Théorie des graphes

Mémoire présenté par
SOMON Frédérique
et
FRAYSSE Amélie

SOMMAIRE

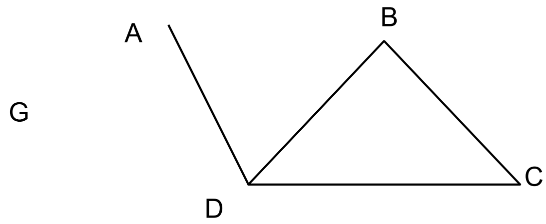
I.Présentation générale d'un graphe

1.Introduction

Définition "intuitive" du graphe 1.1

Un graphe est constitué d'un ensemble non vide d'éléments appelés sommets et d'un ensemble de paires de divers sommets appelées arêtes. Ou encore : un graphe est un couple formé d'un ensemble non vide de sommets et d'un ensemble d'arêtes joignant deux sommets.

Exemple 1.2



Ici G est un graphe dont l'ensemble des sommets est : { A , B , C , D }, et l'ensemble des arêtes est : { { A , D } , { B , C } , { C , D } , { D , B } }.

2.Plus mathématiquement…

Soit V un ensemble non vide de points, on appelle

$I_V = \{ (v, v) Є V^2\}$ et $V\_^2 = V^2 \setminus I_V = \{ (v_1, v_2) Є V^2 \mid v_1 \neq v_2\}$

Ici, nous allons définir une relation d'équivalence ~ sur $V\_^2$ telle que :

$(v_1, v_2) \sim (w_1 , w_2)$ si $(v_1 , v_2) = (w_1 , w_2)$ ou $(v_1 , v_2) = (w_2 , w_1)$.

Montrons que c'est bien une relation d'équivalence :

~ est réflexive : soit $(v_1 , v_2) Є V\_^2$ (donc $v_1 \neq v_2$)

$(v_1 , v_2) \sim (v_1 , v_2)$ car $(v_1 , v_2) = (v_1 , v_2)$

~ est symétrique : soient $(v_1 , v_2), (w_1 , w_2) Є V\_^2$

$(v_1 , v_2) \sim (w_1 , w_2) \Leftrightarrow (v_1 , v_2) = (w_1 , w_2)$
ou $(v_1 , v_2) = (w_2 , w_1)$
$\Leftrightarrow (w_1 , w_2) = (v_1 , v_2)$
ou $(w_2 , w_1) = (v_1 , v_2)$ c'est-à-dire $(w_1 , w_2) = (v_2 , v_1)$

donc $(w_1 , w_2) \sim (v_1 , v_2)$

~ est transitive : soient $(v_1 , v_2), (w_1 , w_2), (s_1 ,s_2) Є V\_^2$

et soient $(v_1 , v_2) \sim (w_1 , w_2)$ et $(w_1 , w_2) \sim (s_1 ,s_2)$

alors on a $(v_1 , v_2) = (w_1 , w_2)$ (1) et $(w_1 , w_2) = (s_1 , s_2)$
ou $(v_1 , v_2) = (w_2 , w_1)$ (2) ou $(w_1 , w_2) = (s_2 , s_1)$

si on a l'égalité (1) : $(v_1 , v_2) = (w_1 , w_2) = (s_1 , s_2)$

ou $= (s_2 , s_1)$

si on a l'égalité (2) : $(v_1 , v_2) = (w_2 , w_1) = (s_1 ,s_2)$

ou $= (s_2 , s_1)$

alors on obtient que $(v_1 , v_2) = (s_1 , s_2)$ ou $(v_1 , v_2) = (s_2 , s_1)$

donc $(v_1 , v_2) \sim (s_2 , s_1)$

On en conclut que ~ est une relation d'équivalence sur $V\_^2$.

$V\_^2 / \sim$ est l'ensemble des classes d'équivalence tel que chaque classe d'équivalence comporte exactement deux éléments.
Par exemple, la classe de (v_1 , v_2) est $[(v_1 , v_2)] = \{ (v_1 , v_2) , (v_2 , v_1) \}$ que l'on notera $[v_1 , v_2]$.

Avec ces concepts, on peut définir ce qu'est un graphe.

Définition 1.3

Un **graphe** G est un couple G = (V,E) où V est un ensemble non vide de sommets et E un sous ensemble de $V\_^2 / \sim$: E est un ensemble non ordonné de couples de sommets distincts.
On a alors : E = l'ensemble des arêtes du graphe

$|V|$ = le nombre de sommets du graphe

$|E|$ = le nombre d'arêtes de graphe.

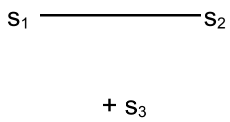
Le dessin du graphe G = (V,E) est obtenu en dessinant un point dans $\mathbb{R}^2$ pour chaque sommet $v \in V$ et si $[v , w] \in E$, alors on dessine un segment rejoignant les deux sommets.

Exemples de graphes 1.4

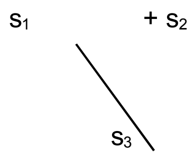
Dessinons les différents graphes possibles avec 3 sommets, on a donc
$V = \{ s_1 , s_2 , s_3 \}$.

ici $E = \varnothing$

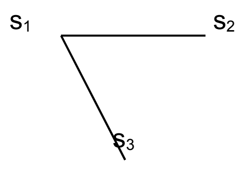
ici $E = \{ [s_1 , s_2] \}$



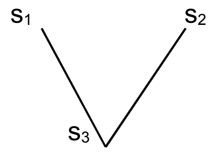
ici $E = \{ [s_1 , s_3] \}$



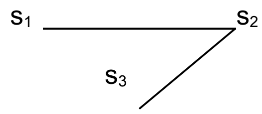
ici $E = \{ [s_1 , s_2] , [s_1 , s_3] \}$



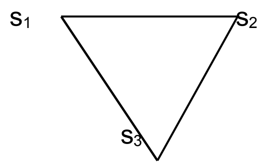
ici E = { [s_1 , s_3] , [s_2 , s_3] }



ici E = { [s_1 , s_2] , [s_2 , s_3] }



ici E = { [s_1 , s_2] , [s_1 , s_3] , [s_2 , s_3] }



Proposition 1.5

Un graphe G = (V,E) détermine une relation irréflexive et symétrique sur V. Inversement, une relation irréflexive et symétrique sur un ensemble fini V détermine un graphe.

Démonstration

Soit G = (V,E) un graphe, et soit R(E) une relation sur V définie par :

s_1 R(E) s_2 ssi [s_1 , s_2] $\in$ E.

Alors on prouve que :

R(E) est irréflexive :

Soit s $\in$ V, alors s R(E) s $\Leftrightarrow$ [s , s] $\in$ E $\forall$ s, mais [s , s] n'appartient pas à E car (s , s) n'appartient pas à $V\_^2$. R(E) est donc irréflexive.

R(E) est symétrique :

Soient s_1,s_2 $\in$ V, alors s_1 R(E) s_2 $\Leftrightarrow$ [s_1 , s_2] $\in$ E,

mais [s_1 , s_2] = { (s_1 , s_2) , (s_2 , s_1) } = [s_2 , s_1].

Donc s_1 R(E) s_2 $\Leftrightarrow$ s_2 R(E) s_1. R(E) est donc symétrique.

Inversement :

Si R est une relation irréflexive et symétrique sur V alors R est un sous-ensemble de V^2.

R est irréflexive donc (s , s) n'appartient pas à R $\forall$ s $\in$ V,

donc R C $V\_^2$.

R est symétrique, on a donc (s_1 , s_2) $\in$ R $\Leftrightarrow$ (s_2 , s_1) $\in$ R.

On définit E de telle sorte que [s_i , s_j] $\in$ E si et seulement si s_i R s_j. G = (V,E) est bien un graphe.

Dans la suite, nous allons voir que l'on peut associer aux graphes des matrices dont les composantes seront des booléens (ie : a_{ij} = 0 ou 1).

On note l'ensemble des booléens B.

II.Matrice d'un graphe

1.Définition

Définition 2.1
La matrice A Є $M_n(B)$ du graphe G = (V,E) avec |V| = n est définie comme suit :

$a_{ij} = 1$ si [s_i , s_j] Є E

$a_{ij} = 0$ sinon

S'il existe une arête qui relie le sommet s_i au sommet s_j alors $a_{ij} = 1$ et les sommets s_i et s_j sont dits sommets adjacents. On appelle cette matrice : **matrice d'incidence du graphe G**.

On voit clairement que $a_{ij} = a_{ji}$ à cause du fait que

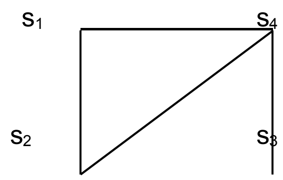
$$[\, s_i , s_j] = \{ (s_j , s_i) , (s_i , s_j) \} = [\, s_j , s_i].$$

On voit aussi que $a_{ii} = 0 \ \forall\ i = 1\ldots n$ car [s_i , s_i] n'appartient pas à E.

Exemples 2.2

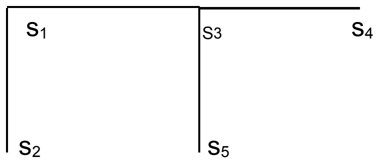
Exemple 2.2.1 : Soit la matrice d'incidence A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Un graphe lui correspondant est :



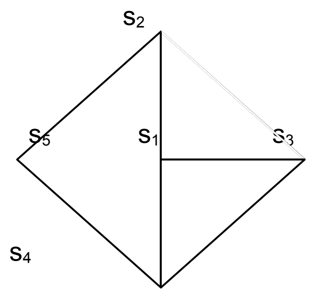
Exemple 2.2.2 : Soit la matrice d'incidence B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On peut la représenter par le graphe suivant :

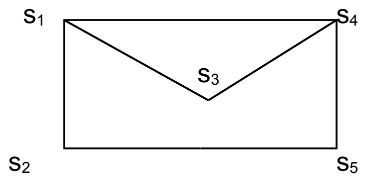


<u>Exemple 2.2.3</u> : Soit la matrice d'incidence C = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

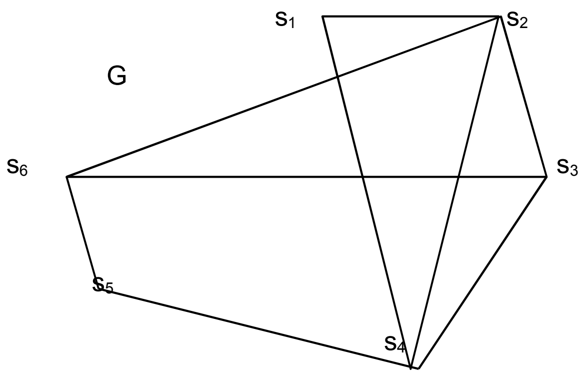
On peut la représenter par le graphe suivant :



mais on peut aussi obtenir (de manière équivalente) le graphe suivant :



<u>Exemple 2.2.4</u> : La matrice d'incidence du graphe G suivant :

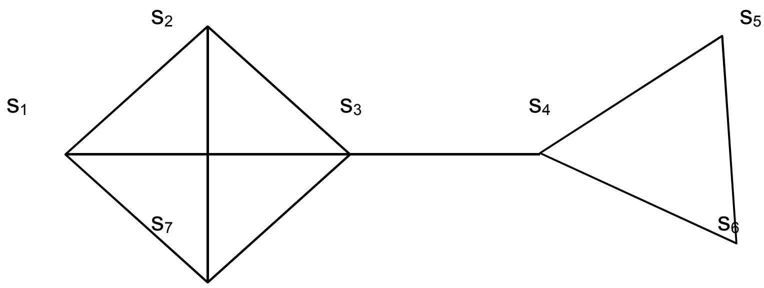


est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : on a bien toujours des zéros sur la diagonale et une matrice symétrique.

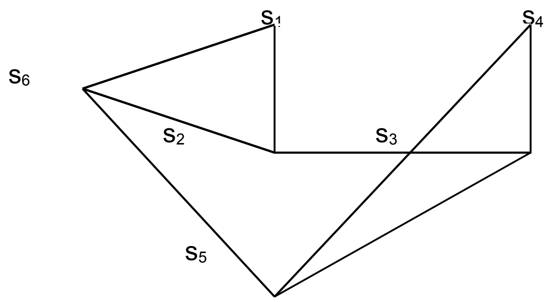
Exemple 2.2.5 : La matrice d'incidence du graphe G suivant :



est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.2.6 : Les caractéristiques de G = (V,E) :



G a pour matrice d'incidence A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a V = { s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , s_5 , s_6 } donc $\|V\| = 6$
E = { [s_1 , s_2] , [s_2 , s_3] , [s_3 , s_4] , [s_4 , s_5] , [s_5 , s_6] , [s_1 , s_6] , [s_2 , s_6] , [s_3 , s_5] } et donc $\|E\| = 8$.

Remarque 2.3

Les graphes sont essentiellement des objets topologiques plutôt que des objets géométriques, c'est à dire qu'ils expriment les liens entre des sommets plutôt que de définir la position des sommets et des arêtes dans l'espace. Un graphe peut donc être dessiné en une infinité de graphes différents mais équivalents. On donnera plus loin une définition formelle d'un graphe équivalent.

2.Chemins dans un graphe

Définition 2.4

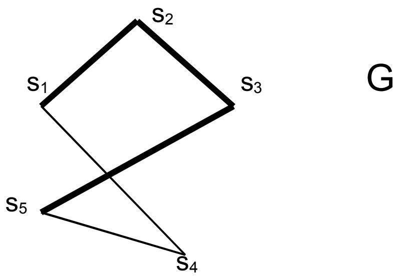
Si $G = (V,E)$ est un graphe, alors un **chemin de longueur k** de v à w est une suite $< v_0 , v_1 , \ldots , v_k >$ de sommets non nécessairement distincts tels que $v_i \in V \quad \forall\, i = 0,\ldots, k$ avec $v_0 = v$, $v_k = w$ et $[v_{i-1} , v_i] \in E \ \forall\, i = 1,\ldots, k$.

Définition 2.5

Avec les mêmes notations que dans la définition précédente, si $v_0 = v_k$, c'est à dire le premier sommet du chemin est égal au dernier sommet, alors ce chemin particulier est appelé **circuit**.

Exemple 2.6

Soit le graphe G ci-dessous, un chemin de longueur 3 qui va de s_1 à s_5 peut être représenté par les arêtes en gras sur le dessin de G.
Ce chemin C est noté : $< s_1 , s_2 , s_3 , s_5 >$.



Théorème 2.7

Soit A la matrice d'incidence du graphe $G = (V,E)$ avec $|V| = n$. $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $A^k \in M_n(\mathbb{N})$,
$(A^k)_{ij}$ est alors le nombre de chemins de longueur k reliant v_i à v_j.

Démonstration

Nous allons faire le démonstration par récurrence sur k.

Pour k = 1 :

Il y a au plus un chemin de longueur 1 joignant v_i à v_j. En effet, si $[v_i , v_j] \in E$ alors il y a un chemin de longueur 1 reliant v_i à v_j, sinon il n'y en a pas.
Le nombre de chemins est donc égal à $(A)_{ij}$.

On suppose que c'est vrai pour k-1, montrons-le pour k :

Posons $(A^{k-1})_{ij} = \alpha_{ij}$ et $(A)_{ij} = a_{ij}$.

On a alors $(A^k)_{ij} = (A^{k-1}A)_{ij} = \sum_{q=1}^{n} \alpha_{iq}\, a_{qj}$

$$= \sum_{q=1}^{n} (\text{nombre de chemins de longueur k-1 reliant } v_i \text{ à } v_q) \times$$
$$(\text{nombre de chemins de longueur 1 reliant } v_q \text{ à } v_j)$$

$$= \sum_{q=1}^{n} (\text{nombre de chemins de longueur k reliant } v_i \text{ à } v_j \text{ dont l'avant dernier sommet est } v_q)$$

= nombre de chemins de longueur k reliant v_i à v_j dont l'avant dernier sommet est v_1 ou v_2 ou … ou v_n

= nombre de chemins de longueur k reliant v_i à v_j dont l'avant dernier sommet est quelconque

= nombre de chemins de longueur k reliant v_i à v_j

= $(A^k)_{ij}$

La formule est vraie pour k et donc par récurrence, elle est vraie quelque soit k.

Corollaire 2.8

Il y a un chemin reliant v_i à v_j ($i \neq j$) dans le graphe G = (V,E) avec |V| = n si et seulement si le coefficient (i,j) de la matrice $A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$ est différent de zéro.

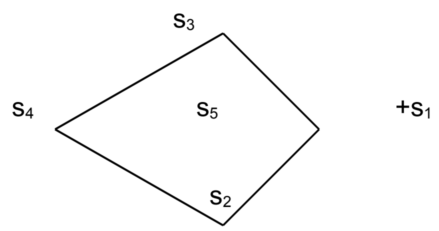
Démonstration

$\Leftarrow$ Supposons que le coefficient (i,j) de la matrice $M = A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$ soit différent de zéro. Les coefficients de A sont des booléens, ils sont donc positifs ou nuls. Les coefficients des matrices A^k (k=2,… ,n-1) sont dans $\mathbb{N}$ car ce sont les sommes ou les produits de nombres positifs ou nuls. Les coefficients de M sont donc positifs ou nuls, ie $(M)_{ij} \geq 0$. Comme $(M)_{ij} \neq 0$ alors $(M)_{ij} > 0$, ce qui signifie qu'il existe au moins une puissance k telle que $(A^k)_{ij} \neq 0$, il existe donc au moins un chemin de longueur k reliant v_i à v_j.

$\Rightarrow$ Montrons réciproquement que s'il y a un chemin reliant v_i à v_j, alors $(M)_{ij} > 0$. Remarquons d'abord que puisque $v_i \neq v_j$, s'il existe un chemin, alors ce chemin peut toujours être pris de longueur inférieure ou égale à n -1.
En effet, supposons que C soit un chemin de longueur p > n -1, c'est-à-dire $p \geq n$.
On a $C = < v_i, \ldots, v_j >$, à l'intérieur des crochets, il y a p+1 sommets avec $p \geq n$.
Quelque part entre v_i et v_j, on retrouvera deux fois le même sommet v_r :
$C = < v_i, \ldots, v_r, \ldots, v_r, \ldots, v_j >$, on est sûr que deux sommets vont se répéter, sinon on aurait p + 1 sommets distincts et donc p +1 > n, ce qui est impossible car il y a seulement n sommets par hypothèse.
On peut donc raccourcir le chemin en enlevant la boucle $< v_r, \ldots, v_r >$, et en la remplaçant par le seul v_r. De cette manière, on se ramène toujours à un chemin de longueur inférieure ou égale à n -1.
On a donc montré que s'il y a un chemin entre v_i et v_j alors il y a un chemin de longueur k avec $k \leq n -1$. Donc $(A^k)_{ij} > 0$ et donc $(M)_{ij} > 0$.

Exemple 2.9

Considérons le graphe suivant :



Sa matrice d'incidence est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Maintenant, $(A^2)_{2,4} = 0$: il n'y a pas de chemin de longueur 2 reliant s_2 à s_4 et $(A^2)_{2,3} = 2$: il y a deux chemins de longueur 2 pour relier s_2 à s_3. Ce sont les chemins $C_1 = < s_2 , s_4 , s_3 >$ et $C_2 = < s_2 , s_5 , s_3 >$.

Calculons maintenant A^3 :

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que $(A^3)_{2,4} = 4$: il y a quatre chemins de longueur 3 reliant s_2 à s_4:
$C_1 = < s_2 , s_4 , s_2 , s_4 >$, $C_2 = < s_2 , s_4 , s_3 , s_4 >$, $C_3 = < s_2 , s_5 , s_2 , s_4 >$, et enfin $C_4 = < s_1 , s_5 , s_3 , s_4 >$.

On calcule enfin A^4 :

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$A \in M_n(\mathbb{N})$, $|V| = 5$,calculons donc : $M = A + A^2 + A^3 + A^4$, on est dans les conditions du corollaire :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & 10 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$(M)_{1,5} = 0$, il n'y a donc pas de chemin reliant s_1 à s_5.
$(M)_{2,4} \neq 0$, il y a donc un chemin reliant s_2 à s_4 (avec le corollaire, on dit qu'il existe au moins un chemin mais on ne dit pas sa longueur).

III.Introduction à de nouveaux concepts

1.Sous-graphes

Définition 3.1

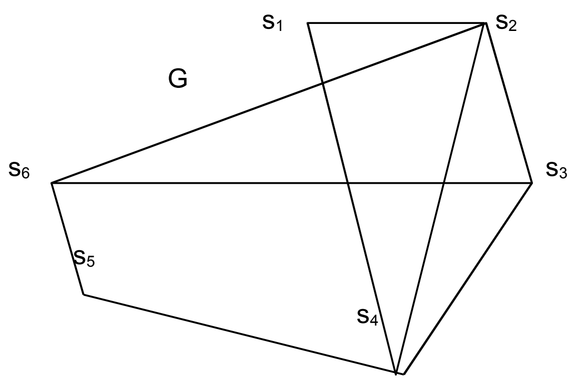
Un graphe H = (V',E') est dit **sous-graphe** de G = (V,E)
si V' C V (ou V' = V) et E' C E (ou E' = E).

Si V' = V alors H est appelé **sous-graphe générateur**.

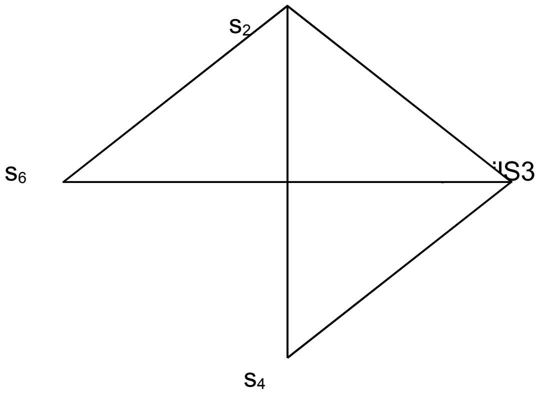
Si V' est un sous ensemble non vide de sommets du graphe (V,E) alors le sous-graphe engendré par V' est défini par :
[v , w] Є E' ⇔ v, w Є V' et [v , w] Є E.

Exemples 3.2

Exemple 3.2.1 : Un sous-graphe de G

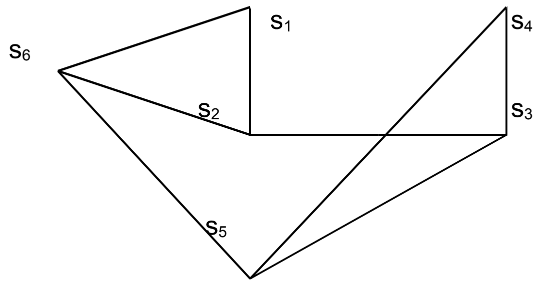


engendré par les sommets { s_2 , s_3 , s_4 , s_6} peut être représenté par le graphe H suivant :

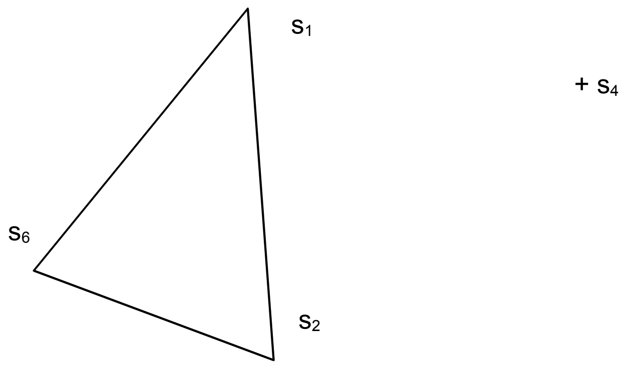


Il a pour matrice d'incidence $\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Exemple 3.2.2</u> : Soit G le graphe suivant :



Un sous-graphe du graphe G engendré par les sommets { s_1 , s_2 , s_4 , s_6 } peut être représenté par le graphe H = (V',E') suivant :



On a V' = { s_1 , s_2 , s_4 , s_6 }
[s_1 , s_2] Є E $\Rightarrow$ [s_1 , s_2] Є E'
[s_2 , s_6] Є E $\Rightarrow$ [s_2 , s_6] Є E'

$[s_1, s_6] \in E \Rightarrow [s_1, s_6] \in E'$

Sa matrice d'incidence est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

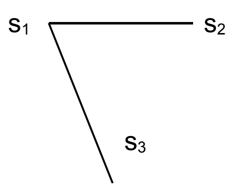
2.Graphes équivalents

Définition 3.3

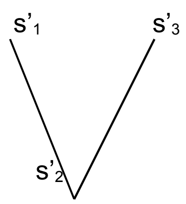
Si G = (V,E) et G' = (V',E') sont deux graphes, on dit que G et G' sont équivalents s'il y a une bijection $f : V \rightarrow V'$ telle que $v\ R(E)\ w \Leftrightarrow f(v)\ R(E')\ f(w)$

Exemple 3.4

Soit G :



et soit G' :



On veut montrer que le graphe G est équivalent au graphe G'
On cherche une fonction $f : V = \{ s_1, s_2, s_3\} \rightarrow V' = \{ s'_1, s'_2, s'_3\}$ telle que

$[s_i, s_j] \in E \Leftrightarrow [f(s_i), f(s_j)] \in E'$

On définit f par $f(s_1) = s'_2$, $f(s_2) = s'_3$ et $f(s_3) = s'_1$
Alors $[s_1, s_3] \in E \Rightarrow [f(s_1), f(s_3)] = [s'_2, s'_1] \in E'$
Et $[s_1, s_2] \in E \Rightarrow [f(s_1), f(s_2)] = [s'_2, s'_3] \in E'$
G est donc bien équivalent à G'.

3.Graphes complets

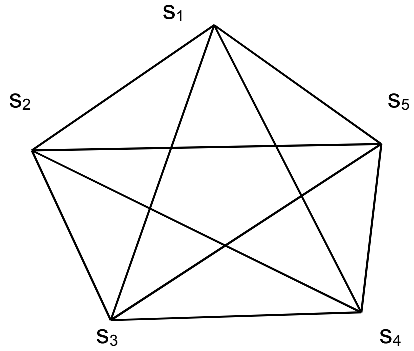
Définition 3.5

(i) Un graphe G = (V,E) est dit **complet** si pour tout $v_1, v_2 \in V$ on a $[v_1, v_2] \in E$. Un graphe complet avec n sommets est noté K_n.
(ii) Un graphe G = (V,E) est dit **bipartite** s'il existe une partition $\{V_1, V_2\}$ de V telle qu'il n'existe pas de sommets de V_1 qui soient reliés entre eux et qu'il n'existe pas de sommets de V_2 qui soient reliés entre eux.
Un graphe bipartite est dit complet si pour toute paire $v_1 \in V$ et $v_2 \in V$ on a :
$[v_1, v_2] \in E$. Si $|V_1| = m$ et $|V_2| = n$, alors le graphe bipartite complet (V,E) est noté $K_{m,n}$.

Exemples 3.6

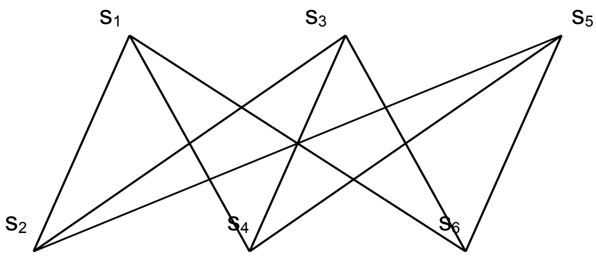
Exemple 3.6.1

Le graphe de K_5 se dessine ainsi :



Exemple 3.6.2

Le graphe de $K_{3,3}$ peut se représenter de la façon suivante :



On a ici $V_1 = \{ s_1 , s_3 , s_5 \}$ et $V_2 = \{ s_2 , s_4 , s_6 \}$

IV.Quelques propriétés sur les graphes

Proposition 4.1

Si G = (V,E) est un graphe avec |V|= n, alors la valeur maximale pour |E| est :
max |E| = n(n-1)/2.

Démonstration

Soit |V| = n, c'est-à-dire le graphe a n sommets. Notons $V = \{ s_1 , \ldots, s_n \}$.
On cherche à construire le plus grand nombre d'arêtes possible.
Pour s_1 : il peut y avoir n -1 arêtes qui rejoignent ce sommet.
Pour s_2 : il y a n -2 nouvelles arêtes qui rejoignent ce sommet (celle qui relie s_1 à s_2 a déjà été comptée).
…
Pour s_{n-1} : il y a n - (n-1) = 1 nouvelle arête à construire.
Pour s_n : toutes les arêtes sont déjà construites.

Le nombre que nous cherchons sera : max $|E| = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1$ c'est-à-dire max $|E| = n(n-1) / 2$.

Remarque 4.2

On peut donner une autre caractérisation d'un graphe complet :
Un graphe $G = (V,E)$ est **complet** si $|E| = n(n-1) / 2$, c'est-à-dire si la valeur maximale de $|E|$ est atteinte (avec $|V| = n$).

Proposition 4.3

Avec n sommets, on peut construire $2^{\wedge}(C^2_n)$ graphes différents.

Démonstration

Construire un graphe revient à choisir les arêtes, et choisir une arête revient à choisir une paire d'éléments (une paire de sommets). En effet il y a une correspondance bijective entre les arêtes et les paires : à l'arête $[s_i , s_j]$ on fait correspondre la paire $\{ s_i , s_j \}$. L'ensemble des arêtes E est déterminé par un ensemble de paires.
Pour le graphe A, $E = \{ \{ s_1, s_2 \} \}$.
Pour le graphe B, $E = \{ \{ s_1, s_3 \} , \{ s_2, s_3 \} \}$.
Pour le graphe C, $E = \varnothing$.

Dans le cas général, à chaque graphe dont les sommets sont déjà donnés par $V = \{ s_1 , \ldots, s_n \}$ correspond un et un seul ensemble de paires. Pour compter le nombre de graphes, il suffit de compter le nombre d'ensembles de paires.
On a n éléments (n sommets), on veut des sous-ensembles de deux éléments : il y a en tout C^2_n paires possibles.

Le nombre de graphes est donc égal au nombre de sous-ensembles d'un ensemble contenant C^2_n éléments.

En toute généralité, $| P(F) | = 2^{|F|}$, avec F un ensemble. Il y a autant de graphes que de sous-ensembles, et donc le nombre de graphes est égal à $2^{\wedge}(C^2_n)$.

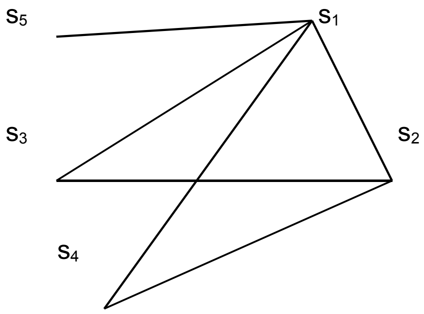
V.Le degré d'un sommet

Définition 5.1

Si G = (V,E) est un graphe, on définit l'application $\delta : V \to \mathbb{N} \cup \{ 0 \}$ avec $\delta(v)$ = le nombre d'arêtes ayant comme sommet $v \in V$.
On appelle $\delta(v)$ le **degré** du sommet v.

Exemple 5.2

Soit G :



alors :
$\delta(s_1) = 4$
$\delta(s_2) = 3$
$\delta(s_3) = 2$
$\delta(s_4) = 2$
$\delta(s_5) = 1$

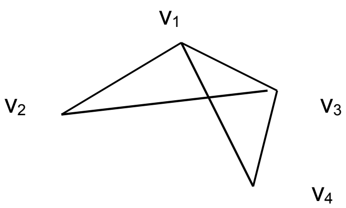
Proposition 5.3

Soit G = (V,E) un graphe, on a $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2\,|E|$

Démonstration

Chaque arête est comptée deux fois dans la somme : une fois pour le sommet v_i et une fois pour le sommet v_j.

Sur un exemple :



$|V| = 4$ et $|E| = 5$
Il y a quatre sommets et cinq arêtes. On a donc:

$$\delta(v_1) + \delta(v_2) + \delta(v_3) + \delta(v_4) = 3 + 2 + 3 + 2 = 10$$

De plus, on a : $2\,|E| = 2 \times 5 = 10$.
La formule est donc vérifiée.

Théorème 5.4

Dans un graphe G = (V,E), il y a un nombre pair de sommets qui sont de degré impair.

Démonstration

Sur l'exemple représenté par le dessin ci-dessus, il y a deux sommets v_1 et v_3 qui ont un degré impair, par conséquent le nombre de sommets de degré impair est bien pair.

Mathématiquement, on a $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2\,|E|$.

On écrit $V = V_1 \cup V_2$ avec $V_1 = \{ v \in V$ tel que $\delta(v)$ soit impair$\}$ et $V_2 = \{ v \in V$ tel que $\delta(v)$ soit pair$\}$. Ainsi, on a $2\,|E| = \sum_{v \in V_1} \delta(v) + \sum_{v \in V_2} \delta(v)$.

- → $\sum_{v \in V_2} \delta(v)$ est une somme de nombres pairs donc c'est pair.
- → $2\,|E|$ est aussi un nombre pair.

Donc $\sum_{v \in V_1} \delta(v)$ est pair. Mais chaque $\delta(v)$ est impair ($v \in V_1$).

On est arrivés à une somme de k nombres impairs qui est paire, avec $k = |V_1|$. On doit démontrer que k est pair.

Vérifions que la somme de k nombres impairs est paire si k est pair et impaire si k est impair.

On a deux cas :

→ k est pair :

$\sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} (2p_i + 1) = \sum_{i=1}^{k} 2p_i + \sum_{i=1}^{k} 1$. Ces deux sommes sont paires. En effet, $2p_i$ est un nombre pair donc sa somme est paire, de même $\sum_{i=1}^{k} 1 = k$ qui est pair par hypothèse.

Par conséquent, $\sum_{i=1}^{k} n_i$ est paire.

→ k est impair :

$\sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} (2p_i + 1) = \sum_{i=1}^{k} 2p_i + k$. D 'après le raisonnement utilisé ci-dessus, on voit que le premier membre est pair. Par contre, k est maintenant impair, par conséquent la somme $\sum_{i=1}^{k} n_i$ est impaire.

La propriété est donc démontrée.

VI.Graphes planaires et régions

Définition 6.1

(i) Un graphe G qui peut être dessiné dans un plan de façon à ce que ses arêtes ne se croisent pas est dit **planaire**. Ses arêtes peuvent être courbes.

Une **carte** est la représentation d'un graphe planaire.

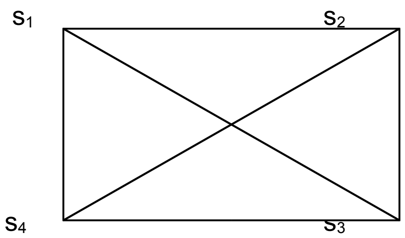
(ii) Un graphe $G = (V,E)$ est dit **connexe** si quelque soit $v_1 \in V$ et $v_2 \in V$, il existe un chemin joignant v_1 à v_2.

(iii) Une carte est dite connexe si le graphe correspondant est lui même connexe.

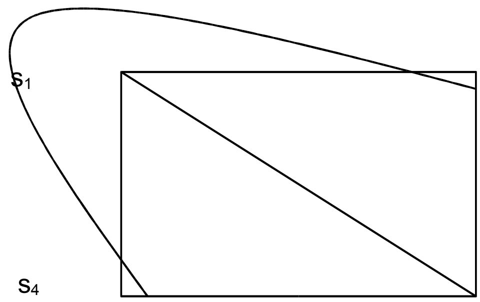
Exemples 6.2

Exemple 6.2.1
G=({s_1 , s_2 , s_3 , s_4} , {[s_1 , s_2] , [s_2 , s_3] , [s_3 , s_4] , [s_4 , s_1] , [s_1 , s_3] , [s_2 , s_4]})
Alors G est planaire.

En effet :

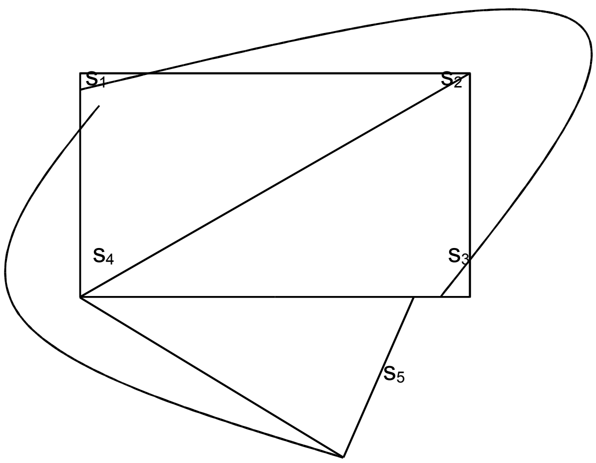


la représentation habituelle du graphe G



la carte de G

Exemple 6.2.2
Soit H = ({s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , s_5} , { [s_1 , s_2] , [s_2 , s_3] , [s_3 , s_4] , [s_4 , s_5] , [s_4 , s_1] , [s_4 , s_2] , [s_3 , s_5] , [s_5 , s_1] , [s_1 , s_3] })
H est planaire :



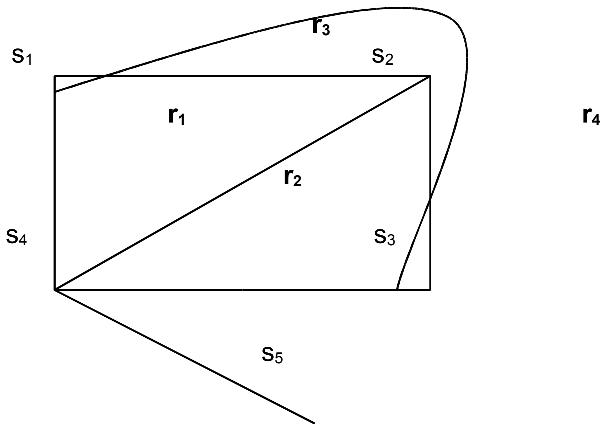
Si l'arête reliant s_2 à s_5 existait, alors H ne serait pas planaire (mais dans ce cas, H serait complet).

Définition 6.3
Une carte, représentation d'un graphe planaire, divise $\mathbb{R}^2$ en **régions** : des régions bornées qui sont à l'intérieur du graphe, délimitées par un circuit, et une région non bornée, qui est l'intérieur du complémentaire de l'union de toutes les régions bornées. La région non bornée est elle aussi délimitée par un circuit : celui qui parcourt toutes les arêtes des bords extérieurs du graphe.
A noter : une arête, faisant partie d'un circuit et délimitant une région ne fait pas partie de la région : une région est un ouvert (au sens topologique).
On appelle R l'ensemble des régions d'une carte.

Exemple 6.4

Dans le graphe (la carte) ci-dessous, on a : $R = \{ r_1 , r_2 , r_3 , r_4\}$.

Les régions r_1,r_2 et r_3 sont des régions bornées, elles sont délimitées par les circuits : $< s_1 , s_2 , s_4 , s_1>$, $< s_2 , s_3 , s_4 , s_2 >$ et $< s_1 , s_2 , s_3 , s_1>$ respectivement. La région r_4 est la région non bornée, délimitée par le circuit : $< s_1 , s_3 , s_4 , s_5 , s_4 , s_1 >$.



Formule d'Euler 6.5

Soit G = (V,E) un graphe. On a alors pour toute carte connexe de G :

$$|V| - |E| + |R| = 2.$$

Démonstration

Si $|V| = 1$, alors on a évidemment $|E| = 0$ et $|R| = 1$, la formule d'Euler est donc vraie pour $|V| = 1$.

On va utiliser le fait que toute carte connexe est obtenue à partir d'un sommet par la répétition des procédés suivants :

i) On ajoute un sommet et on le joint à un sommet déjà existant de façon à ce que le graphe reste planaire, ie : il faut que le nouveau sommet ne soit pas dans une région sur la frontière de laquelle le sommet déjà existant n'apparaît pas. Par ce procédé, la carte restera planaire (et connexe).

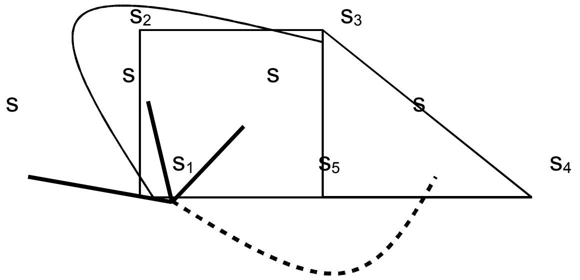
Explication de (i)

Soit s_i le sommet déjà existant et soit s le nouveau sommet. Supposons qu'on rajoute s dans une région sur la frontière de laquelle s_i apparaît. Cette région étant connexe par arcs (au sens topologique), il existe un arc continu γ joignant s à s_i tel que :

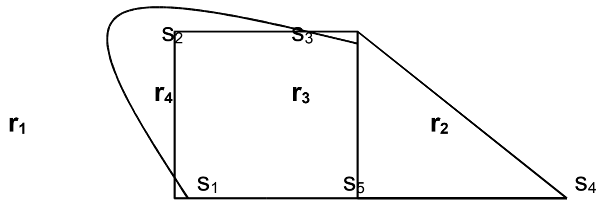
$\gamma(0) = s_i$, $\gamma(1) = s$ et $\forall\ t \in\ ]0,1[\ \gamma(t)$ appartient à la région

Exemples

1) Si on ajoute un nouveau sommet s et on le joint à s_1, il ne pourra pas être dans la région délimitée par le circuit $< s_3 , s_4 , s_5 , s_3 >$, sinon le graphe ne serait plus planaire.



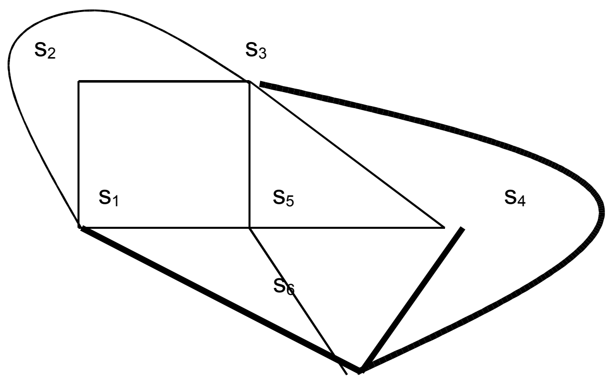
2) Si on ajoute un nouveau sommet s et on le joint à s_4, s pourra seulement appartenir aux régions r_1 ou r_2 car sinon le graphe ne serait plus planaire (s_4 ne fait pas partie du circuit frontière de la région r_3 et de la région r_4).



ii) On joint deux sommets déjà existant de telle sorte que le graphe reste planaire, c'est à dire : il faut que les deux sommets joints soient sur le circuit frontière d'une même région.

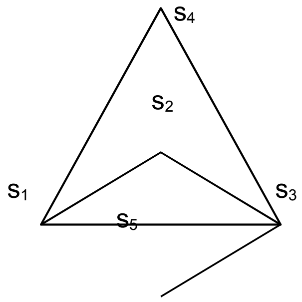
<u>Exemples</u>

1)



Le sommet s_6 ne pourra pas être joint à s_2 car s_2 et s_6 n'apparaissent pas dans le même circuit frontière. Le sommet s_6 pourra donc être joint seulement à s_1,s_3 et s_4.

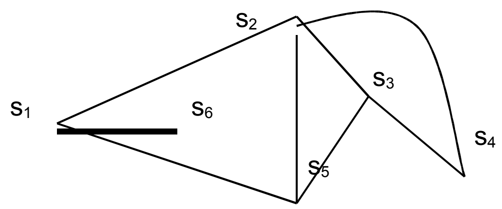
2)



Les sommets s_5 et s_2 ne pourront pas être joints si l'on veut garder le graphe planaire car s_5 n'apparaît pas dans les circuits frontières des régions auxquels s_2 appartient.

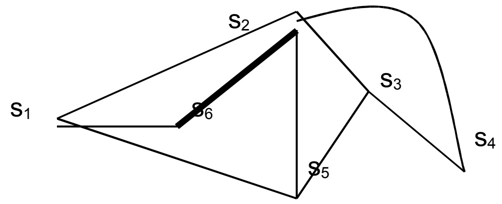
Preuve de la formule d'Euler :
Maintenant, montrons que la formule d'Euler est toujours vraie si l'on applique (i) et/ou (ii), plus précisément, montrons que |V| - |E| + |R| est constante.

Avec (i) : on ajoute un nouveau sommet et une nouvelle arête comme dans l'exemple ci-dessous (qui respecte toutes les conditions de (i)) :



|V| augmente de 1, |E| augmente de 1, |R| reste inchangé donc |V| - |E| + |R| ne change pas.

Avec (ii) : on joint deux sommets déjà existants comme dans l'exemple ci-dessous, en respectant toutes les conditions du (ii) :



|V| reste inchangé, |E| augmente de 1.
|R| augmente de 1. En effet, on veut joindre s_i et s_j. Comme ils font partie du même circuit frontière de la région r qui est : < s_i , … , s , s_j , t , … ,s_i >, on aura deux nouvelles régions r_i et r_j de circuit frontière : < s_i , … , s , s_j , s_i > et < s_j , t , … ,s_i , s_j >.
Donc |V| - |E| + |R| ne change pas.

Chaque carte peut être obtenue à partir du cas |V| = 1 en appliquant (i) et /ou (ii) plusieurs fois (comme dans les exemples ci-dessus). Alors, comme |V| - |E| + |R| = 2 quand |V| =1 et comme la valeur |V| - |E| + |R| ne varie pas quand on applique (i) ou (ii), on a obligatoirement |V| - |E| + |R| = 2 pour chaque carte, donc la formule d'Euler est vérifiée.

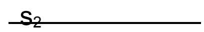
Exemple 6.6
Soit H = ({ s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , s_5 } , { [s_1 , s_2] , [s_2 , s_3] , [s_3 , s_4] , [s_4 , s_5] , [s_4 , s_1] , [s_4 , s_2] , [s_3 , s_5] , [s_5 , s_1] , [s_1 , s_3] })
On a vu dans l'exemple 6.2.2 que H était planaire.
→ La formule de Euler est vérifiée :

|V| = 5, |E| = 9 et |R| = 6, on a donc |V| - |E| + |R| = 2

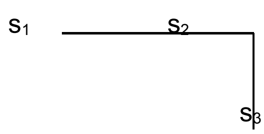
→ H peut être construit de la façon suivante :

1) |V| = 1 : H = ({ s_1}, ∅) : + s_1

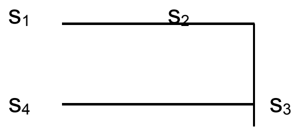
2) |V| = 2, |E| = 1, |R| = 1 (on applique (i)) : s_1



3) On applique (i) : H = ({ s_1 , s_2 , s_3 } , { [s_1 , s_2] , [s_2 , s_3] })

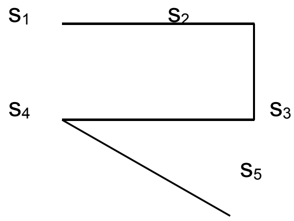


4) On applique (i) : H = ({ s_1 , s_2 , s_3 , s_4 } , { [s_1 , s_2] , [s_2 , s_3] , [s_3, s_4] })



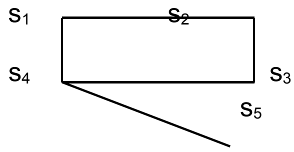
5) On applique (i) :

|V| = 5
|E| = 4
|R| = 1



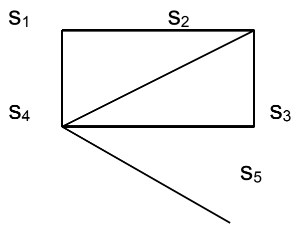
6) On applique (ii) :

|V| = 5
|E| = 5
|R| = 2



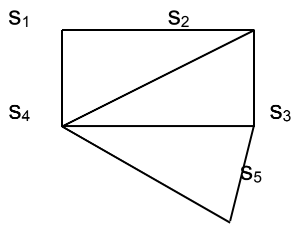
7) On applique (ii) :

|V| = 5
|E| = 6
|R| = 3



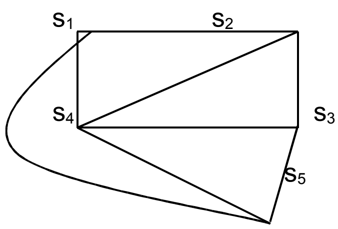
8) On applique (ii) :

|V| = 5
|E| = 7
|R| = 4



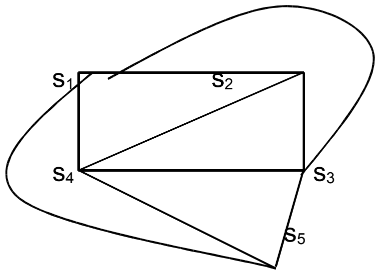
9) On applique (ii) :

|V| = 5
|E| = 8
|R| = 5



10) On applique (ii) :

$|V| = 5$
$|E| = 9$
$|R| = 6$



On obtient H au bout de ces dix étapes, en répétant (i) et (ii).

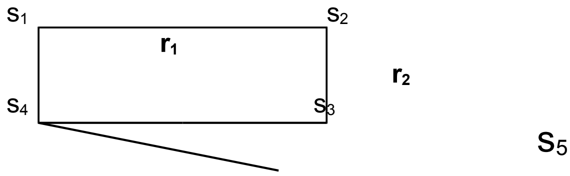
Définition 6.7

Si G = (V,E) est un graphe planaire, alors pour une carte de G, on définit le **degré** Δ_r d'une région r comme la longueur du circuit frontière de r.
On remarque qu'on a toujours $\Delta_r > 2$ sauf dans le cas particulier où le graphe a une seule arête.

Exemple 6.8

Soit le graphe G :

G



$\Delta_{r1} = 4$ et $\Delta_{r2} = 6$ car :
le circuit frontière de r_1 est : $< s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , s_1 >$
le circuit frontière de r_2 est : $< s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , s_5 , s_4 , s_1 >$.

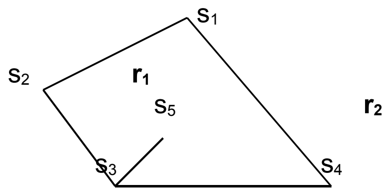
Proposition 6.9

Soit G = (V,E) un graphe planaire. Alors pour toute carte de G : $\sum_{r \in R} \Delta_r = 2\,|E|$

Démonstration

Il y a deux possibilités :

- → L'arête e se retrouve sur la frontière entre deux régions r_i et r_j et elle va être comptée deux fois : une fois dans Δ_{ri} et une autre fois dans Δ_{rj}. C'est le cas de l'arête [s_1 , s_2] dans notre exemple :



- → L'arête e est une arête « rentrante » dans une région r_i. On doit la parcourir deux fois (dans un sens puis dans l'autre) au moment d'écrire un circuit frontière de r_i. C'est le cas de l'arête [s_3 , s_5] dans notre exemple quand on écrit le circuit frontière de r_1.

Au total, toutes les arêtes sont comptées deux fois, donc: $\sum_{r \in R} \Delta_r = 2\,|E|$

Proposition 6.10

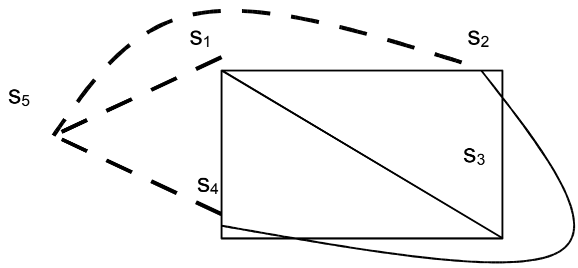
Soit G = (V,E) un graphe planaire avec |V| = 5, alors |E| ≤ 9.

Démonstration

Appelons s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 les sommets de G graphe planaire et soit G' = (V',E') le sous-graphe engendré par s_1, s_2, s_3, s_4. G' est un graphe planaire car il est le sous-graphe d'un graphe planaire.

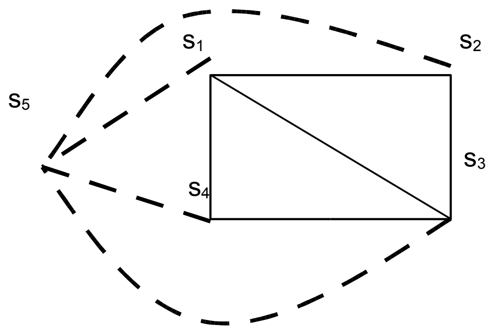
1er cas : G' est le graphe complet, il a 6 arêtes (d'aprés la formule de la proposition 4.1)

C'est le graphe complet, dessinons-le :



Le sommet s_5 va apporter au maximum 3 arêtes supplémentaires, on aura donc au total : $|E| \leq 9$.

2ème cas : $|E'| \leq 5$



Le sommet s_5 apporte 4 arêtes supplémentaires au maximum, donc au total : $|E| \leq 9$.

Dans tous les cas $|E| \leq 9$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 6.11

Les graphes K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaires.

Démonstration

(i) K_5 n'est pas planaire.

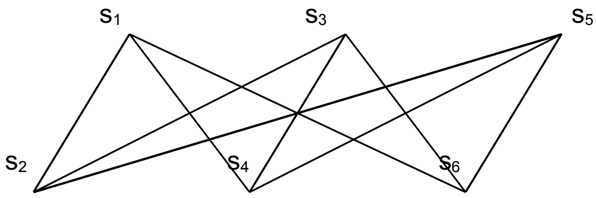
Raisonnons par l'absurde. On suppose que K_5 est planaire.
D'après la proposition 6.10, on a donc $|E| \leq 9$. Pour K_5, $|E| = 10$ et $|V| = 5$, ce qui implique que $10 \leq 9$, ceci est faux, donc K_5 n'est pas planaire.

(ii) $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

De même que pour K_5, on raisonne par l'absurde en supposant que $K_{3,3}$ est planaire. On a, d'après la proposition 6.9 :

$$\sum_{r \in R} \Delta_r = 2\,|E|$$

Nous allons montrer que pour toute région r on a $\Delta_r \geq 4$. En effet, $K_{3,3}$ est représenté par :



Δ_r étant la longueur du circuit qui est la frontière de la région r, on a toujours $\Delta_r \neq 2$, car $K_{3,3}$ n'est pas le graphe trivial réduit à une arête.
S'il existe une région avec $\Delta_r = 3$, alors il existe un circuit frontière de la forme :
$< s_i , s_j , s_k , s_i >$.
En particulier, cela implique que $[s_i , s_j] \in E$, $[s_j , s_k] \in E$, et $[s_k , s_i] \in E$.
Dans $K_{3,3}$, il est impossible de trouver trois sommets vérifiant cette propriété car :
$G = (\{ V_1 , V_2 \} , E)$ avec $V_1 = \{ s_1 , s_3 , s_5 \}$ et $V_2 = \{ s_2 , s_4 , s_6 \}$, et $\forall\ s_m \in V_1$, $\forall\ s_p \in V_2$, $[s_m , s_p] \notin E$ donc une des trois arêtes ci-dessus n'existe pas.
Par conséquent, $\Delta_r \geq 4$.

D'après la formule d'Euler, on a $|R| = 2 + |E| - |V| = 2 + 9 - 6 = 5$ et donc

$$\sum_{r \in R} \Delta_r \geq 5 \times 4 = 20$$

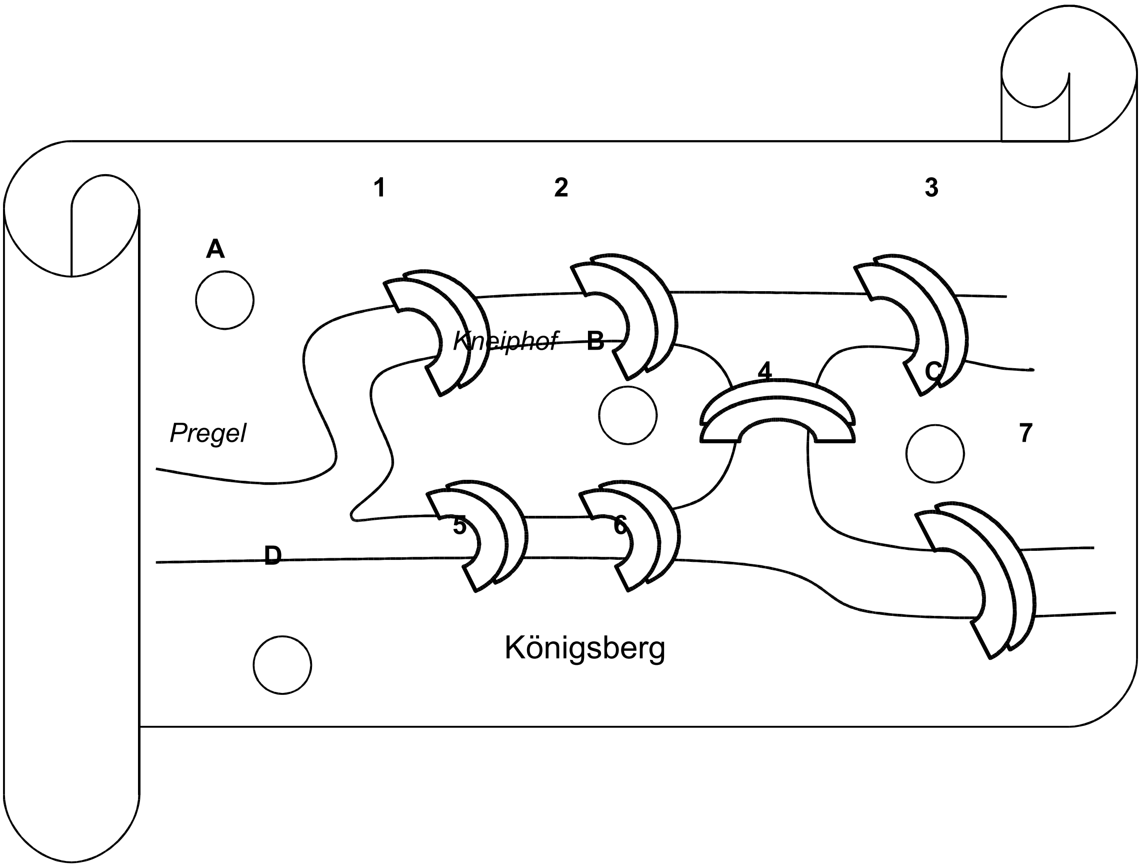
Donc, on a $2\,|E| \geq 20$ c'est à dire $|E| \geq 10$ ce qui est faux ($|E| = 9$).
Donc $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

VII.Théorème d'Euler

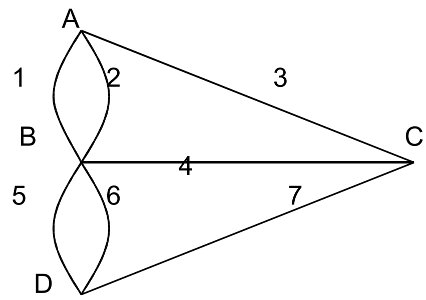
1.Origine du Théorème d'Euler

Sur les côtes de la mer baltique, « cachée » entre le Lituanie et le Pologne, se trouve une région de Russie connue sous le nom de Kaliningrad. Sa capitale Königsberg, comme elle s'appelait autrefois, était une superbe cité prussienne. Mais aujourd'hui, il n'en reste plus grand chose.

Königsberg a été construite sur les bords de la Pregel. Sept ponts reliaient la ville et ses deux îles, comme on peut le voir sur le dessin ci-contre :



L'histoire veut que Léonhard Euler (l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps), en visite dans cette ville, ait eu à résoudre le problème qui préoccupait fortement ses habitants : « Est-il possible de trouver un circuit qui emprunte une fois et une seule chacun des sept ponts de la ville ? »
Intrigué, Euler entreprit de démontrer qu'aucune solution n'était possible. Il analysa le problème en convertissant le plan des ponts en un graphe (plus précisément un multigraphe dont on donnera la définition dans le paragraphe suivant).



Les sommets A et D représentent les rives nord et sud de la rivière et les sommets B et C représentent les îles.
Les arêtes 1, 2, 3, 4, 5 et 6 représentent les ponts.
Euler décrivit les sommets comme étant soit pairs, soit impairs.

2.Résolution mathématique

Afin d'apporter une solution à ce problème, Euler étudia un grand nombre de graphe et c'est ainsi qu'il finit par prouver un théorème qui porte son nom.

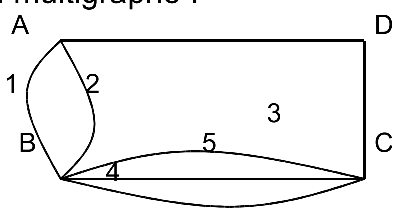
On aura besoin de définir certaines notions :

a)Notion de multigraphe

Un graphe est appelé multigraphe si deux sommets peuvent être reliés par plusieurs arêtes.

Définition 7.1
Un **multigraphe** est la donnée d'un couple G = (V,E') avec V un ensemble de sommets et E' un ensemble de couples de la forme (a , n) où a est une arête et n Є $\mathbb{N}$ *. n est appelé multiplicité de l'arête a.
Si n = 1 on retrouve la définition habituelle du graphe.

Exemple 7.2
Le graphe ci-dessus est un multigraphe :



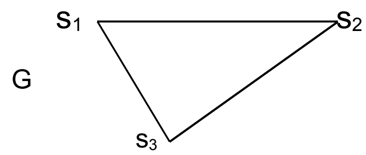
En effet, les sommets A et B sont reliés par deux arêtes 1 et 2 et le sommets B et C sont reliés par trois arêtes : 3, 4 et 5. On écrit aussi G = (V,E') = ({ A , B , C , D } , { ([A , B] , 2) , ([A , D] , 1) , ([C , D] , 1) , ([C , B] , 3) }).

b)Graphe eulérien

Définition 7.3
Un graphe est **eulérien** si et seulement s'il existe un chemin fermé (circuit) qui passe une fois et une seule par toutes les arêtes.

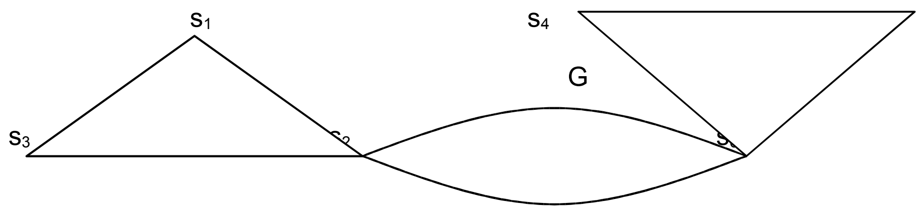
Exemples 7.4

Exemple 7.4.1
Soit G = (V,E) le graphe suivant :



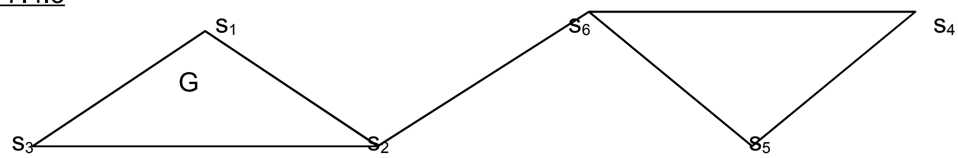
G est eulérien, le circuit eulérien est < s_1 , s_2 , s_3 , s_1 >.

Exemple 7.4.2



G est un graphe eulérien.
Son circuit est : < s_1 , s_2 , s_6 , s_4 , s_5 , s_6 , s_2 , s_3 , s_1 > par exemple.

Exemple 7.4.3



G n'est pas un graphe eulérien: le chemin < s_2 , s_1 , s_3 , s_2 , s_6 , s_4 , s_5 , s_6 > permet d'emprunter toutes les arêtes une seule fois mais ce n'est pas un circuit : il commence par le sommet s_2 mais finit par s_6.

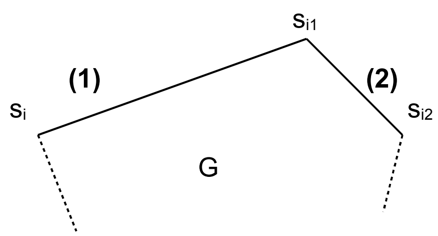
c)Théorème d'Euler

Théorème 7.5
Un graphe G = (V,E) n'ayant pas de sommet isolé (ie n'ayant pas de sommet n'étant relié à aucun autre) mais pouvant avoir des arêtes multiples est eulérien si et seulement si :
→ *il est connexe*
→ *et chacun de ces sommets est de degré pair.*

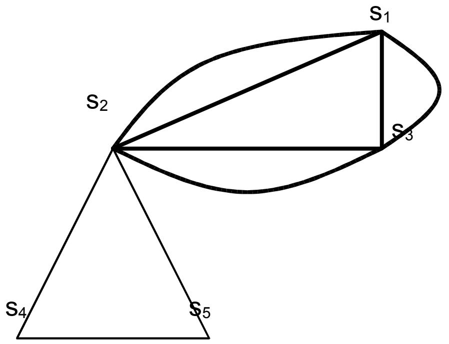
Démonstration
$\Rightarrow$ On suppose que G est eulérien. On veut montrer qu'il est connexe. Il existe un chemin passant par tous les sommets puisque G est eulérien.
Donc en particulier, si on prend deux sommets s_i et s_j à partir d'un circuit eulérien $C = < s_\alpha , \dots, s_i , \dots, s_j , \dots, s_\alpha >$ (ou $C = < s_\alpha , \dots, s_j , \dots, s_i , \dots, s_\alpha >$), on peut extraire un chemin $< s_i , \dots, s_j >$ (ou $< s_j , \dots, s_i >$) $\forall$ i , j ($i \neq j$). Donc G est connexe.

Montrons maintenant que chaque sommet est de degré pair. Chaque fois que le sommet s_i apparaît dans le circuit eulérien, un prédécesseur s_{i-} et un successeur s_{i+} apparaissent et donnent deux arêtes : $[s_{i-} , s_i]$ et $[s_i , s_{i+}]$ (attention : on peut très bien avoir $s_{i-} = s_{i+}$ dans le cas des arêtes multiples). L'existence de ces deux arêtes est encore valable pour le premier sommet et le dernier sommet du circuit eulérien, sauf que :
→ Si s_i est le premier sommet, son prédécesseur est celui du dernier sommet (qui lui est égal puisque c'est un circuit).
→ Si s_i est le dernier sommet, son successeur est le successeur du premier sommet (qui lui est égal).
Au total, le degré du sommet s_i est égal à deux fois le nombre de ses apparitions dans le circuit eulérien, sauf pour le premier sommet : son degré est égal au nombre de ses apparitions moins une, le tout fois deux.

$\Leftarrow$ On choisit le sommet s_i. Le graphe étant connexe, ce sommet est relié à un autre sommet s_{i1} **(1)**. Comme tous les sommets sont de degré pair (en particulier s_{i1}), il existe une arête, différente de la précédente, qui part de s_{i1} pour arriver à s_{i2} **(2)**.
On continue jusqu'à ce qu'on ne puisse plus avancer.



Exemple :



Sur le graphe ci-contre, cette méthode construit, par exemple, le circuit :
< s_1 , s_2 , s_3 , s_1 , s_2 , s_3 , s_1 >

Si toutes les arêtes sont utilisées, c'est terminé, on a un circuit eulérien. Sinon, on considère le sous-graphe engendré par les sommets des arêtes qui n'ont pas été utilisées.

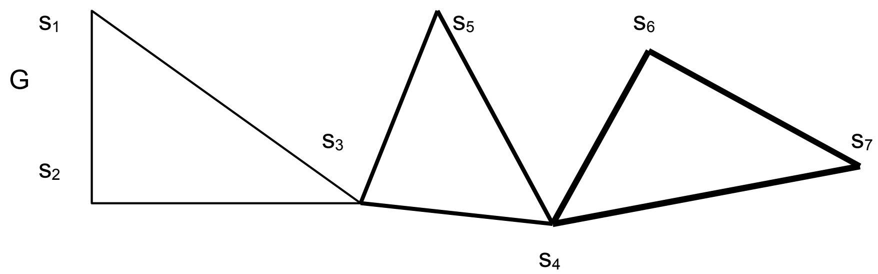
Chaque sommet de ce sous-graphe est lui même de degré pair.

C'est évident si le sommet est extérieur au circuit construit précédemment (s_4 et s_5 dans l'exemple) car dans ce cas le degré du sommet dans le sous-graphe est le même que son degré dans le graphe.
Par contre, si le sommet est intérieur au circuit (s_2 dans l'exemple) alors le degré de ce sommet dans le sous-graphe est égal à : [son degré dans le graphe, pair par hypothèse] - [le nombre d'arêtes utilisées dans le circuit précédent, pair (une arête arrivante + une arête partante)]. Dans l'exemple, le degré δ' de s_2 dans le sous-graphe est : $\delta'(s_2) = 6 - (2 \times 2) = 2$.

On peut appliquer la même procédure au sous-graphe en partant d'un sommet qui apparaît dans le circuit précédent. Un tel sommet existe car le graphe est connexe.

A partir des deux circuits obtenus, on forme un troisième circuit de la façon suivante :
le premier circuit est < s_i , … , s_c , … , s_i >, le second est < s_c , … , s_c >, on insère le second dans le premier à la place de s_c : < s_i , … , s_c , … , s_c , … , s_i >.
S'il reste encore des arêtes qui n'ont été prises dans aucun circuit, on continue. Comme à chaque étape, le nombre d'arêtes non parcourues est strictement décroissant, il existera une étape k où ce nombre d'arêtes non parcourues sera égal à zéro.

Exemple :
Construisons, avec la procédure décrite ci-dessus, le circuit eulérien de G = (V,E) :



On commence par voir que s_1 est relié à s_2 qui est relié à s_3 et lui même est relié à s_1. On construit donc le premier circuit : C_1 = < s_1 , s_2 , s_3 , s_1 >.

Toutes les arêtes ne sont pas utilisées.

On considère le sous-graphe G' formé par les arêtes qui n'ont pas été utilisées.
On a G' = (V', E') avec E' = { [s_3 , s_4] , [s_3 , s_5] , [s_4 , s_5] , [s_4 , s_6] , [s_4 , s_7] , [s_6 , s_7] }.

On voit que s_3 apparaît dans E’ et dans le circuit C_1, c’est donc à partir de ce sommet que l‘on va construire un nouveau circuit.

Le sommet s_3 est relié à s_4, qui est relié à s_5 et lui même est relié à s_3.
On construit donc le deuxième circuit $C_2 = < s_3 , s_4 , s_5 , s_3 >$.

Les arêtes ne sont pas encore toutes utilisées.

On considère le sous-graphe G’’ formé par les arêtes qui n’ont pas été encore utilisées.
On a G’’ = (V’’, E’’) avec $E'' = \{[s_4 , s_6] , [s_4 , s_7] , [s_6 , s_7]\}$.
On voit que s_4 apparaît dans E’’ et dans le circuit C_2, c’est donc à partir de ce sommet que l‘on va construire un nouveau circuit.

Le sommet s_4 est relié à s_6, qui est relié à s_7 et lui même est relié à s_4.
On construit donc le troisième circuit $C_3 = < s_4 , s_6 , s_7 , s_4 >$.

Maintenant toutes les arêtes ont été utilisées par un circuit, il reste à concaténer les circuits que l’on a obtenu.
On a : $C_1 = < s_1 , s_2 , \mathbf{s_3} , s_1 >$ et $C_2 = < \mathbf{s_3} , s_4 , s_5 , \mathbf{s_3} >$. A partir de ces deux circuits on crée $C' = < s_1 , s_2 , \mathbf{s_3} , s_4 , s_5 , \mathbf{s_3} , s_1 >$ en remplaçant s_3 dans C_1 par le circuit C_2.
On a ensuite $C' = < s_1 , s_2 , s_3 , \mathbf{s_4} , s_5 , s_3 , s_1 >$ et $C_3 = < \mathbf{s_4} , s_6 , s_7 , \mathbf{s_4} >$. A partir de ces deux circuits on crée $C = < s_1 , s_2 , s_3 , \mathbf{s_4} , s_6 , s_7 , \mathbf{s_4} , s_5 , s_3 , s_1 >$ en remplaçant s_4 dans C’ par le circuit C_3.
On a donc obtenu un circuit eulérien pour le graphe G.

d)Conclusion du problème des ponts de Königsberg

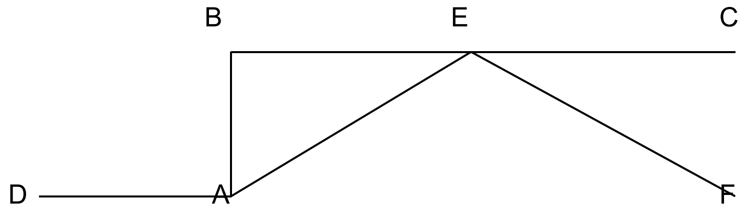
D’après le théorème d’Euler, le sommets A,B,C et D étant tous impairs, le graphe n’est donc pas eulérien et il n’y a donc pas de solution à ce problème. Heureusement que quelques temps plus tard un autre pont fut construit permettant d’« eulériser » le circuit.

VIII.Correspondance parfaite

Définition 8.1
Soit G = (V,E) un graphe, on dit que G admet une **correspondance parfaite** s’il existe une partition de V formée de paires { v , w } de sommets telle que pour chaque paire { v , w } on ait [v , w] Є E.
Une condition nécessaire immédiate pour qu’un graphe admette une correspondance parfaite est que le nombre de sommets soit pair.

Exemple 8.2 Problème typique en entreprises

On désire regrouper les employés deux à deux afin de former des équipes de travail.
Sur le graphe ci-dessous, les sommets représentent les employés de l'entreprise et les arêtes reliant deux sommets I et J représentent le fait que les deux employés I et J acceptent de travailler ensemble.



D accepte seulement de travailler avec A, on est donc obligé de créer la paire { A , D }, C accepte seulement de travailler avec E, on est donc aussi obligé de créer la paire { C , E }.
Un problème se pose alors. En effet, F accepte comme C de travailler uniquement avec E. On ne peut donc pas mettre F dans une paire.
Il est donc impossible de faire des paires selon les goûts de tous les employés !

Théorème 8.3

Si un graphe a 2n sommets, chacun de ses sommets étant de degré supérieur ou égal à n, alors le graphe admet une correspondance parfaite.

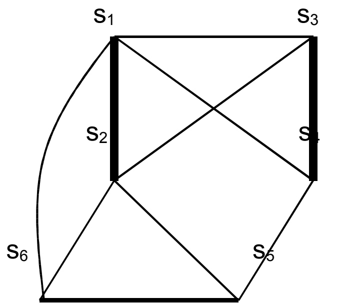
Démonstration

On propose une méthode algorithmique pour construire une correspondance parfaite.
Schéma de l'algorithme :
On construit une première paire { s ,w } avec la seule condition [s , w] Є E.
Ensuite, en supposant que l'on ait déjà construit r paires de sommets, $1 \leq r < n$, on montre alors que l'on peut augmenter le nombre de paires à r + 1.

Il y a deux cas :
→ Premier cas (le plus simple) : parmi les sommets restants, on peut en trouver deux s_i et s_j tels que [s_i , s_j] Є E. Dans ce cas là, on a trouvé la $(r + 1)^{\text{ième}}$ paire et c'est donc terminé.

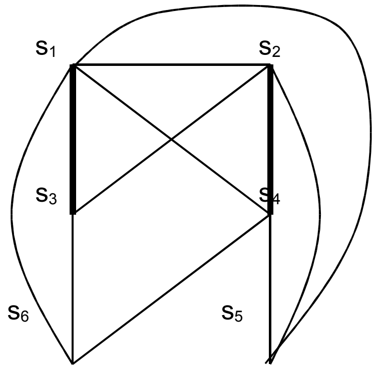
Exemple

On prend r tel que :
r < n = 3
car il y a
2n = 6 sommets



Prenons donc r = 2 : il y a deux paires déjà sélectionnées { s_1 , s_2 } et { s_3 , s_4} représentées par un trait noir très épais.
Dans ce cas, s_5 et s_6 ne sont pas mis en paires et [s_5 , s_6] Є E, on peut donc créer la paire { s_5 , s_6 } représentée par un trait noir épais sur le dessin.

→ <u>Second cas</u> : parmi les sommets restants, on ne peut pas en joindre deux par une arête du graphe comme par exemple sur le graphe suivant :



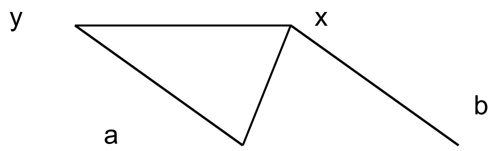
Parmi les sommets restants, prenons-en deux quelconques que l'on appellera a et b (dans la graphe qui nous sert d'illustration, on a a = s_5 et b = s_6 les deux sommets restants). On a donc : [a , b] $\not\subset$ E et davantage, a et b ne sont reliés qu'à des sommets qui ont déjà été mis en paires.

On va montrer qu'il existe deux sommets u et v tels que la paire { u , v } ait déjà été construite (de sorte que [u , v] Є E) et tels que [a , u] et [b , v] appartiennent à E. Dans ce cas là, on passera de r paires construites à r + 1 en remplaçant la paire { u , v } par les paires { a , u } et { b , v }.

Il reste donc seulement à démontrer l'existence de ces sommets u et v. Cette existence sera démontrée par l'absurde : on va supposer que u et v n'existent pas et on va montrer que cette supposition (jointe à l'hypothèse faite sur a et b) conduit à une contradiction.

Remarquons d'abord que si { x , y } est une paire déjà formée alors le graphe contient au plus deux arêtes parmi [a , x], [a , y], [b , x] et [b , y].

En effet, s'il en contenait trois, par exemple : [a , x] , [a , y] et [b , x], on trouverait u et v (comme décrit ci-dessus) : u = y et v = x.



On obtiendrait donc les paires { a , y } et { b , x } et cela contredirait l'hypothèse qui dit que u et v n'existent pas.

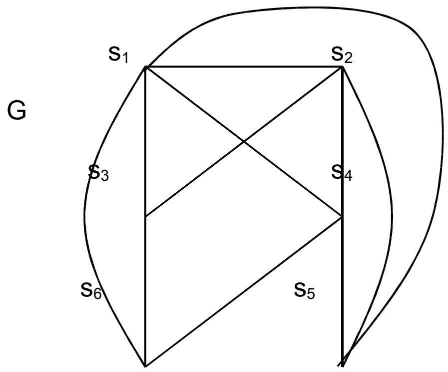
Ce raisonnement est valable pour toutes les paires déjà formées. Il y a donc au plus 2r arêtes issues de a ou b ayant leur seconde extrémité parmi les sommets déjà mis en paire. Comme, de plus, a et b sont reliés seulement avec les sommets déjà mis en paire, il y a au plus 2r arêtes issues de a et b.

Or, puisque le degré de a est supérieur ou égal à n ainsi que le degré de b, il y a au moins 2n arêtes (a et b ne sont pas reliés donc [a , b] n'existe pas, sinon on aurait 2n –1 arêtes).

<u>Résumé :</u> le nombre d'arêtes issues des sommets a ou b est inférieur ou égal à 2r et supérieur ou égal à 2n. Donc on a 2n ≤ 2r donc n ≤ r. Ce qui contredit l'hypothèse r < n.
On a donc démontré par l'absurde que les sommets u et v existent. On peut donc trouver une paire { u , v } déjà formée que l'on peut remplacer par les paires { a , u } et { b , v }.
On a donc construit r + 1 paires. Tant que r + 1 < n, on continue ces procédés pour obtenir n paires. Le graphe admettra donc une correspondance parfaite.

Exemple 8.4

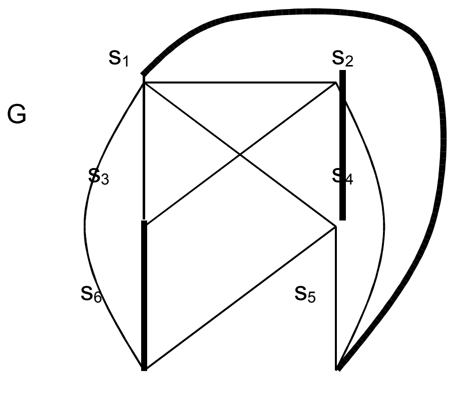
Afin d'illustrer le théorème 8.3, construisons intégralement les paires du graphe G = (V,E) suivant :



On commence à choisir un premier sommet : prenons s_1.
Comme [s_1 , s_3] Є E, alors on peut créer la paire { s_1 , s_3 }.

Choisissons un autre sommet : prenons s_2.
Comme [s_2 , s_4] Є E, alors on peut créer la paire { s_2 , s_4 }.

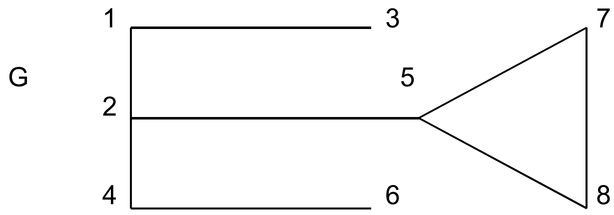
Il reste donc à mettre dans une paire les sommets s_5 et s_6.
Or, [s_5 , s_6] $\notin$ E, alors on ne peut donc pas créer la paire { s_5 , s_6 }. On est donc dans le second cas de la démonstration du théorème. On doit donc trouver une paire de sommets { u ,v } de manière à ce qu'on puisse remplacer la paire { u , v } par les deux nouvelles paires { s_5 , u } et { s_6 , v }. On peut remarquer que [s_6 , s_3] Є E et [s_5 , s_1] Є E. De plus, la paire { s_1 , s_3 } est déjà formée. On a donc trouvé la paire { u ,v } = { s_1 , s_3 }, ainsi on peut remplacer cette paire par les deux nouvelles paires { s_5 , s_1 } et { s_6 , s_3 }.
On a donc construit une correspondance parfaite pour le graphe G.



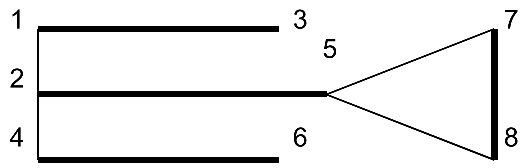
Remarque : On aurait pu construire la correspondance parfaite de G à partir de la paire { s_2 , s_4 }, et on aurait obtenu les paires : { s_1 , s_3 }, { s_6 , s_4 } et { s_5 , s_2 }.

Exemples 8.5

Exemple 8.5.1
Les paires suivantes {1,2} , {1,3} , {2,4} , {2,5} , {4,6} , {5,7} , {5,8} et {7,8} sont les seules paires possibles avec les sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.
Construisons le graphe G = (V,E) avec V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 } de telle sorte que l'on puisse obtenir une correspondance parfaite.

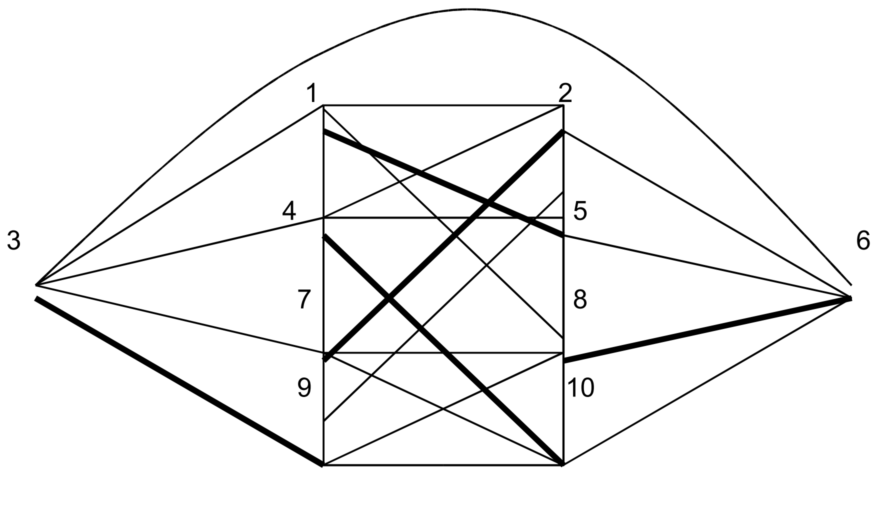


3 est seulement relié avec 1 donc on est obligé de former la paire { 1 , 3 }, de même pour { 4 , 6 }.
Il reste les sommets 2, 5, 7 et 8. On voit que 2 est relié à 1, 4 et 5, mais 1 et 4 sont déjà pris dans une paire, il reste donc seulement 5. On obtient ainsi la paire { 2 , 5 }.
Il reste 7 et 8, une arête les joint, on peut donc créer la paire { 7 , 8 }.
Voici le graphe avec les paires (en noir foncé) qui font que le graphe admet une correspondance parfaite :



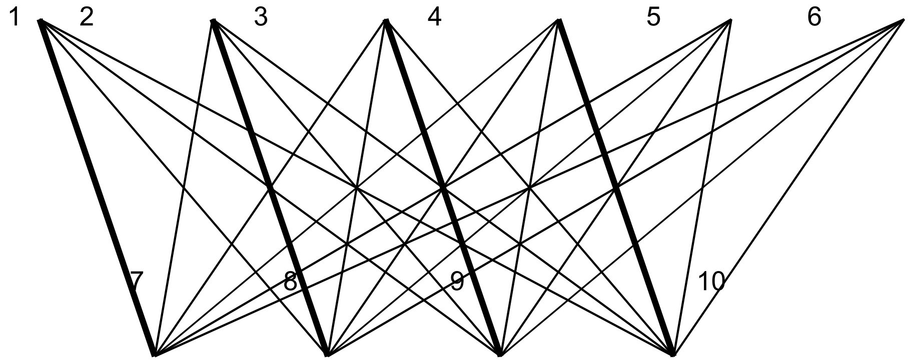
Remarque :
Le théorème dit qu'un graphe qui a 2n sommets avec chacun de ses sommets de degré supérieur ou égal à n admet une correspondance parfaite.
Ici, 2n = 8 donc n = 4 mais les sommets sont de degré inférieur à 4 : les sommets 3 et 6 sont de degré égal à 1, les sommets 1, 4, 7 et 8 sont de degré égal à 2 et les sommets 2 et 5 sont de degré égal à 3.
On n'est pas dans les hypothèses et pourtant ce graphe admet une correspondance parfaite.
Ceci montre que la condition donnée par le théorème n'est (évidemment) pas nécessaire, c'est uniquement une condition suffisante.

Exemple 8.5.2
Traçons un graphe ayant 10 sommets, chacun de ses sommets étant de degré supérieur ou égal à 5 et trouvons lui une correspondance parfaite :



Exemple 8.5.3

Construisons un graphe avec 10 sommets, chacun des sommets étant de degré supérieur ou égal à 4, sans correspondance parfaite



Dans cet exemple, on voit que les sommets 7, 8, 9 et 10 ne sont pas reliés entre eux, de même pour les sommets 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
Pour le sommet 1, il y a 4 possibilités de faire une paire. On peut le relier aux sommets 7, 8, 9 ou 10.
On obtient le même résultat en appliquant ce raisonnement aux sommets 2, 3, 4, 5 et 6.
Si on relie le sommet 1 à un de ces quatre sommets (7, 8, 9 ou 10), et si on fait de même pour les sommets 2, 3 et 4, ses sommets 7, 8, 9 et 10 seront donc tous pris. Par conséquent les sommets 5 et 6, l'étant pas reliés entre eux, ne peuvent pas être mis en paire.
On ne peut donc pas trouver de correspondance parfaite avec ce graphe.
Ce graphe correspond au graphe $K_{6,4}$ dont on a donné la définition auparavant.

Remerciements

Nous remercions Jean-Paul Calvi pour son aide précieuse et pour sa disponibilité tout au long de la préparation de ce mémoire.

Bibliographie

J.H. Van Lint – P.M. Wilson, A course in combinatorics,
Cambridge University Press.

D.J. Cooke – H.E. Bez, Computer Mathematics,
Cambridge University Press.

Ian Anderson, A first course in combinatorial mathematics,
Oxford University Press.