

1. (2 PTS)

On munit \mathbb{R} de la loi interne définie par la relation $x * y = x + 2y$. Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ n'est pas un groupe ?

Réponse :

la loi $*$ n'est pas associative. En effet,

$$\left\{ \begin{aligned} (x * y) * z &= (x + 2y) + 2z \\ x * (y * z) &= x + 2(y + 2z) = x + 2y + 4z. \end{aligned} \right.$$

et les 2 quantités ne coïncident pas en général
(ex: $x=0, y=0, z=1$)

$(G, *)$ n'est donc pas un groupe.

BAREME (2pts) On n'exige pas un contre-exemple explicite

2. (2 PTS)

On rappelle que D désigne l'ensemble des décimaux, c'est-à-dire l'ensemble des réels x qui s'écrivent $x = a/10^n$ ou $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et D^* est l'ensemble des décimaux non nuls. D^* est-il un sous-groupe de (\mathbb{R}^*, \times) ?

Réponse :

D^* n'est pas un sous-groupe. Par exemple
 $3 \in D^*$ mais $3^{-1} = \frac{1}{3} \notin D^*$.

BAREME (2pts) On n'attend pas davantage de détails que ceux donnés ici.

3. (2 PTS)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = e^{iat}$. Montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans (\mathbb{U}, \cdot) et déterminer son noyau. On rappelle que (\mathbb{U}, \cdot) désigne le groupe formé des nombres complexes de module 1 muni de la multiplication habituelle des nombres complexes.

Réponse :

(f prend bien ses valeurs dans (\mathbb{U}, \cdot) car $|e^{iat}| = 1$).

$\forall t, t' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(t+t') &= e^{ia(t+t')} \\ &= e^{iat} \times e^{iat'} = f(t) \times f(t') \end{aligned}$$

donc f est un morphisme.

BAREME (1 pt + 0,5 pour ceux qui vérifient que f prend ses valeurs dans \mathbb{U}).

Noyau : $t \in \ker f \Leftrightarrow f(t) = 1$
 $\Leftrightarrow e^{iat} = 1$
 $\Leftrightarrow at = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2k\pi}{a} \quad k \in \mathbb{Z} & (\text{si } a \neq 0) \\ t \in \mathbb{R} & (\text{si } a = 0) \end{cases}$

d'où $\ker f = \frac{2\pi}{a} \mathbb{Z} \quad \text{si } a \neq 0$
 $= \mathbb{R} \quad \text{si } a = 0$

BAREME (1 pt si le travail est fait sans traiter le cas $a = 0$, + 0,5 pt pour ceux qui voit le problème $a = 0$ et le traite)

On considère le groupe $(\mathbb{Z}^2, +)$ dont les éléments sont les couples (a, b) avec a et b dans \mathbb{Z} et la loi $+$ est définie par l'addition des entiers coordonnée par coordonnée : $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$. On rappelle que l'élément neutre de \mathbb{Z}^2 est $(0, 0)$ et le symétrique de (a, b) est $(-a, -b)$.

4. 3 PTS

Soient $v = (a, b)$ et $w = (a', b')$ deux éléments de \mathbb{Z}^2 . On pose

$$H(v, w) = \{nv + mw : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

- (1) Montrer que $H(v, w)$ est un sous-groupe de \mathbb{Z}^2 .
- (2) Trouver une valeur de v et w pour lesquelles $H(v, w)$ est différent de \mathbb{Z}^2 et de $\{(0, 0)\}$.
- (3) Trouver une valeur de v et w pour lesquelles $H(v, w)$ est égal à \mathbb{Z}^2 .

Dans chaque cas, justifier précisément la réponse.

Réponse :

(1) $H(v, w)$ est non vide (contient évidemment v et w)
 On suppose que $x, y \in H(v, w)$ et on montre que $x - y \in H(v, w)$. Par définition $\exists (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $x = nv + mw$ et $\exists (n', m') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $y = n'v + m'w$. Alors

$$\begin{aligned} x - y &= (nv + mw) - (n'v + m'w) \\ &= \underbrace{(n - n')}_{\in \mathbb{Z}} v + \underbrace{(m - m')}_{\in \mathbb{Z}} w \in H(v, w). \end{aligned}$$

BAREME 2 pts

(2) Prendre par exemple $v = (0, 0)$ et $w = (0, 1)$. Alors $(1, 0) \notin H(v, w)$ qui est donc différent de \mathbb{Z}^2

BAREME 1 pt

(3) Prendre par exemple $v = (1, 0)$ et $w = (0, 1)$. On a alors $nv + mw = (n, m)$ et $H(v, w) = \mathbb{Z}^2$.

BAREME 1 pt

Etant donnés a, b, c et d dans \mathbb{Z} , on définit l'application $\Phi = \Phi_{a,b,c,d}$ défini de \mathbb{Z}^2 dans lui-même par

$$\Phi((x, y)) = (ax + by, cx + dy).$$

On pourra remarquer que

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

5. 2 PTS

Montrer que Φ est un morphisme de $(\mathbb{Z}^2, +)$ dans $(\mathbb{Z}^2, +)$.

Réponse : (Φ prend bien ses valeurs dans \mathbb{Z}^2 car la somme et le produit d'entiers est un entier.)
Soient (x, y) et (x', y') dans \mathbb{Z}^2

$$\begin{aligned} \Phi((x, y) + (x', y')) &= \Phi((x+x', y+y')) \\ &= (a(x+x') + b(y+y'), c(x+x') + d(y+y')). \\ &= (ax + ax' + by + by', cx + cx' + dy + dy'). \\ &= (ax + by, cx + dy) + (ax' + by', cx' + dy'). \\ &= \Phi((x, y)) + \Phi((x', y')) \end{aligned}$$

donc Φ morphisme.

BARÈME 2 pts + 0,5 pour qui vérifie que Φ prend ses valeurs dans \mathbb{Z}^2 .

6. 4 PTS

Montrer que si $ad - bc = 1$ ou $ad - bc = -1$ alors Φ est un automorphisme (morphisme bijectif) et expliciter la relation définissant Φ^{-1} . On mettra clairement en évidence l'utilisation de l'hypothèse.

Réponse :

Nous montrons que $\forall (x', y') \in \mathbb{Z}^2 \exists! (x, y) \in \mathbb{Z}^2$
 tel que $\phi(x, y) = (x', y')$.

$$\phi(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = x' \\ cx + dy = y' \end{cases} \quad \text{Une résolution ordinaire donne}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (ad - bc)x = dx' - by' \\ (ad - bc)y = ax' - cy' \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} x = (dx' - by')/D \\ y = (ax' - cy')/D \end{cases}$. Mais nous devons

nous assurer que la solution trouvée (qui est unique) se trouve bien dans \mathbb{Z}^2 . C'est le cas grâce au fait que $D = \pm 1$. Car dans ce cas

$$x = \pm \underbrace{(ax' - by')}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{1}_{\in \mathbb{Z}} \text{ et idem pour } y.$$

on a $\phi^{-1}(x', y') = D^{-1}(dx' - by', ax' - cy')$. ($D = \pm 1$)

BAREME. On peut mettre jusqu'à 2pts pour ceux qui "construisent" ϕ^{-1} par exemple en substituant l'inverse d'une matrice.....

des 2pts restants sont donnés uniquement à ceux qui ont compris (plus = 2pt ou moins = 1pt) l'utilité de l'hypothèse $D = \pm 1$ -

7. 2 PTS

Montrer que si a et b sont premiers entre eux alors il existe c et d tels que $\Phi_{a,b,c,d}$ soit un automorphisme.

Réponse :

D'après la question précédente, il suffit de trouver c et $d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = +1$ (ou -1). L'existence de c et d provient du théorème de Bézout.

Bonne

2 pts

