

# INTRODUCTION À LA THÉORIE DES GROUPES 2009-2010

## DOSSIER D'EXERCICES

---

1

Soit  $(G, *)$  un groupe. On définit une loi interne  $\Delta$  sur  $G$  par  $a\Delta b := b * a$ ,  $(G, \circ)$  est-il un groupe?

---

2

Soient  $(G, *)$  un groupe et  $f$  une bijection de  $G$  dans  $G$  ( $f \in \mathbf{S}(G)$ ). On définit une nouvelle loi  $\bullet$  par  $a \bullet b = f^{-1}(f(a) * f(b))$ . Montrer que  $(G, \bullet)$  est un groupe.

---

3

Soit  $(G, *)$  un groupe. Montrer que si tout élément  $g$  de  $G$  vérifie  $g^2 = e_G$  alors  $G$  est commutatif. Trouver un groupe vérifiant l'hypothèse et ayant un nombre infini d'éléments.

---

4

### GROUPES DE MATRICES

On rappelle que  $M_2(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices réelles d'ordre 2. On désigne par  $A^T$  la transposée de la matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , ainsi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Rappelons que pour  $A$  et  $B$  dans  $M_2(\mathbb{R})$ , on a

$$\det(A^T) = \det A \quad \text{et} \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

On rappelle enfin que  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$  désigne le groupe des matrices réelles d'ordre 2 inversibles muni de la multiplication habituelle des matrices.

On définit l'ensemble de matrices  $\mathbf{O}_2$  par

$$\mathbf{O}_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A A^T = I\},$$

où  $I$  désigne la matrice *identité*.

**4.1.** Quelle valeur peut prendre le déterminant d'un élément de  $\mathbf{O}_2$  ?

**4.2.** Montrer que  $\mathbf{O}_2$  est un sous-groupe de  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ . (On commencera par montrer que  $\mathbf{O}_2$  est bien inclus dans  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ .) S'agit-il d'un sous-groupe commutatif ?

**4.3.** On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(1) Montrer que  $f$  prend ses valeurs dans  $\mathbf{O}_2$ .

(2) Montrer que  $f$  est un morphisme de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $(\mathbf{O}_2, \cdot)$  et déterminer son noyau.

(3)  $f$  est-elle surjective ?

(4) Montrer que l'ensemble image de  $f$  — c'est-à-dire  $f(\mathbb{R})$  — est isomorphe au groupe  $\mathbf{U}$  des nombres complexes de module 1 muni de la multiplication habituelle des nombres complexes.

**4.4.** Soit  $n \geq 1$ . Trouver un sous-groupe de  $\mathbf{O}_2$  qui contienne exactement  $n$  éléments. On justifiera le fait que l'ensemble proposé est bien un sous-groupe d'ordre  $n$ .

**4.5.** Existe-t-il des éléments d'ordre infini dans  $\mathbf{O}_2$  ? Justifier clairement votre réponse.

**4.6.** On note maintenant  $G$  le sous-groupe de  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$  formé des matrices dont les coefficients sont des nombres entiers et le déterminant vaut 1 ou  $-1$ . On admet que cet ensemble  $G$  forme un sous-groupe de  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ . Par exemple, pour tout  $r \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in G.$$

(1) Déterminer tous les éléments du groupe  $H$  donné par l'intersection de  $\mathbf{O}_2$  et  $G$  :

$$H = \mathbf{O}_2 \cap G.$$

(2) Trouver deux matrices  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  telles que  $H = \langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$ .

(3) À quel groupe étudié en cours  $H$  est-il isomorphe ?

## 5

Déterminer tous les sous-groupes du groupe  $\mathbf{U}_8$  formé des racines 8-ième de l'unité (muni de la multiplication habituelle des nombres complexes).

## 6

Beaucoup d'étudiants pensent que si deux groupes finis ont le même nombre d'éléments alors ils sont isomorphes. Expliquer pourquoi c'est faux.

---

## 7

On considère un groupe  $(Q, \cdot)$  défini par

$$(7.1) \quad Q = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\},$$

avec

$$a^4 = e, \quad b^2 = a^2 \quad \text{et} \quad b^{-1}ab = a^{-1},$$

et  $e$  désigne l'élément neutre.

Le fait que  $(Q, \cdot)$  est effectivement un groupe est admis. Les relations indiquées permettent d'effectuer tous les calculs dans  $Q$ . Par exemple,  $a^3 \cdot b^2 = a$  car  $a^3 \cdot b^2 = a^3 \cdot a^2 = a^5 = a^4a = ea = a$ . On notera que le groupe  $Q$  n'est pas commutatif.

**7.1.** Quel est l'ordre de  $b$  ?

**7.2.** Effectuer les calculs suivants. Chaque résultat devra être un des huit éléments donnés dans la liste (7.1).

- (1)  $ba$ ,
- (2)  $ba^2$ ,
- (3)  $ba^3$ ,
- (4)  $(a^2b)^{-1}$ .

**7.3.** Etude d'un sous-groupe engendré.

- (1) Donner la liste des éléments du sous-groupe  $H$  de  $Q$  engendré par  $a^2$  et  $b$ , c'est-à-dire  $H = \langle a^2, b \rangle$  et faire une table de  $H$ .
- (2)  $H$  est-il un groupe cyclique ?

**7.4.** Trouver un automorphisme de  $Q$  qui soit différent de l'identité.

---

## 8

### LE PRODUIT SEMI-DIRECT DE DEUX GROUPES

On étudie une méthode pour construire un nouveau groupe à partir de deux autres groupes. Cette méthode généralise le produit direct de deux groupes étudié en cours.

La partie 8.1 est très simple et la partie 8.4 peut être traitée en utilisant seulement la définition de la loi  $\perp$  donnée à la partie 8.2.

On rappelle que si  $N$  est un groupe  $\mathbf{Aut}(N)$  désigne l'ensemble des automorphismes de  $N$ , c'est-à-dire, l'ensemble des morphismes bijectifs de  $N$  dans lui-même.  $\mathbf{Aut}(N)$  forme un groupe lorsqu'on le munit de la loi de composition des applications. L'élément neutre de  $(\mathbf{Aut}(N), \circ)$  est l'application identité.

**8.1.** On considère les sous-groupes de  $\mathbb{C}^*$ ,  $\mathbf{U}_2$  et plus généralement  $\mathbf{U}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , formés respectivement des racines secondes et  $n$ -ièmes de l'unité (et muni de la loi de multiplication des nombres complexes).

- (1) Donner la liste des éléments de  $\mathbf{U}_2$  et  $\mathbf{U}_n$ .
- (2) Montrer que l'application  $z \rightarrow z^{-1}$  est un élément de  $\mathbf{Aut}(\mathbf{U}_n)$ .
- (3) Pour  $h \in \mathbf{U}_2$ , on définit l'application  $\phi_h$  par  $\phi_h(z) = z^h$ . Montrer que l'application  $\phi : h \rightarrow \phi_h$  définit un morphisme de  $(\mathbf{U}_2, \cdot)$  dans  $(\mathbf{Aut}(\mathbf{U}_n), \circ)$ .

**8.2.** On suppose que  $H$  et  $N$  sont deux groupes. Les lois de ces deux groupes sont représentées par le même symbole  $(*)$  et on désigne aussi par la même lettre  $e$  l'élément neutre de  $H$  et de  $N$ . On suppose en outre que l'application  $\phi : h \rightarrow \phi_h$  est un morphisme de  $H$  dans  $\mathbf{Aut}(N)$ . Autrement dit,  $\phi_h$  est un morphisme bijectif de  $N$  dans lui-même. En particulier, on a les relations suivantes

$$(8.1) \quad \phi_h(n_1 * n_2) = \phi_h(n_1) * \phi_h(n_2), \quad h \in H, n_1, n_2 \in N,$$

$$(8.2) \quad \phi_{h * h'}(n) = (\phi_h \circ \phi_{h'})(n) = \phi_h(\phi_{h'}(n)), \quad h, h' \in H, n \in N.$$

On munit maintenant  $G = N \times H$  de la loi interne  $\perp$  définie par la relation

$$(n_1, h_1) \perp (n_2, h_2) = (n_1 * \phi_{h_1}(n_2), h_1 * h_2).$$

- (1) Montrer que  $(e, e)$  est élément neutre de  $G$  pour  $\perp$ .
- (2) Montrer que l'élément symétrique de  $(n, h)$  est

$$(\phi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}).$$

- (3) Montrer que la loi  $\perp$  est associative.

Les questions précédentes montrent que  $(G, \perp)$  est un groupe. Lorsque  $H$  et  $N$  sont des groupes finis alors  $G$  est fini d'ordre  $|N| \times |G|$ .

**8.3.** On étudie les liens entre  $G$ ,  $H$  et  $N$ .

- (1) Montrer que l'application  $P : G \rightarrow H$  définie par  $P((n, h)) = h$  est un morphisme de groupe.
- (2) Quel est le noyau de  $P$ ? Montrer que ce noyau est isomorphe à  $N$ .
- (3) Montrer en utilisant les propriétés de  $P$  et un théorème du cours que  $G/\ker P$  est isomorphe à  $H$ .

**8.4. Etude d'un exemple.** Dans cette partie, on prend  $H = \mathbf{U}_2$  et  $N = \mathbf{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$  et on considère le morphisme  $\phi : h \in \mathbf{U}_2 \rightarrow \phi_h \in \mathbf{Aut}(\mathbf{U}_4)$  où  $\phi_h(g) = g^h$ . On pose

$$e = (1, 1), \quad a = (i, 1) \quad \text{et} \quad b = (i, -1).$$

- (1) Effectuer les calculs suivants.
  - (a)  $(i, -1) \perp (i, 1)$ ,
  - (b)  $(i, -1) \perp (-1, 1)$ ,
  - (c)  $(i, -1) \perp (-i, 1)$ .
- (2) Montrer que  $G = \{e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$ .
- (3) Donner la table du groupe  $G$ .

---

## 9

Déterminer tous les sous-groupes de  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ . Pour chaque sous-groupe, on donnera la liste de tous les éléments. On rappelle que  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  est muni de la loi d'addition des classes, coordonnée par coordonnée.

---

## 10

### GRUPE DES AUTOMORPHISMES INTÉRIEURS

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe.

**10.1.** Montrer que l'ensemble  $\mathbf{Aut}(G)$  formé de tous les automorphismes de  $G$  est un groupe lorsqu'on le munit de la loi de composition des applications.

**10.2.** On appelle automorphisme intérieur de  $G$ , toute application de la forme  $\phi_g = x \in G \rightarrow g^{-1} \cdot x \cdot g$ .

**10.2.1.** Vérifier que les automorphismes intérieurs sont effectivement des automorphismes de  $G$ .

**10.2.2.** Montrer que  $\mathbf{Int}(G) \leq \mathbf{Aut}(G)$  et que  $\mathbf{Int}(G) \simeq G/Z(G)$ . (On recherchera un morphisme de  $G$  dans  $\mathbf{Int}(G)$ .)

**10.3.**  $\mathbf{Int}(G)$  est-il un sous-groupe distingué de  $\mathbf{Aut}(G)$  ?

---

## 11

### UN SOUS-GROUPE DE $\mathbf{S}_4$

On considère les éléments suivants du groupe de permutation  $\mathbf{S}_4$  :  $\sigma_1 = (12)(34)$ ,  $\sigma_2 = (13)(24)$ ,  $\sigma_3 = (14)(23)$ . On rappelle que  $e$  désigne l'élément neutre de  $(\mathbf{S}_4, \cdot)$ , autrement dit  $e$  est la bijection *identité*.

- (1) Déterminer l'ordre de chaque élément de  $H := \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ .
- (2) Montrer que  $H$  est un sous-groupe de  $\mathbf{S}_4$ . (On pourra construire une table.)  
 $H$  est-il commutatif ?
- (3) Déterminer tous les sous-groupes de  $H$ . (Justifier votre réponse.)
- (4) (a) Soit  $f \in \mathbf{S}_4$ . Montrer que

$$f \cdot (12)(34) \cdot f^{-1} = (f(1)f(2))(f(3)f(4)).$$

(b) Montrer que  $H$  est un sous-groupe *distingué* de  $\mathbf{S}_4$ .

- (5) Montrer que  $H$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ . (On pourra construire un isomorphisme explicite entre  $H$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .)

(UPS, L2, 2005)

---

## 12

### GÉNÉRATEURS DES GROUPES SYMÉTRIQUES ET ALTERNÉS

Soit  $n \geq 2$ .

**12.1.** Montrer que tout cycle  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  ( $p \geq 2$ ) s'écrit comme un produit de transpositions.

**12.2.** Montrer que toute permutation  $(i, j)$  avec  $i < j$  vérifie

$$(i, j) = (i, i+1)(i+1, i+2) \cdots (j-1, j)(j-2, j-1)(j-3, j-2) \cdots (i, i+1).$$

**12.3.** Montrer que

$$(k, k+1) = (1, k)(1, k+1)(1, k).$$

**12.4.** Montrer les égalités suivantes

$$(1) \mathbf{S}_n = \langle (1, 2), (1, 3), \dots, (1, n) \rangle.$$

$$(2) \mathbf{S}_n = \langle (1, 2), (1, 2, \dots, n) \rangle$$

Indication : Posant  $\sigma = (1, 2, \dots, n)$ , on pourra montrer que

$$\sigma^k(12)\sigma^{-k} = (k+1, k+2).$$

**12.5.** Soit  $n \geq 3$ . Montrer que  $(a, b)(a, c) = (a, c, b)$  et  $(a, b)(c, d) = (a, c, b)(a, c, d)$ .  
En déduire

(3)  $\mathbf{A}_n$  est engendré par l'ensemble des 3-cycles.

---