2.1 $(f \circ t_s)[a_0, \dots, a_d] = f[t_s(a_0), \dots, t_s(a_d)]$.

On $(f \circ t_s)[a_0, \dots, a_d]$

$= \text{coef de } x^d \text{ dans } L[a_0, \dots, a_d ; f \circ t_s] \quad (*)$

or $L[a_0, \dots, a_d ; f \circ t_s] = L[t_s(a_0), \dots, t_s(a_d) ; f] \circ t_s$

en effet le terme de droite est un polynôme de degré $\leq d$ qui prend les valeurs $(f \circ t_s)(a_i)$ aux points a_i.

Revenant à $(*)$ on a

$= \text{coef de } x^d \text{ dans } L[t_s(a_0), \dots, t_s(a_d) ; f] \circ t_s$

$= \text{coef de } x^d$ ___

$= f[t_s(a_0), \dots, t_s(a_d)]$.

<u>Rque</u>: On peut aussi faire une dem par récurrence.

2.2 On a $(\lambda f)[a_0, \dots, a_d] = \lambda \times f[a_0, \dots, a_d]$.

En effet, puisque $L[a_0, \dots, a_d ; \,]$ est une application linéaire $L[\;\; ; \lambda f] = \lambda L[\dots ; f]$ et la relation est obtenue en prenant les coefs de x^d des 2 côtés.

2.3 $(E_\sigma \circ t_s)(x) = E_\sigma(x+s)$

$$= e^{\sigma(x+s)}$$

$$= e^{\sigma s} e^{\sigma x} = \left(e^{\sigma s} E_\sigma\right)(x).$$

$$\boxed{E_\sigma \circ t_s = e^{\sigma s} E_\sigma}$$

2.4 Par récurrence sur d

$d = 0$ $\quad E_\sigma[0] = E_\sigma(0) = e^{\sigma 0} = 1 = \left(\frac{1}{0!}(e^\sigma - 1)^0\right)$

On suppose vrai pour d et on montre pour $d+1$.

$$E_\sigma[0,1,\dots,d+1] = \frac{E_\sigma[0,\dots,d] - E_\sigma[1,\dots,d+1]}{0-(d+1)}.$$

Relation de récurrence sur les différences divisées.

$$= \frac{E_\sigma[0,\dots,d] - E_\sigma[t_1(0),\dots,t_1(d)]}{-(d+1)}$$

$$= \frac{E_\sigma[0,\dots,d] - (E_\sigma \circ t_1)[0,\dots,d]}{-(d+1)}. \quad \leftarrow \text{question 2.1}$$

$$= \frac{E_\sigma[0,\dots,d] - (e^\sigma \cdot E_\sigma)[0,\dots,d]}{-(d+1)} \quad \leftarrow \text{question 2-3}$$

$$= \frac{\frac{(e^\sigma-1)^d}{d!} - \frac{e^\sigma (e^\sigma-1)^d}{d!}}{-(d+1)!} \longleftarrow$$

question 2.2 et HR

$$= \frac{(1-e^\sigma)}{-(d+1)!}\,\frac{(e^\sigma-1)^d}{d!}$$

$$= \frac{(e^\sigma-1)^{d+1}}{(d+1)!}.$$

3.1

$$L[a_0,\dots,a_n; F] = L[a_0,\dots,a_n; G+k]$$
$$= L[a_0,\dots,a_n; G] + L[a_0,\dots,a_n; k]$$
$$= L[a_0,\dots,a_n; G] + k.$$

cst donc poly de degré $\leq n$ donc égal à son poly d'interpolation

Appelons F et G deux primitive de f.
on a $F = G + k$.
donc $L[a_0,\dots,a_n; F] = L[a_0,\dots,a_n; G] + k$.
en dérivant on obtient le résultat.

3.2 $L[a_0, a_0; f^{(-1)}](x) = f(a_0) + f'(a_0)(x-a_0)$.
En dérivant, on arrive au résultat.

$$L[a_0, a_1; f^{(-1)}](x) = f(a_0) + f^{(-1)}[a_0, a_1](x-a_0)$$

en dérivant on obtient

$$f^{(-1)}[a_0, a_1] = \frac{f^{-1}(a_0) - f^{-1}(a_1)}{a_0 - a_1} = \frac{1}{a_1 - a_0}\int_{a_0}^{a_1} f(t)\,dt.$$

3.3 Propriétés du polynôme d'interpolation.

3.4 $\int_{a_i}^{a_j} \Delta[a_0,\dots,a_n; f](t)\,dt$

$$= \int_{a_i}^{a_j} \frac{d}{dt} L[a_0,\dots,a_n, f^{(-1)}](t)\,dt$$

$$= L[a_0,\dots,a_n; f^{-1}](a_j) - L[a_0,\dots,a_n; f^{-1}](a_i)$$
$$= f^{-1}(a_j) - f^{-1}(a_i) = \int_{a_i}^{a_j} f(t)\,dt.$$

(2) Le fait que $\Delta[a_0, \ldots, a_n; f]$ vérifie les propriétés indiquées est établi à la question précédente. Il reste simplement à établir l'unicité

Des hypothèses :

$$\begin{cases} \deg P_1, \deg P_2 \leq n-1 \\ \int_{a_0}^{a_i} P_1(t)\,dt = \int_{a_0}^{a_i} P_2(t)\,dt \quad i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

nous devons tirer $P_1 = P_2$. De manière équivalente, posant $Q = P_1 - P_2$.

Soit

<u>HYP</u> : $\deg Q \leq n-1$ $\quad \int_{a_0}^{a_i} Q(t)\,dt = 0 \quad i = 0, \ldots, n-1$.

Appelons Θ l'unique primitive de Q qui s'annule au point a_0. On a

$$0 = \int_{a_0}^{a_i} Q(t)\,dt = \Theta(a_i) - \Theta(a_0) = \Theta(a_i)$$

Donc $\Theta(a_i) = 0 \quad i = 1, \ldots, n$.

et par construction $\Theta(a_0) = 0$ donc

Θ admet $n+1$ racines, mais il est de degré n donc il est nul et $\Theta = 0$

$\Rightarrow Q = 0$.

<u>CQFD</u>