

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES GROUPES 2008-2009

DOSSIER D'EXERCICES

1

GROUPES DIÉDRAUX

On rappelle que $\mathbf{Is}(P)$ désigne le groupe des isométries affines du plan affine euclidien orienté P . Ce groupe contient exactement quatre types d'éléments :

- (1) les rotations (déterminées par leur centre et leur angle) ;
- (2) les translations (déterminées par leur vecteur) ;
- (3) les symétries orthogonales (ou réflexions) (déterminées par leur axe) ;
- (4) les réflexions glissées (produit d'une symétrie orthogonale s_Δ avec une translation $t_{\vec{v}}$ de vecteur parallèle à l'axe Δ).

Les deux premières familles regroupent les isométries directes qui forment un sous-groupe de $\mathbf{Is}(P)$ noté $\mathbf{Is}^+(P)$. Les isométries directes sont celles qui préservent l'orientation. Le déterminant de leur partie linéaire dans une base orthonormée directe est positif ($= 1$).

1.1. Dans le plan affine euclidien P , on place les points M_j , $j = 0, 1, 2$ d'affixe respectif $z_j = \exp(2ij\pi/3)$. Ce sont les sommets d'un triangle équilatéral. On note $T = \{M_0, M_1, M_2\}$ et on appelle \mathbf{D}_3 l'ensemble des isométries du plan qui conservent T , c'est-à-dire,

$$\mathbf{D}_3 := \{f \in \mathbf{Is}(P) : f(T) = T\}.$$

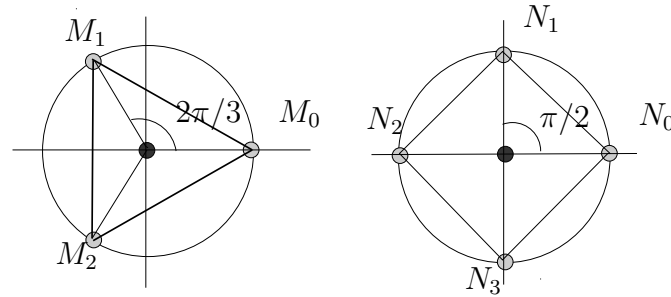
1.1.1. Montrer que \mathbf{D}_3 est un sous-groupe de $(\mathbf{Is}(P), \circ)$.

1.1.2. Montrer que \mathbf{D}_3 est formé de 6 éléments. On pourra d'abord établir que tout élément de \mathbf{D}_3 laisse invariant le centre de gravité du triangle. Montrer que tous les éléments s'expriment en fonctions de deux d'entre eux que l'on précisera (on dit que ces deux éléments forment un ensemble générateur de \mathbf{D}_3 . Cette notion sera étudiée dans le cours).

1.1.3. Faire une table de \mathbf{D}_3 . (C'est un tableau à double entrée, avec la liste des éléments de \mathbf{D}_3 et leur produit — comme dans une table de multiplication élémentaire.)

1.2. On considère maintenant les points N_j , $j = 0, 1, 2, 3$, d'affixe respectif $z_j = \exp(2ij\pi/4)$. Ce sont les sommets d'un carré. On note $C = \{N_0, N_1, N_2, N_3\}$ et on appelle \mathbf{D}_4 l'ensemble des isométries du plan qui conservent C :

$$\mathbf{D}_4 = \{f \in \mathbf{Is}(P) : f(C) = C\}.$$

FIGURE 1. Les figures T et C

1.2.1. Montrer que \mathbf{D}_4 est un sous-groupe de $(\mathbf{Is}(P), \circ)$.

1.2.2. Montrer que \mathbf{D}_4 est formé de 8 éléments.

1.2.3. Faire une table de \mathbf{D}_4 .

1.3. (Facultatif). Plus généralement, si P_n désigne le polygone régulier à n sommets M_j d'affixes respectifs $z_j = \exp(2ij\pi/n)$, $j = 0, \dots, n-1$, on appelle \mathbf{D}_n le sous-groupe de $\mathbf{Is}(P)$ formé des isométries qui laissent P_n globalement invariant. Montrer que \mathbf{D}_n contient $2n$ éléments et dresser la liste de ses éléments en montrant qu'ils peuvent tous s'exprimer à partir de deux d'entre eux.

2

On considère un groupe $(G, *)$ dont l'élément neutre est noté e . Etant données deux éléments a et b dans G , on définit un troisième élément de G , noté $[a, b]$, et appelé le *commutateur* de a et b , par la relation

$$[a, b] = a^{-1} * b^{-1} * a * b.$$

Pour tout $g \in G$, on note aussi

$$x^{[g]} = g^{-1} * x * g.$$

2.1. (a) A quelle condition sur G a-t-on $[a, b] = e$ quels que soient a et b dans G ?
 (b) Montrer que si ϕ est un morphisme de $(G, *)$ dans lui-même alors $\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)]$.

2.2. Soient a, b et c des éléments quelconques de G . Démontrer les identités suivantes,

- (1) $[a, b]^{-1} = [b, a]$;
- (2) $[a * b, c] = [a, c]^{[b]} * [b, c]$;
- (3) $[a^{-1}, b] = [b, a]^{[a^{-1}]}$.

3

LE CENTRE D'UN GROUPE

Soit $(G, *)$ un groupe. On définit le sous-ensemble $Z(G)$ par

$$Z(G) = \{u \in G : g * u = u * g \text{ pour tout } g \in G\}$$

Autrement dit, u est un élément de $Z(G)$ s'il commute avec *tous* les éléments de G .

3.1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G . (On l'appelle *le centre* de G .)
A quelle(s) condition(s) a-t-on $G=Z(G)$?

3.2. Dans cette partie, on cherche $Z(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}))$.

3.2.1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Z(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})).$$

En utilisant le fait que A commute avec les matrices J et K données par

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

montrer qu'on a nécessairement $a = d$ et $b = 0 = c$.

3.2.2. En déduire $Z(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}))$.

3.3. Montrer que si ϕ est un isomorphisme de $(G, *)$ sur (G', \cdot) alors $\phi(Z(G)) = Z(G')$.

4

LIEN ENTRE \mathbb{C} ET UN SOUS-GROUPE DE $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$

Ce problème fait intervenir les groupes :

- $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ formé de l'ensemble des matrices 2×2 inversibles à coefficients réels que l'on munit de la multiplication habituelle des matrices,
- (\mathbb{C}^*, \cdot) formé des nombres complexes *non nuls* que l'on munit de la multiplication habituelle des nombres complexes,
- (\mathbb{R}^{*+}, \cdot) formé de l'ensemble des nombres réels *strictement positifs* que l'on munit de la multiplication habituelle des nombres réels. On a d'ailleurs $\mathbb{R}^{*+} < (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

On rappelle que

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ alors } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

4.1. Soit G l'ensemble des matrices **inversibles** M de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

où α et β sont des nombres **réels**. (On a donc $G \subset \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$.)

- (1) Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$.
- (2) Montrer que l'application ψ définie par

$$\psi(M) = \alpha + i\beta \quad \text{si} \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

est un **isomorphisme** de (G, \cdot) sur (\mathbb{C}^*, \cdot) . (On vérifiera d'abord qu'elle prend bien ses valeurs dans \mathbb{C}^* .)

- (3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $M_n \in G$ par

$$M_n = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & \sin(\frac{2\pi}{n}) \\ -\sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix}.$$

Quel est l'ordre de M_n ? Donner la liste (en justifiant votre réponse) des éléments du groupe $\langle M_n \rangle$. (On pourra utiliser la question précédente et calculer notamment $\psi(M_n^k)$. On rappelle que

$$M_n^k = \underbrace{M_n \cdot M_n \cdots M_n}_{k \text{ fois}}$$

4.2. On considère $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ et H , le sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ engendré par S et $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Autrement dit, $H = \langle S, M_4 \rangle$.

- (1) Quel est l'ordre de S ? Montrer que $M_4^3 = M_4^{-1}$.
- (2) Montrer que $M_4 \cdot S = S \cdot M_4^{-1}$. Que dire de $M_4^{-1} \cdot S$?
- (3) Donner la liste (en justifiant votre réponse) de tous les éléments de H . (Indication. On devra montrer que H contient **huit et seulement huit** éléments.)

4.3. On rappelle que pour un groupe (W, \cdot) quelconque, $\text{Aut}(W)$ désigne l'ensemble des automorphismes du groupe (W, \cdot) , c'est-à-dire les morphismes bijectifs de (W, \cdot) dans lui-même. Cet ensemble $\text{Aut}(W)$ devient un groupe lorsqu'on le munit de la loi de composition des applications. L'élément neutre de ce groupe $(\text{Aut}(W), \circ)$ est l'application identité. *Ces propriétés sont admises, on ne demande pas de les démontrer.*

- (1) Les trois applications suivantes sont-elles des **automorphismes** de (\mathbb{C}^*, \cdot) ?

$$\phi_1 : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*, \cdot) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \cdot) \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{array}, \quad \phi_2 : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*, \cdot) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \cdot) \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}, \quad \phi_3 : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*, \cdot) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \cdot) \\ z & \longmapsto & \frac{z}{|z|^2} \end{array}$$

- (2) On considère à présent le groupe (\mathbb{R}^{*+}, \cdot) . Montrer que si $f \in \text{Aut}(\mathbb{R}^{*+})$ alors $\phi_f \in \text{Aut}(\mathbb{C}^*)$ où ϕ_f est définie par

$$\phi_f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*, \cdot) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \cdot) \\ z & \longmapsto & f(|z|) \cdot \frac{z}{|z|} \end{array}$$

- (3) Montrer que $\text{Aut}(\mathbb{C}^*)$ contient une infinité d'éléments.

- (4) Montrer que les groupes $Aut(\mathbb{C}^*)$ et $Aut(G)$ sont isomorphes. (On pourra construire un isomorphisme Ψ entre $Aut(\mathbb{C}^*)$ et $Aut(G)$ en utilisant l'isomorphisme ψ de I) b.)

(UPS, L2, 2004)

5

AUTOMORPHISMES DU GROUPE D_4

On considère le groupe diédral D_4 . On rappelle que

$$D_4 = \{I, r, r^2, r^3, s, s \circ r, s \circ r^2, s \circ r^3\},$$

où I est l'identité, r est la rotation de centre l'origine et d'angle $\pi/2$ et s est la réflexion d'axe la droite des abscisses dans le plan affine euclidien. Tous les calculs dans le groupe (D_4, \circ) peuvent être effectués à l'aide des relations

$$r^4 = I, \quad s^2 = I, \quad s \circ r = r^3 \circ s,$$

mais il est aussi possible d'effectuer les calculs à l'aide de raisonnements géométriques.

- 5.1.** Déterminer l'ordre de tous les éléments de D_4 .
- 5.2.** Déterminer l'ensemble des $x \in D_4$ satisfaisant l'équation $x \circ r = r^3 \circ x$ et en déduire les solutions de l'équation $x \circ r^3 = r \circ x$.
- 5.3.** Montrer que si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux automorphismes de D_4 tels que $\phi_1(r) = \phi_2(r)$ et $\phi_1(s) = \phi_2(s)$ alors $\phi_1 = \phi_2$.
- 5.4.** Montrer que si ϕ est un automorphisme de D_4 alors pour tout $x \in D_4$, $\phi(\phi(x)) = o(x)$ où $o(g)$ désigne l'ordre de l'élément g .
- 5.5.** Soit ϕ un automorphisme de D_4 , montrer que $\phi(s) \circ \phi(r) = \phi(r)^3 \circ \phi(s)$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\phi(r)$, pour $\phi(s)$.
- 5.6.** Déterminer tous les automorphismes de D_4 .

6

Soit $(G, *)$ un groupe et N et H deux sous-groupes distingués de G . Nous supposons que ces deux sous-groupes satisfont les deux conditions suivantes $N \cap H = \{e_G\}$ et $G = NH$. On rappelle que, par définition, $NH = \{n * h : n \in N, h \in H\}$.

- 6.1.** Par hypothèse, quel que soit $g \in G$, il existe $n \in N$ et $h \in H$ tels que $g = n * h$. Montrer que le couple (n, h) est unique.
- 6.2.** Démontrer que quels que soient $n \in N$ et $h \in H$, on a $n * h = h * n$.
- 6.3.** Montrer que $G \simeq N \times H$. Il s'agit de trouver une isomorphisme ϕ entre G et le produit direct $N \times H$. On pourra considérer l'application qui à tout $g \in G$ fait correspondre l'unique couple (n, h) tel que $g = n * h$.

7

GROUPE DES AUTOMORPHISMES INTÉRIEURS

Soit (G, \cdot) un groupe.

7.1. Montrer que l'ensemble $\mathbf{Aut}(G)$ formé de tous les automorphismes de G est un groupe lorsqu'on le munit de la loi de composition des applications.

7.2. On appelle automorphisme intérieur de G , toute application de la forme $\phi_g = x \in G \rightarrow g^{-1} \cdot x \cdot g$.

7.2.1. Vérifier que les automorphismes intérieurs sont effectivement des automorphismes de G .

7.2.2. Montrer que $\mathbf{Int}(G) \leq \mathbf{Aut}(G)$ et que $\mathbf{Int}(G) \simeq G/Z(G)$. (On recherchera un morphisme de G dans $\mathbf{Int}(G)$.)

7.3. $\mathbf{Int}(G)$ est-il un sous-groupe distingué de $\mathbf{Aut}(G)$?

8

On considère le groupe d'ordre 18 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ muni de la loi $\bar{+}$ définie par l'addition coordonnée par coordonnée : $(\bar{a}, \bar{b}) \bar{+} (\bar{a}', \bar{b}') = (\overline{a+a'}, \overline{b+b'})$. Par exemple $(\bar{2}, \bar{5}) \bar{+} (\bar{1}, \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{2})$. Ce groupe sera noté $(W, \bar{+})$.

8.1.

(1) Montrer que quel que soit $(\bar{a}, \bar{b}) \in W$, on a $6(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{0}, \bar{0})$. On rappelle que

$$6(\bar{a}, \bar{b}) = \underbrace{(\bar{a}, \bar{b}) \bar{+} \dots \bar{+} (\bar{a}, \bar{b})}_{\text{six fois}}.$$

(2) Quels sont les ordres possibles pour les éléments de W ?

8.2. Soit F l'ensemble des éléments $(\bar{a}, \bar{b}) \in W$ tels que $3(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{0}, \bar{0})$. (a) Montrer que H est un sous-groupe de W et donner la liste de tous ses éléments. (b) Déterminer un ensemble A le plus petit possible tels que $F = \langle A \rangle$.

8.3. Déterminer tous les sous-groupes d'ordre 9 de W . (Indication : si G est sous-groupe d'ordre 9 de W quels sont les ordres possibles pour les éléments de G ?)

8.4. W est-il isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$?

(UPS, L2, 2008)

9

UN SOUS-GROUPE DE \mathbf{S}_4

On considère les éléments suivants du groupe de permutation \mathbf{S}_4 : $\sigma_1 = (12)(34)$, $\sigma_2 = (13)(24)$, $\sigma_3 = (14)(23)$. On rappelle que e désigne l'élément neutre de (\mathbf{S}_4, \cdot) , autrement dit e est la bijection *identité*.

- (1) Déterminer l'ordre de chaque élément de $H := \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.
- (2) Montrer que H est un sous-groupe de \mathbf{S}_4 . (On pourra construire une table.)
 H est-il commutatif?
- (3) Déterminer tous les sous-groupes de H . (Justifier votre réponse.)
- (4) (a) Soit $f \in \mathbf{S}_4$. Montrer que

$$f \cdot (12)(34) \cdot f^{-1} = (f(1)f(2))(f(3)f(4)).$$

- (b) Montrer que H est un sous-groupe *distingué* de \mathbf{S}_4 .
- (5) Montrer que H est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$. (On pourra construire un isomorphisme explicite entre H et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.)

(UPS, L2, 2005)

10

GÉNÉRATEURS DES GROUPE SYMÉTRIQUES ET ALTERNÉS

Soit $n \geq 2$.

10.1. Montrer que tout cycle (a_1, a_2, \dots, a_p) ($p \geq 2$) s'écrit comme un produit de transpositions.

10.2. Montrer que toute permutation (i, j) avec $i < j$ vérifie

$$(i, j) = (i, i+1)(i+1, i+2) \cdots (j-1, j)(j-2, j-1)(j-3, j-2) \cdots (i, i+1).$$

10.3. Montrer que

$$(k, k+1) = (1, k)(1, k+1)(1, k).$$

10.4. Montrer les égalités suivantes

$$(1) \mathbf{S}_n = \langle (1, 2), (1, 3), \dots, (1, n) \rangle.$$

$$(2) \mathbf{S}_n = \langle (1, 2), (1, 2, \dots, n) \rangle$$

Indication : Posant $\sigma = (1, 2, \dots, n)$, on pourra montrer que

$$\sigma^k(12)\sigma^{-k} = (k+1, k+2).$$

10.5. Soit $n \geq 3$. Montrer que $(a, b)(a, c) = (a, c, b)$ et $(a, b)(c, d) = (a, c, b)(a, c, d)$.
En déduire

- (3) \mathbf{A}_n est engendré par l'ensemble des 3-cycles.
-