reste alors à montrer que $\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k A_k(x)\Big)' |_{x=x_{k_0}} = 0$. Montrons pour cela que $A'_k(x_{k_0}) = 0$.

Si $k \neq k_0$, x_{k_0} est racine de l_k donc racine double de l_k^2 donc, $A'_k(x_{k_0}) = 0$.

Si $k = k_0$,

$A'_k(x_{k_0}) = A'_{k_0}(x_{k_0}) = -\dfrac{w''(x_{k_0})}{w'(x_{k_0})} l_{k_0}^2(x_{k_0}) + 2\Big[1 - \dfrac{w''(x_{k_0})}{w'(x_{k_0})}(x_{k_0} - x_{k_0})\Big] l'_{k_0}(x_{k_0}) l_{k_0}(x_{k_0})$.

Or, $l_{k_0}(x_{k_0}) = 1$ donc $A'_{k_0}(x_{k_0}) = -\dfrac{w''(x_{k_0})}{w'(x_{k_0})} + 2l'_{k_0}(x_{k_0})$.

Calculons $l'_{k_0}(x)$:

$l_{k_0}(x) = \dfrac{w(x)}{w'(x_{k_0})(x - x_{k_0})}$ donc $l'_{k_0}(x) = \dfrac{1}{w'(x_{k_0})} \dfrac{w'(x)(x-x_{k_0}) - w(x)}{(x-x_{k_0})^2}$.

Pour que $A'_k(x_{k_0}) = A'_{k_0}(x_{k_0}) = 0$, il faut que $l'_{k_0}(x_{k_0}) = \dfrac{1}{2}\dfrac{w''(x_{k_0})}{w'(x_{k_0})}$.

Pour que $l'_{k_0}(x_{k_0})$ soit bien défini, il faut que x_{k_0} soit racine double du numérateur $N(x) = w'(x)(x - x_{k_0}) - w(x)$.

Il est clair que $N(x_{k_0}) = 0$, et de plus, comme $N'(x) = w''(x)(x - x_{k_0})$, $N'(x_{k_0}) = 0$. Donc, $x = x_{k_0}$ est racine double de N.
Par conséquent, il existe un polynôme $T \in \mathcal{P}_{n-2}$ tel que
$N(x) = (x - x_{k_0})^2 T(x)$.
En dérivant N, on obtient

$$\begin{aligned} N'(x) &= w''(x)(x - x_{k_0}) \\ &= 2(x - x_{k_0})T(x) + (x - x_{k_0})^2 T'(x). \end{aligned}$$

D'où, $w''(x) = 2T(x) + (x - x_{k_0})T'(x)$.
En particulier, pour $x = x_{k_0}$, on a $w''(x_{k_0}) = 2T(x_{k_0})$, c'est-à-dire
$T(x_{k_0}) = \dfrac{w''(x_{k_0})}{2}$. Et donc,

$$\begin{aligned} l'_k(x_{k_0}) &= \frac{1}{w'(x_{k_0})} \frac{N(x_{k_0})}{(x - x_{k_0})^2} = \frac{1}{w'(x_{k_0})} T(x_{k_0}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{w''(x_{k_0})}{w'(x_{k_0})}. \end{aligned}$$

On a bien $A'_{k_0}(x_{k_0}) = 0$.
Au final, on a montré que

$$\begin{aligned} P'(x_{k_0}) &= \Big(\sum_{k=1}^{n} y'_k B_k(x_{k_0}) \Big)' + \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k A_k(x_{k_0}) \Big)' \\ &= y'_{k_0} + 0 \\ &= y'_{k_0}. \end{aligned}$$

Donc, le polynôme vérifie toutes les conditions demandées. $\square$

Chapitre 3

Application à l'interpolation de Lagrange

3.1 Minimisation de l'erreur par les polynômes de Tchebychev

Afin de minimiser l'erreur d'interpolation de Lagrange (dont l'expression a été vue au (2.2)), on cherche pour quels points a_i la norme $\| w \|_\infty$ est la plus petite possible. On va montrer que ces valeurs correspondent aux racines des polynômes de Tchebychev. Dans un premier temps, on restreint notre étude à l'intervalle $[-1, 1]$. Nous verrons par la suite que ce n'est pas une perte de généralité.

Définition 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\widetilde{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n.$$

Notons que le polynôme $\widetilde{T}_n$ est unitaire ; c'est une sorte de "normalisation" de T_n.

Théorème 3.1.1. *Notons $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré inférieur ou égal à n.*
Pour tout $p \in \widetilde{\mathcal{P}}_n$, on a

$$\| \widetilde{T}_n \|_\infty \leq \| p \|_\infty, \tag{3.1}$$

où $\| f \|_\infty = \max\limits_{-1 \leq x \leq 1} | f(x) |$.

Démonstration. [3] On va raisonner par l'absurde.
Supposons qu'il existe $p \in \widetilde{\mathcal{P}}_n$ tel que

$$\| p \|_\infty < \| \widetilde{T}_n \|_\infty$$

i.e.,

$$\| p \|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}} \| T_n \|_\infty .$$

Or, $| T_n(x) | \leq 1$. Donc, $\| p \|_\infty < \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
Posons $Q(x) = \widetilde{T}_n(x) - p(x)$.
$Q \in \mathcal{P}_{n-1}$ puisque les deux polynômes $\widetilde{T}_n$ et p sont unitaires (les monômes x^n s'éliminent dans la soustraction). Etudions ce polynôme aux points x'_k.

$$Q(x'_k) = \widetilde{T}_n(x'_k) - p(x'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - p(x'_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

$*$ Lorsque k est pair :
$Q(x'_k) = \dfrac{1}{2^{n-1}} - p(x'_k)$.
Or, $| p(x'_k) | < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ implique $p(x'_k) < \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
D'où $-p(x'_k) > -\dfrac{1}{2^{n-1}}$ et donc $Q(x'_k) > 0$.

$*$ Lorsque k est impair :
$Q(x'_k) = -\dfrac{1}{2^{n-1}} - p(x'_k)$.
Or, $| p(x'_k) | < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ implique $p(x'_k) > -\dfrac{1}{2^{n-1}}$.
D'où $-p(x'_k) < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et donc $Q(x'_k) < 0$.

Ainsi, $Q(x'_k)$ prend $n+1$ valeurs successivement positives et négatives et admet donc n zéros distincts (d'après le théorème des valeurs intermédiaires). Or, $Q(x) \in \mathcal{P}_{n-1}$ donc il admet au plus $n-1$ zéros. Donc $Q \equiv 0$, ce qui implique que $p \equiv \widetilde{T}_n$ et

$$\| p \|_\infty = \| \widetilde{T}_n \|_\infty .$$

On obtient alors une contradiction, ce qui montre que notre hypothèse de départ est fausse.
Finalement,

$$\| \widetilde{T}_n \|_\infty \leq \| p \|_\infty .$$

□

On vient de montrer que pour tout p dans $\widetilde{\mathcal{P}}_n$, on a $\| \widetilde{T}_n \|_\infty \leq \| p \|_\infty$, cela montre que $\widetilde{T}_n$ est **un** polynôme unitaire dont la norme sup est minimale sur $[-1,1]$ parmi les polynômes de degré au plus n. En modifiant un peu la démonstration, on va établir que $\widetilde{T}_n$ est l'**unique** polynôme ayant cette propriété dans $\widetilde{\mathcal{P}}_n$.

Théorème 3.1.2. *On a*

$$\Big(\| p \|_\infty \leq \| \widetilde{T}_n \|_\infty \Big) \implies \Big(p = \widetilde{T}_n \Big).$$

Démonstration. [2] Supposons qu'il existe $p \in \widetilde{\mathcal{P}}_n$ tel que $\| p \|_\infty \leq \| \widetilde{T}_n \|_\infty$.
Notons x'_k les points où $\| \widetilde{T}_n \|_\infty = | \widetilde{T}_n(x'_k) |, \quad \forall k = 0, \ldots, n.$
On a alors $| p(x'_k) | \leq \| p \|_\infty \leq | \widetilde{T}_n(x'_k) |$, et puisque $2^{n-1}\widetilde{T}_n(x'_k) = (-1)^k$,

$$\begin{aligned} (-1)^k (p - \widetilde{T}_n)(x'_k) &= (-1)^k p(x'_k) - (-1)^k \widetilde{T}_n(x'_k) \\ &= (-1)^k p(x'_k) - 2^{-n+1}. \end{aligned}$$

Or, $p(x'_k) \leq | p(x'_k) | \leq | \widetilde{T}_n(x'_k) | = 2^{-n+1}$, donc,

$$(-1)^k (p - \widetilde{T}_n)(x'_k) \leq ((-1)^k - 1) 2^{-n+1} \leq 0. \tag{3.2}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} (-1)^k \int_{x'_k}^{x'_{k+1}} (p - \widetilde{T}_n)'(s) ds &= (-1)^k (p - \widetilde{T}_n)(x'_{k+1}) - (-1)^k (p - \widetilde{T}_n)(x'_k) \\ &= -\Big[(-1)^{k+1} (p - \widetilde{T}_n)(x'_{k+1}) + (-1)^k (p - \widetilde{T}_n)(x'_k) \Big] \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

car $\forall\ k = 0, \ldots, n$, $(-1)^k (p - \widetilde{T}_n)(x'_k) \leq 0$ d'après (3.2).

On a alors deux cas :
$*$ Si $(p - \widetilde{T}_n)' = 0$,
il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $p - \widetilde{T}_n = c$. D'après (3.2), $c = 0$ car $(-1)^k c \leq 0$ pour tout $k = 0, \ldots, n$.
$*$ Si $(p - \widetilde{T}_n)' \neq 0$,
$(-1)^k \displaystyle\int_{x'_k}^{x'_{k+1}} (p - \widetilde{T}_n)'(s) ds \geq 0$, donc il existe $\xi_k \in]x'_k, x'_{k+1}[$, pour $k = 0, \ldots, n$, tels que $(-1)^k (p - \widetilde{T}_n)'(\xi_k) > 0$. Montrons-le par contraposée.
Supposons que $\forall \xi_k \in]x'_k, x'_{k+1}[$, $(-1)^k (p - \widetilde{T}_n)'(\xi_k) \leq 0$. On aurait alors

$\displaystyle\int_{x'_k}^{x'_{k+1}} (-1)^k (p - \widetilde{T}_n)'(\xi_k) ds \leq 0.$

Or, $(-1)^k \displaystyle\int_{x'_k}^{x'_{k+1}} (p - \widetilde{T}_n)'(s) ds \geq 0$, donc $\displaystyle\int_{x'_k}^{x'_{k+1}} (-1)^k (p - \widetilde{T}_n)'(\xi_k) ds \geq 0$, ce qui impliquerait que $(-1)^k \displaystyle\int_{x'_k}^{x'_{k+1}} (p - \widetilde{T}_n)'(\xi_k) ds = 0$. Sachant que l'intégrale d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si cette fonction est nulle [1], $(-1)^k (p - \widetilde{T}_n)'(\xi_k) = 0 \quad \forall\ \xi_k \in]x'_k, x'_{k+1}[$. D'où, $(p - \widetilde{T}_n)' = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.
Ainsi, pour tout $k = 0, \ldots, n, (-1)^k (p - \widetilde{T}_n)'(\xi_k) > 0$, c'est à dire :

si k est pair, $(p - \widetilde{T}_n)'(\xi_k) > 0$,

si k est impair, $(p - \widetilde{T}_n)'(\xi_k) < 0$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux intervalles $]\xi_k, \xi_{k+1}[$, on obtient qu'il existe $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $(p - \widetilde{T}_n)'(c_k) = 0$. Or, comme $p - \widetilde{T}_n$ est de degré $n-1$ (car ce sont des polynômes unitaires), $(p - \widetilde{T}_n)'$ est de degré $n-2$. Ayant trouvé n racines pour ce polynôme, $(p - \widetilde{T}_n)' = 0$, ce qui nous ramène au premier cas. D'où $p - \widetilde{T}_n \equiv 0$.
Finalement, $p = \widetilde{T}_n$. $\square$

Corollaire 3.1.3. *Quels que soient les réels $a_0, \ldots, a_n$ avec $a_0 \neq 0$, on a*

$$\max_{a \leq x \leq b} \mid a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \mid \geq \mid a_0 \mid \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}.$$

Démonstration. [3] Pour passer de l'intervalle $[a, b]$ à $[-1, 1]$, effectuons la transformation suivante :

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t.$$

Soit $p \in \mathcal{P}_n$, on a $p(x) = a_n + a_{n-1} x + \ldots + a_0 x^n$,

[1]Si f est continue de signe constant sur $[a, b]$, alors $\left(\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow f \equiv 0\right)$.
En effet, par contraposée supposons que $f \neq 0$, c'est à dire que $\exists x \in [a, b]$ tel que $f(x) > 0$ (la démonstration serait analogue pour $f(x)$ négatif). En appliquant la définition de la continuité de f en x avec $\varepsilon = \frac{|f(x)|}{2}$, $\exists \eta$ tel que si $\mid y - x \mid \leq \eta, \mid f(y) \mid \geq \frac{|f(x)|}{2}$ et donc $\int_a^b f(t)dt \geq \int_{x-\eta}^{x+\eta} f(t)dt$ car $f \geq 0$ et $[x - \eta, x + \eta] \subset [a, b]$. Donc $\int_a^b f(t)dt \geq \eta \mid f(x) \mid > 0$.

$$
\begin{aligned}
\max_{a\le x\le b} \mid p(x) \mid &= \max_{-1\le t\le 1} \left| p\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)\right| \\
&= \max_{-1\le t\le 1} \left| a_0\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)^n + \ldots + a_n\right| \\
&= \max_{-1\le t\le 1} \left| a_0\left(\frac{b-a}{2}\right)^n t^n + [\text{poly. de degré } n-1]\right| \\
&= \mid a_0 \mid \frac{(b-a)^n}{2^n} \max_{-1\le t\le 1} \mid s(t) \mid, \quad \text{où } s(t) = t^n + [\text{poly. de degré } n-1].
\end{aligned}
$$

D'aprés (3.1), on sait que pour $s \in \widetilde{\mathcal{P}}_n$

$$\parallel s \parallel_\infty \geq \parallel \widetilde{T}_n \parallel_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

D'où, $\max_{a\le x\le b} \mid p(x) \mid \geq \frac{\mid a_0 \mid}{2^n}(b-a)^n \frac{1}{2^{n-1}}$.
Donc, on a montré que :

$$\max_{a\le x\le b} \mid p(x) \mid \geq \mid a_0 \mid \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}.$$

□

3.2 Estimation de la constante de Lebesgue

Dans cette partie, nous allons étudier l'interpolation de Lagrange aux points de Tchebychev. En particulier, pour $i = 0, \ldots, n$, les l_i désignent les polynômes de base de Lagrange aux points x_k, les racines de Tchebychev. Considérons alors l'ensemble de ces racines $A_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$.

Théorème 3.2.1. *L'expression de l_i pour $i = 0, \ldots, n$ en fonction des polynômes de Tchebychev est donnée par :*

$$l_i(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{x - x_i} \frac{1}{T'_{n+1}(x_i)}.$$

Démonstration. On a vu dans le chapitre général sur l'interpolation que : $l_i(x) = \dfrac{w(x)}{x - x_i} \dfrac{1}{w'(x_i)}$, avec $w(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n) \in \widetilde{\mathcal{P}}_{n+1}$.
w étant le polynôme unitaire, appelé précédemment $\widetilde{T}_n$, admettant les mêmes

racines que T_n, on a $w(x) = 2^{-n}\ T_{n+1}(x)$ et $w'(x) = 2^{-n}\ T'_{n+1}(x)$, où T_{n+1} est le polynôme de Tchebychev. Donc,

$$l_i(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{x - x_i}\frac{1}{T'_{n+1}(x_i)}.$$

$\square$

Théorème 3.2.2. *Une majoration de la constante de Lebesgue est donnée par*

$$\Lambda_{A_n} \leq C \ln(n), \quad \textit{où } C \textit{ est une constante positive indépendante de } n.$$

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin des résultats suivants.

Lemme 1. *Pour* $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, *on a*

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi}t. \tag{3.3}$$

Illustrons tout d'abord ce résultat par le graphique suivant.

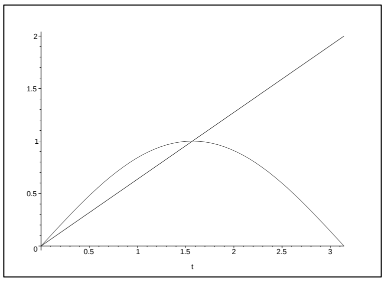


FIG. 3.1: Graphes de $\sin t$ et $\frac{2}{\pi}t$.

Démonstration. Etudions la fonction $f(t) = \sin t - \dfrac{2}{\pi}t$ et montrons qu'elle est positive pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
On a $f'(t) = \cos t - \dfrac{2}{\pi}$. Cette dérivée s'annule au point $t_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos t_0 = \dfrac{2}{\pi}$, c'est à dire $t_0 = \arccos \dfrac{2}{\pi}$.

D'après le tableau de variations effectué sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f(t) \geq 0 \ \ \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Par conséquent, $\sin t \geq \dfrac{2}{\pi}t$ sur cet intervalle. $\square$

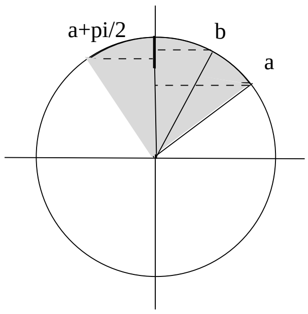
x	0		t_0		$\pi/2$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Fig. 3.2: Tableau de variation de f.

Lemme 2. *Soient a dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ et b dans $[a, a + \frac{\pi}{2}]$, alors*

$$\sin b \geq \min(\sin a, \sin(a + \frac{\pi}{2})). \tag{3.4}$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme est simple si on s'appuie sur le schéma et le tableau de variation suivant :



t	a		$\pi/2$		$a+\pi/2$
$\cos(t)$		$+$		$-$	
$\sin(t)$	$\sin(a)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\sin(a+\pi/2)$

Fig. 3.3: Tableau de variation de sin.

$\square$

Démonstration. (du théorème) [5] Rappelons tout d'abord l'expression (cf. théorème (2.3)) :

$\Lambda_{A_n} = \max_{x\in[-1,1]} \sum_{i=0}^{n} \mid l_i(x) \mid$ avec $l_i(x) = \dfrac{T_{n+1}(x)}{x - x_i} \dfrac{1}{T'_{n+1}(x_i)}$.

Majorons $\sum_{i=0}^{n} \mid l_i(x) \mid$.

Puisque $x \in [-1,1]$, il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$.
De même, $x_i = \cos\theta_i$, où [2] $\theta_i = \dfrac{2i-1}{2n+2}\pi \quad 0 \le i \le n$.

La relation $T_{n+1}(\cos\theta) = \cos(n+1)\theta$ entraîne par dérivation

$$\sin\theta \, T'_{n+1}(\cos\theta) = (n+1)\sin(n+1)\theta.$$

Comme $\sin(n+1)\theta_i = \sin(2i-1)\dfrac{\pi}{2} = (-1)^{i+1}$, il vient

$$T'_{n+1}(x_i) = T'_{n+1}(\cos\theta_i) = (n+1)\frac{(-1)^{i+1}}{\sin\theta_i},$$

D'où, $\qquad l_i(\cos\theta) = \dfrac{\cos(n+1)\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_i)} \dfrac{(-1)^{i+1}\sin\theta_i}{(n+1)},$

et donc $\quad | \, l_i(\cos\theta) \, | = \dfrac{| \cos(n+1)\theta \sin\theta_i \, |}{(n+1) \, | \cos\theta - \cos\theta_i \, |}.$

Minorons la quantité

$$\cos\theta - \cos\theta_i = -2\sin\frac{\theta-\theta_i}{2}\sin\frac{\theta+\theta_i}{2}. \tag{3.5}$$

Puisque θ et θ_i appartiennent à $[0,\pi]$, on a $\dfrac{\theta}{2}$ et $\dfrac{\theta_i}{2}$ appartiennent à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\dfrac{\theta-\theta_i}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. D'où, d'après (3.3), $\quad \left|\sin\dfrac{\theta-\theta_i}{2}\right| \ge \dfrac{2}{\pi}\dfrac{| \, \theta-\theta_i \, |}{2}$.
Par ailleurs, $\dfrac{\theta+\theta_i}{2} \in \left[\dfrac{\theta_i}{2}, \dfrac{\theta_i+\pi}{2}\right]$ avec $\dfrac{\theta_i}{2} \le \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\theta_i+\pi}{2} \ge \dfrac{\pi}{2}$,
donc, d'après le lemme (3.4)(avec $a = \frac{\theta_i}{2}$),

$$\sin\frac{\theta+\theta_i}{2} = \left|\sin\frac{\theta+\theta_i}{2}\right| \ge \min\left(\sin\frac{\theta_i}{2}, \sin\frac{\theta_i+\pi}{2}\right) = \min\left(\sin\frac{\theta_i}{2}, \cos\frac{\theta_i}{2}\right).$$

---

[2] Nous avons défini l'ensemble des points de Tchebychev comme suit :
$A_n = \{\cos(\frac{2k+1}{2n}\pi); \quad 0 \le k \le n-1\}$ mais nous pouvons aussi l'écrire
$A'_n = \{\cos(\frac{2k-1}{2n}\pi); \quad 0 \le k \le n-1\}$.
En effet, remarquons tout d'abord que l'on a $Card(A_n) = Card(A'_n) = n$.
Il nous suffit alors de montrer que $A'_n \subset A_n$, c'est à dire que les éléments de A'_n sont des points de Tchebychev.
Soit $x_k \in A'_n$, on a $T_n(x_k) = T_n(\cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)) = \cos(n\frac{2k-1}{2n}\pi) = \cos(k\pi - \frac{\pi}{2}) = 0$, donc, x_k est racine du polynôme de Tchebychev T_n et appartient à A_n.
Par conséqent, $A'_n = A_n$.
On peut donc noter les points de Tchebychev de manière équivalente comme éléments de A_n ou de A'_n.

On obtient ainsi, d'après (3.5)
$\mid \cos\theta - \cos\theta_i \mid \geq 2\min\left(\sin\frac{\theta_i}{2}, \cos\frac{\theta_i}{2}\right)\frac{2}{\pi}\frac{\mid \theta - \theta_i \mid}{2}$,
et comme $\sin\theta_i = 2\sin\frac{\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_i}{2} \leq 2\min\left(\sin\frac{\theta_i}{2}, \cos\frac{\theta_i}{2}\right)$,

$$\mid l_i(\cos\theta) \mid \leq \pi \frac{\mid \cos(n+1)\theta \mid}{(n+1) \mid \theta - \theta_i \mid}. \tag{3.6}$$

Utilisons maintenant le théorème des accroissements finis pour affiner la majoration.
Cosinus étant une fonction différentiable sur l'intervalle d'extrémités distinctes θ et θ_i, il existe $\xi \in]\theta, \theta_i[$ tel que

$$\cos(n+1)\theta = \ cos(n+1)\theta_i + (\theta - \theta_i)(n+1)(-\sin\xi).$$

θ_i étant racine du polynôme de Tchebychev, $\cos(n+1)\theta_i = 0$, et on a

$$\mid \cos(n+1)\theta \mid \leq (n+1) \mid \theta - \theta_i \mid .$$

On obtient finalement $\mid l_i(\cos\theta) \mid \leq \pi, \quad \forall\, \theta \in [0,\pi] \setminus \{\theta_i\}$, et ceci est encore vrai par continuité si $\theta = \theta_i$.
Fixons $\theta \in [0,\pi]$ et soit $\theta_j \leq \theta$ le point le plus proche de θ.
Si on note $h = \theta_{i+1} - \theta_i = \frac{\pi}{n+1}$, on a

$$\begin{aligned} \mid \theta - \theta_j \mid &\leq h\ , \\ \mid \theta - \theta_i \mid &\geq \mid \theta_j - \theta_i \mid - \mid \theta - \theta_j \mid \geq (\mid j - i \mid -1)h. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} \mid l_i(\cos\theta) \mid &= \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq\{j-1,j,j+1\}}}^{n} \mid l_i(\cos\theta) \mid + \mid l_{j-1}(\cos\theta) \mid + \mid l_j(\cos\theta) \mid \quad + \mid l_{j+1}(\cos\theta) \mid \\ &\leq \frac{\pi}{(n+1)h} \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq\{j-1,j,j+1\}}}^{n} \frac{1}{\mid j-i \mid -1} + 3\pi \qquad \text{d'après (3.6),} \end{aligned}$$

en majorant le cosinus par 1.

Majorons le terme $\displaystyle\sum_{\substack{i=0\\ i\neq\{j-1,j,j+1\}}}^{n} \frac{1}{\mid j-i\mid -1}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i=0\\ i\neq\{j-1,j,j+1\}}}^{n} \frac{1}{\mid j-i\mid -1} &= \sum_{i=0}^{j-2}\frac{1}{\mid j-i\mid -1}+\sum_{i=j+2}^{n}\frac{1}{\mid j-i\mid -1}\\
&= \sum_{i=0}^{j-2}\frac{1}{j-i-1}+\sum_{i=j+2}^{n}\frac{1}{i-j-1}\\
&= \sum_{k=2}^{j}\frac{1}{k-1}+\sum_{l=2}^{n-j}\frac{1}{l-1} \qquad \text{en posant } k=j-i \text{ et } l=i-j\\
&= \sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}+\sum_{l=1}^{n-j-1}\frac{1}{l}.
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{1}{k}>0$, on a $\displaystyle\sum_{\substack{i=0\\ i\neq\{j-1,j,j+1\}}}^{n} \frac{1}{\mid j-i\mid -1} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}$,

d'où $\displaystyle\sum_{\substack{i=0\\ i\neq\{j-1,j,j+1\}}}^{n} \frac{1}{\mid j-i\mid -1} \leq 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Donc, en passant à la borne supérieure et sachant que $\dfrac{\pi}{(n+1)h}=1$, on obtient

$$\Lambda_A \leq 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+3\pi.$$

De plus, on sait que $\displaystyle\ln(n)=\int_1^n\frac{dx}{x}=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$.

Soit $k\leq x\leq k+1$, alors, $\dfrac{1}{k+1}\leq x\leq\dfrac{1}{k}$.

D'où, $\displaystyle\frac{1}{k+1}\leq\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}\leq\frac{1}{k}$, et finalement, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leq\int_1^n\frac{dx}{x}$.

Par conséquent, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leq 1+\ln(n)$ et donc $\Lambda_{A_n}\leq 2+2\ln(n)+3\pi$.

Remarquons d'autre part que $\dfrac{2\ln(n)+2+3\pi}{\ln(n)}$ est une suite convergeant vers 2. On peut donc la majorer par une constante C indépendante de n.

On a donc montré que

$$\Lambda_{A_n} \leq C \ln(n).$$

$\square$

Remarque 3. On pourrait montrer que $\Lambda_{A_n} \geq C' \ln(n)$ pour tout ensemble A_n contenant $n+1$ points distincts.
Cela montre que le choix des points de Tchebychev est quasi-optimal puisque il donne une constante de Lebesgue qui "croît" comme $\ln$.
Bernstein a démontré plus précisément que $\dfrac{2}{\pi} \ln(n) \sim \Lambda_{A_n}$ lorsque $n \to \infty$.

Chapitre 4

Application à l'interpolation de Fejer-Hermite

4.1 Expression du polynôme de Fejer-Hermite en fonction de ceux de Tchebychev

D'après le théorème (2.4.1) vu dans le chapitre général sur l'interpolation, on sait que l'unique polynôme $P \in \mathcal{P}_{2n-1}$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} P(x_k) = y_k \\ \\ P'(x_k) = y'_k \end{cases} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

est donné par :

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k A_k(x) + \sum_{k=1}^{n} y'_k B_k(x)$$

avec $A_k(x) = \Big[1 - \dfrac{w''(x_k)}{w'(x_k)}(x - x_k)\Big] l_k^2(x)$ et $B_k(x) = (x - x_k) l_k^2(x)$.

Théorème 4.1.1. *Lorsque les x_k sont les racines du n-ième polynôme de Tchebychev, et que l'on choisit $y_k = f(x_k)$ et $y'_k = 0$, où f est une fonction continue sur $[-1, 1]$, on trouve le polynôme*

$$H_{2n-1}(f; x) = \sum_{k=1}^{n} y_k A_k(x) \ \in \mathcal{P}_{2n-1}$$

avec $A_k(x) = (1 - x x_k)\Big(\dfrac{T_n(x)}{n(x - x_k)}\Big)^2$.

Démonstration. [3] On a déjà vu dans le théorème (2.4.1) que la forme générale est donnée par :

$$H_{2n-1}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} y_k A_k(x) + \sum_{k=1}^{n} y'_k B_k(x).$$

Or, $y'_k = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$ donc $H_{2n-1}(f,x) = \sum_{k=1}^{n} y_k A_k(x)$.

Nous allons maintenant évaluer $A_k(x) = \Big[1 - \frac{w''(x_k)}{w'(x_k)}(x - x_k)\Big] l_k^2(x)$.

$w(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad x \in]-1, 1[$.

Par dérivation, on obtient : $2^{n-1} w'(x) = n \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}$, et

$2^{n-1} w''(x) = n \Big[\frac{x \ \sin(n \arccos x)}{(1 - x^2)^{3/2}} - \frac{n\sqrt{1 - x^2} \cos(n \arccos x)}{(1 - x^2)^{3/2}}\Big]$.

Pour $x = x_k = \cos\Big(\frac{2k - 1}{2n}\pi\Big)$ avec $k = 0, \ldots, n$,
$\cos(n \arccos x) = 0$, et $\sin(n \arccos x) = \sin((k - \frac{1}{2})\pi) = (-1)^{k-1}$.

On a alors $\quad 2^{n-1} w'(x_k) = \frac{(-1)^{k-1} n}{\sqrt{1 - x_k^2}}, \quad$ et $\quad 2^{n-1} w''(x_k) = \frac{n x_k (-1)^{k-1}}{(1 - x_k^2)^{3/2}}$,

d'où $1 - \frac{w''(x_k)}{w'(x_k)}(x - x_k) = 1 - \frac{x_k(x - x_k)}{1 - x_k^2} = \frac{1 - x x_k}{1 - x_k^2}$.

D'autre part, $l_k(x) = \frac{w(x)}{w'(x_k)(x - x_k)} = \frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1 - x_k^2} T_n(x)}{n(x - x_k)}$.

Finalement,

$$A_k(x) = \frac{1 - x x_k}{1 - x_k^2} \frac{T_n^2(x)(1 - x_k^2)}{n^2(x - x_k)^2} = (1 - x x_k)\Big(\frac{T_n(x)}{n(x - x_k)}\Big)^2.$$

Le polynôme peut alors s'écrire :

$$H_{2n-1}(f; x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(1 - x x_k)\Big(\frac{T_n(x)}{n(x - x_k)}\Big)^2.$$

□

4.2 Convergence du polynôme de Fejer-Hermite

Théorème 4.2.1. *Le polynôme H_{2n-1} vérifiant les conditions du théorème* (4.1.1) *converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$ et par suite*

$\lim_{n\to\infty} H_{2n-1}(f;x) = f(x).$

Démonstration. [3] Pour montrer la convergence uniforme, on cherche à majorer l'expression $\mid f(x) - H_{2n-1}(f;x) \mid$.
Observons tout d'abord que $H_{2n-1}(1;x) = \sum_{k=1}^{n} A_k(x)$ est, d'après le théorème (4.1.1), l'unique polynôme $P_{2n-1}(x)$ de degré inférieur ou égal à $2n-1$, tel que $P_{2n-1}(x_k) = 1$ et $P'_{2n-1}(x_k) = 0$, pour $k = 1, \ldots, n$.
On a alors

$$H_{2n-1}(1;x) = \sum_{k=1}^{n} A_k(x) = 1. \tag{4.1}$$

Il s'ensuit que $f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x) A_k(x)$ et
$f(x) - H_{2n-1}(f;x) = \sum_{k=1}^{n} (f(x) - f(x_k)) A_k(x)$ et donc
$\mid f(x) - H_{2n-1}(f;x) \mid \leq \sum_{k=1}^{n} \mid (f(x) - f(x_k)) A_k(x) \mid$.
Or, puisque $\mid x_k \mid \leq 1$ pour $-1 \leq x \leq 1, 1 - x x_k \geq 0$ et comme $A_k(x) = (1 - x x_k)\Big(\dfrac{T_n(x)}{n(x - x_k)}\Big)^2$ et $\Big(\dfrac{T_n(x)}{n(x - x_k)}\Big)^2 \geq 0, \;\; A_k(x) \geq 0.$
Ceci nous donne l'inégalité suivante :

$$\mid f(x) - H_{2n-1}(f;x) \mid \leq \sum_{k=1}^{n} \mid f(x) - f(x_k) \mid A_k(x). \tag{4.2}$$

D'après le théorème de Heine [1], comme f est continue sur $[-1, 1]$ qui est un compact, f est uniformément continue sur cet intervalle. Ceci signifie que

[1] Soient (E, d) un espace métrique compact et (F, d') un espace métrique quelconque. Le théorème de Heine affirme que toute fonction $f : E \to F$ continue sur E est uniformément continue.
En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas uniformément continue. C'est-à-dire $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $\forall\, \eta, \exists\, x, y \in E$ tels que si $d(x, y) \leq \eta$ alors $d'(f(x), f(y)) > \varepsilon$.
En particulier, pour $\eta = 1/n, \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E telles que $d(x_n, y_n) \leq 1/n$ et $d'(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$.
Comme E est compact, la suite $(x_n)_n$ admet une sous-suite $(x_{n_k})_k$ convergeant vers l. De même, la suite $(y_{n_k})_k$ admet une sous-suite $(y_{n_{k_j}})_j$ convergeant vers l'.
On a $d(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \leq 1/n_{k_j}$ et donc par continuité de la distance, $d(l, l') \leq 0$, d'où $l = l'$.
Or, on a aussi par continuité de $f, d'(f(l), f(l')) > \varepsilon$, ce qui aboutit à une contradiction puisque $l = l'$.

pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\text{si } \mid x - y \mid \leq \delta \text{ alors } \mid f(x) - f(y) \mid \leq \varepsilon, \ -1 \leq x, y \leq 1. \tag{4.3}$$

Soit x dans $[-1, 1]$, on peut séparer l'ensemble des $k = 1, \ldots, n$ en deux sous-ensembles, à savoir :
$I = \{k \text{ tel que} \mid x - x_k \mid < \delta\}$ et $J = \{k \text{ tel que} \mid x - x_k \mid \geq \delta\}$.
Donc, d'après (4.2),

$$\mid f(x) - H_{2n-1}(f; x) \mid \leq \sum_{k \in I} \mid f(x) - f(x_k) \mid A_k(x) + \sum_{k \in J} \mid f(x) - f(x_k) \mid A_k(x).$$

Evaluons maintenant chacune de ces sommes.

- Pour $k \in I$, d'après (4.1) et (4.3),

$$\sum_{k \in I} \mid f(x) - f(x_k) \mid A_k(x) \leq \sum_{k \in I} \varepsilon A_k(x) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} A_k(x) = \varepsilon.$$

- Considérons ensuite $A_k(x) = (1 - x x_k)\left(\dfrac{T_n(x)}{n(x - x_k)}\right)^2$ pour $k \in J$:

$0 \leq 1 - x x_k \leq 2$, de plus, $\mid T_n(x) \mid \leq 1$ et $\mid x - x_k \mid \geq \delta$. D'où, $A_k(x) \leq \dfrac{2}{n^2 \delta^2}$.
Comme f est continue sur le compact $[-1, 1]$, f est bornée sur l'intervalle $[-1, 1]$, c'est-à-dire qu'il existe une constante M telle que pour $-1 \leq x \leq 1$, $\mid f(x) \mid \leq M$. Donc, $\mid f(x) - f(x_k) \mid \leq 2M$ et par conséquent,

$$\sum_{k \in J} \mid f(x) - f(x_k) \mid A_k(x) \leq \sum_{k \in J} 2M \frac{2}{n^2 \delta^2} \leq \frac{4M}{n^2 \delta^2} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{4M}{n \delta^2}.$$

En combinant les sommes sur I et sur J, on obtient

$$\mid f(x) - H_{2n-1}(f; x) \mid \leq \varepsilon + \frac{4M}{n \delta^2}.$$

Si n est suffisamment grand, alors $\dfrac{4M}{n \delta^2} \leq \varepsilon$ et donc pour $-1 \leq x \leq 1$,

$$\mid f(x) - H_{2n-1}(f; x) \mid \leq 2\varepsilon.$$

Cette dernière inégalité montre que H_{2n-1} converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$, et par définition de la limite que $\lim\limits_{n \to \infty} H_{2n-1}(f; x) = f(x)$.

$\square$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons commencé par définir les polynômes de Tchebychev grâce à la formule $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ pour x dans $[-1, 1]$. Pour se familiariser avec cette notion, nous en avons étudié quelques propriétés élémentaires et résultats de base comme la relation de récurence $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, qui nous a permis de montrer que T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}, et l'expression des n racines et des $n+1$ extrema du n-ième polynôme de Tchebychev.
L'une de leurs applications à l'analyse numérique consiste en l'approximation des fonctions continues et en leur interpolation polynômiale. Nous avons donc commencé par rappeler un théorème général sur l'interpolation de Lagrange-Hermite : étant donnés $n+1$ points distincts, il existe un unique polynôme vérifiant certaines conditions sur ses dérivées successives en les points fixés. Nous nous sommes ensuite intéressées plus précisemment à deux cas particuliers qui sont l'interpolation de Lagrange et celle de Fejer-Hermite.

Dans le premier cas, la seule condition est l'égalité entre la fonction à interpoler f et le polynôme d'interpolation de Lagrange $L_{A_n}(f)$ aux $n+1$ points fixés a_i (constituant l'ensemble A_n). Graphiquement, cela correspond à se donner $n+1$ points dans le plan, une fonction f et à trouver un unique polynôme qui passe par ces points ; polynôme dont nous avons explicité l'expression au paragraphe (2.2).
Pour vérifier si ce polynôme est une bonne approximation de la fonction, nous avons recherché la formule de l'erreur puis la majoration de la norme de cette erreur d'interpolation. Cette majoration nous a amené à chercher les points interpolants tels que l'erreur soit la plus petite possible, c'est-à-dire, d'après la formule précisée au paragraphe (2.2.2), tels que le polynôme unitaire dont les racines sont les points d'interpolation ait une norme minimale. Ceci est vérifié dès lors que les a_i sont les racines du n-ième polynôme de Tchebychev et ce polynôme unitaire est même l'unique polynôme dont la norme infinie est minimale sur $[-1, 1]$.
On a introduit par la suite la notion de constante de Lebesgue Λ_{A_n}, définie comme étant la norme infinie du polynôme d'interpolation de Lagrange

$L_{A_n}(f)$ sur $[-1, 1]$. Celle-ci nous a permis de majorer l'erreur entre la fonction f et $L_{A_n}(f)$ en fonction de Λ_{A_n}.
Même si le meilleur choix possible pour interpoler une fonction continue reste le polynôme de meilleure approximation au sens des moindres carrés, $L_{A_n}(f)$ fournit une bonne approximation dès lors que Λ_{A_n} est minimale.
On a établi au paragraphe (3.2) que $\Lambda_{A_n} \leq C \ln(n)$ lorsque A_n est l'ensemble des points de Tchebychev et on a indiqué que l'on a toujours $\Lambda_{A_n} \geq C' \ln(n)$. Ainsi, le choix de ces points-là est quasi-optimal pour obtenir un polynôme qui interpole bien f.

Le second cas particulier d'interpolation est celle de Fejer-Hermite pour laquelle on a deux conditions : une sur le polynôme et l'autre sur sa dérivée. Pour l'application aux polynômes de Tchebychev, on cherche P tel que l'on ait égalité entre la fonction continue à interpoler f et le polynôme d'interpolation de Fejer-Hermite H_{2n-1} aux $n+1$ points fixés x_i, qui sont les racines de Tchebychev et tel que $P'(x_i) = 0$. Graphiquement, on procède de la même façon que pour l'interpolation de Lagrange mais avec une condition supplémentaire : on a des tangentes horizontales en les points interpolants.
On a finalement montré que ce polynôme converge uniformément vers la fonction continue f sur $[-1, 1]$.

Bibliographie

[1] Site Internet [*www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Chebyshev.html*].

[2] J.P. Calvi [*Cours de DEUG Interpolation*].

[3] Philip J. Davis, *Interpolation and approximation*, Dover, New-York, 1975.

[4] M. Crouzeix et A.L. Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, Paris, 1992.

[5] J.P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, P.U.G., Grenoble, 1991.