POLYNÔMES ORTHOGONAUX ET APPROXIMATION POLYNOMIALE INDICATIONS SUCCINCTES

JEAN-PAUL CALVI

Je me limite aux questions qui ont été abordées par les étudiants pendant l'épreuve.

1. Propriétés élémentaires des polynômes orthogonaux

1.1. Relation de récurrence.

1.1.1. La suite de polynômes T_d vérifie la relation de récurrence

$$T_d(x) = (x - \lambda_d)T_{d-1}(x) - \mu_d T_{d-2}(x), \tag{1.1}$$

avec

$$\mu_d = \frac{\|T_{d-1}\|^2}{\|T_{d-2}\|^2} \quad \text{and} \quad \lambda_d = \frac{(xT_{d-1},T_{d-1})}{\|T_{d-1}\|^2}. \tag{1.2}$$

En effet, il suffit de vérifier que le terme de droite est un polynôme unitaire de degré d (évident) qui est orthogonal à Π_{d-1} ou encore si R_d désigne ce terme $(R_d,T_j) = 0$ pour $j \leq d-1$. Si $j < d-2$ on a

$$\begin{aligned} (R_d,T_j) &= ((x-\lambda_d)T_{d-1},T_j) - (\mu_d T_{d-2},T_j) \\ &= (T_{d-1},(x-\lambda_d)T_j) - (\mu_d T_{d-2},T_j) = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

On utilise $(gf,h) = (f,gh)$ (qui découle directement de la définition) et le fait que $(x-\lambda_d)T_j$ est un polynôme de degré $< d-1$. Voyons le cas $j = d-2$, on a

$$\begin{aligned} (R_d,T_{d-2}) &= ((x-\lambda_d)T_{d-1},T_{d-2}) - (\mu_d T_{d-2},T_{d-2}) \\ &= (T_{d-1},xT_{d-2}) - \mu_d(T_{d-2},T_{d-2}). \end{aligned}$$

Mais, étant un polynôme unitaire de degré d,

$$xT_{d-2} = T_{d-1} + (\text{pol de degré} < d-1)$$

de sorte que

$$(T_{d-1},xT_{d-2}) = (T_{d-1},T_{d-1}),$$

et le résultat provient de la définition de μ_d. Démonstration similaire mais plus simple pour le dernier cas $j = d-1$.

1.1.2. La relation de récurrence satisfaite par les polynômes U_d est obtenue en reportant dans la relation précédente les identités suivantes.

(1) $U_d = k_d T_d$. En particulier, en prenant les normes, $k_d = 1/\|T_d\|$.

(2)
$$(xT_{d-1},T_{d-1}) = \left(x\frac{U_{d-1}}{k_{d-1}},\frac{U_{d-1}}{k_{d-1}}\right).$$

Le résultat final est

$$U_d(x) = (A_d x + B_d)U_{d-1} - C_d U_{d-2},$$

avec en particulier $A_d = k_d/k_{d-1}$ et $C_d = (k_d k_{d-2})/k_{d-1}^2$.

Date: 2 octobre 2006.

Préparation au concours interne de l'agrégation de mathématiques.

1.2. Si q est un polynôme unitaire de degré d alors q s'écrit suivant la base T_j, $q(x) = T_d + \sum j = 0^{d-1} c_j T_j$. En utilisant l'orthogonalité et le théorème de Pythagore, on obtient

$$\|q\|^2 = \|T_d\|^2 + \sum_{j=0}^{d-1} c_j^2 \|T_j\|^2$$

d'où l'on déduit immédiatement que la norme de q sera minimale si et seulement si tous les c_j sont nuls c'est-à-dire si $q = T_d$.

1.3. **Exemples** $*$.

1.3.1. Pour tout $d \geq 0$, il existe un unique polynôme de degré d, noté u_d tel que $u_d(\cos\theta) = \sin(d+1)\theta/\sin\theta$, $\theta \in]0,\pi[$. Pour avoir ceci, on doit écrire $\sin(d+1)\theta/\sin\theta$ comme un polynôme en $\cos\theta$ et ceci est obtenu par exemple à partir de la relation d'Euler

$$\begin{aligned}\frac{\sin(d+1)\theta}{\sin\theta} &= \frac{1}{\sin\theta}\Im\left(cos\theta + i\sin\theta)^{d+1}\right)\\ &= \frac{1}{\sin\theta}\Im\left(\sum_{j=0}^{d+1}\binom{n}{j} i^j \sin^j\theta\cos^{d+1-j}\theta\right).\end{aligned}$$

Comme on veut la partie imaginaire, il ne reste dans le $\sum$ que des puissances impaires de $\sin\theta$ donc, après simplification avec le $\sin\theta$ en dénominateur, il ne reste que des puissances paires, en utilisant $\sin^{2\alpha}\theta = (1-\cos^2\theta)^\alpha$ on obtient le polynôme en $\cos\theta$ demandé.

Maintenant, pour être sûrs que, convenablement normalisés, ces polynômes sont les polynômes orthogonaux unitaires correspondants au poids $w(x) = (1-x^2)^{1/2}$ sur $[-1,1]$ il suffit d'établir que pour $d \neq l$ on a

$$\int_{-1}^{1} u_d(x)u_l(x)(1-x^2)^{1/2}dx = 0.$$

Pour obtenir cela on fait le changement de variable $x = \cos\theta$ qui transforme la relation à démontrer en

$$\int_0^\pi \sin(d+1)\theta\sin(l+1)\theta d\theta = 0$$

et c'est alors une propriété connue (ou un exercice ordinaire) sur les fonctions trigonométriques.

1.3.2. La fonction $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ en réalité est intégrable sur $]-1,1[$ donc elle est une fonction poids admissibles. La similarité du poids avec celui de la question précédente devait faire penser à une famille de polynômes similaire, comme le problème ne l'introduisait pas, cela devait être une famille ''bien connue''. Il s'agit des polynômes de Chebyshev définis par la relation $t_d(\cos\theta) = \cos(d\theta)$. Les démonstrations sont très semblables à celles de la questions précédente.

1.3.3. L'expression de u_d en fonction de u_{d-1} et u_{d-2} s'obtient à l'aide d'un calcul sur les fonctions trigonométriques :

$$\cos\theta u_d(\cos\theta) = \frac{\cos\theta\sin(d+1)\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{2\sin\theta}\sin(d+2)\theta - \sin d\theta) = \frac{1}{2}\left(u_{d+1}(\cos\theta) - u_d(\cos\theta)\right).$$

La formule pour t_d s'obtient par un calcul similaire.

1.3.4. Soit $d \in \mathbb{N}$. On obtient facilement par récurrence que la dérivée d-ième de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est de la forme $e^{-x^2} h_d(x)$ où h_d est un polynôme de degré d. Pour montrer que, convenablement normalisés, ces polynômes forment la suite de polynômes orthonormaux correspondants au poids $w(x) = e^{-x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ il suffit d'établir que pour $d \neq l$ on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_d(x) h_l(x) e^{-x^2} dx = 0.$$

Supposons que $d > l$, on procède par intégration par parties répétées (attention il s'agit ici d'intégrales impropres et il faut détailler davantage que je ne le fais ici) dans lesquelles, à cause des propriétés de décroissance rapide vers 0 de $x \to e^{-x^2}$ les termes $[\dots]_{-\infty}^{\infty}$ s'annulent tous :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} h_d(x) h_l(x) e^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} D^d(e^{-x^2}) h_l(x) dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} D^{d-1}(e^{-x^2}) D^1 h_l(x) dx \\
&= (-1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} D^{d-2}(e^{-x^2}) D^2 h_l(x) dx \\
&= \dots
\end{aligned}$$

Quand on arrive à $D^{l+1} h_l$ (ce qui est possible car $d \geq l+1$) on tombe sur une intégrale nulle puisque le degré de h est égal à l.
Les polynômes *orthonormaux* correspondants sont $h_d / \|h_d\|$. La normalisation demandée consiste donc à calculer $\|h_d\|$ où $\|h_d\|^2$. La technique des intégrations par parties ci-dessus donne

$$\|h_d\|^2 = (-1)^d \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} d! c_d dx$$

où c_d est le coefficient dominant de h_d. On obtient par récurrence que ce coefficient est $(-2)^d$ et il reste donc à calculer $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$. C'est une question classique dont il faut connaître une démonstration (plusieurs ont été ou seront vue durant la préparation)... Le résultat final est

$$\|h_d\|^2 = 2^d d! \sqrt{\pi}.$$

1.4. **Zéros.**

1.4.1. Notant, comme l'indication le suggère, A l'ensemble des racines de T_d de *multiplicité impaire* dans l'intérieur de I, on considère le polynôme $q(x) = \prod_{a \in A}(x-a)$ (le produit est égal à 1 si A est vide). Si le cardinal de A est égal à d cela signifie que T_d a d racines simples dans l'intérieur de I ce qui est la propriété à démontrer. Supposons le contraire c'est-à-dire que le cardinal de A est strictement plus petit que d (strictement plus grand est impossible à cause du degré). On a alors $q \in \Pi_{d-1}$ et donc $(T_d, q) = 0$ mais $T_d q$ est maintenant un polynôme dont toutes les racines à l'intérieur de I sont de degré pair. Il est donc de signe positif sur I. Or $T_d q w \geq 0$ sur I et $\int_I T_d q w dx = 0$ force, puisque les fonctions sont continues $T_d q w = 0$ identiquement sur I ce qui est impossible.

1.4.2. Soit $f \in \mathcal{C}_w$. On note $R_d(f) = f - S_d(f)$. D'après la propriété rappelée dans l'introduction on a $S_d(f) = \sum_{i=0}^{f} (f, U_i) U_i$ de sorte que $(f, U_i) = (S_d(f), U_i)$ pour $i = 0, \dots, d$ donc $R_d(f)$ est orthogonal à Π_d. Suivant l'indication, considérons l'ensemble A formé des points en lesquels (autour desquels) $R_d(f)$ change de signe et $q(x) = \prod_{a \in A}(x-a)$ avec la même convention que précédemment. La fonction $R_d(f) q$ est de signe constant sur I (faire un tableau de signes). Si le cardinal de A contient moins de $d+1$ points alors $q \in \Pi_d$ et l'intégrale

$\int_I R_d(f)qw = 0$ et on arrive à une contradiction comme dans la question précédente. Donc $R_d(f)$ change de signe au moins $d+1$ fois.

1.4.3. Les points obtenus à la question précédentes sont des racines de $R_d(f) = 0$. Appelons les a_i, $i = 0,\ldots,d$. On a

$$0 = R_d(f)(a_i) \implies f(a_i) = S_d(f)(a_i) \implies S_d(f)(x) = L[a_0,\ldots,a_d; f](x)$$

où la dernière notation désigne le polynôme d'interpolation de Lagrange. Il suffit donc de prendre $Y(f) = \{a_0,\ldots,a_I\}$.

1.5. **Le noyau polynomial.**

1.5.1. On établit la formule de Darboux par récurrence sur d en utilisant la relation de récurrence sur les polynômes U_d. Lorsque $d = 0$, puisque $U_0 = k_0$ elle se réduit à

$$k_0^2 = \frac{k_0}{k_1} k_0 \frac{U_1(x) - U_1(y)}{x-y}.$$

Or la fraction sur la droite n'est autre que le coefficient dominant de U_1 qui vaut k_1 et cela montre la formule de Darboux dans le cas $d = 0$. Supposons maintenant que la formule soit vraie pour d et montrons-là pour $d+1$. On peut donc utiliser

$$\sum_{i=0}^{d} U_i(x)U_i(y) = \frac{k_d}{k_{d+1}} \frac{U_{d+1}(x)U_d(y) - U_d(x)U_{d+1}(y)}{x-y}. \tag{1.3}$$

On a, en séparant le dernier terme de la somme et en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{d+1} U_i(x)U_i(y) &= \frac{k_d}{k_{d+1}} \frac{U_{d+1}(x)U_d(y) - U_d(x)U_{d+1}(y)}{x-y} + U_{d+1}(x)U_{d+1}(y) \\
&= \frac{k_{d+1}}{k_{d+2}} \left(\frac{k_d k_{d+2}}{k_{d+1}^2} \frac{U_{d+1}(x)U_d(y) - U_d(x)U_{d+1}(y)}{x-y} + \frac{k_{d+2}}{k_{d+1}} U_{d+1}(x)U_{d+1}(y) \right) \\
&= \frac{k_{d+1}}{k_{d+2}(x-y)} \Big((C_{d+2}U_{d+1}(x)U_d(y) - C_{d+2}U_d(x)U_{d+1}(y) + \\
&\qquad A_{d+2}(x-y)U_{d+1}(x)U_{d+1}(y) \Big)
\end{aligned}$$

où les coefficient C_{d+2} et A_{d+2} sont ceux qui apparaissent dans la relation de récurrence pour les U_d donnée plus haut. Nous devons donc établir

$$\begin{aligned}
C_{d+2}U_{d+1}(x)U_d(y) - C_{d+2}U_d(x)U_{d+1}(y) + A_{d+2}(x-y)U_{d+1}(x)U_{d+1}(y) \\
= U_{d+2}(x)U_{d+1}(y) - U_{d+1}(x)U_{d+2}(y).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Cette dernière égalité s'obtient en remplaçant les U_{d+2} par la relation de récurrence obtenue précédemment. Les termes faisant intervenir le coefficient B_{d+2} s'annulent.

1.5.2. Pour déduire que

$$\sum_{i=0}^{d} U_i^2(x) = \frac{k_d}{k_{d+1}} \Big(U'_{d+1}(x)U_d(x) - U'_d(x)U_{d+1}(x) \Big), \tag{1.5}$$

on fixe x et on fait tendre y vers x dans la relation précédente. Pour cela, on écrit

$$\frac{U_{d+1}(x)U_d(y) - U_d(x)U_{d+1}(y)}{x-y} = -u_{d+1}(x) \frac{u_d(y) - U_d(x)}{y-x} + u_d(x) \frac{u_{d+1}(y) - U_{d+1}(x)}{y-x}.$$

1.6. **Caractérisation du noyau.**

1.6.1. Pour tout $p \in \Pi_d$, on a

$$(p\,,K_d(\cdot\,,y)) = p(y). \tag{1.6}$$

En effet,

$$(p\,,K_d(\cdot\,,y)) = (p,\sum_{i=0}^{d} U_i(y)U_i) = \sum_{i=0}^{d} U_i(y)(p,U_i) = p(y).$$

La dernière égalité utilise l'écriture de p dans la base orthonormale U_i.

1.6.2. Réciproquement si $F(x,y)$ est une fonction polynomiale de degré au plus d en x ainsi qu'en y telle que l'identité $(p\,,F(\cdot\,,y)) = p(y)$ est satisfaite pour tout p de degré au plus d et tout y alors $F = K_d$. En effet, par hypothèse on a

$$F(x,y) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i(y)U_i(x)$$

avec les α_i des polynômes de degré au plus d. Or, en appliquant l'autre hypothèse avec $p = U_j$, il vient

$$(U_j\,,F(\cdot\,,y)) = U_j(y) \implies \sum_{i=0}^{d} \alpha_i(y)(U_j,U_i) = U_j(y) \implies \alpha_j(y) = U_j(y)$$

et la conclusion s'ensuit.

1.6.3. Pour tout $f \in \mathcal{C}_w$, on a

$$S_d(f)(y) = \int_I K_d(y,x)f(x)w(x)dx. \tag{1.7}$$

En effet,

$$S_d(f)(y) = \sum_{i=0}^{d}(f,U_i)U_i(y) = \sum_{i=0}^{d} U_i(y)\int_I f(x)U_i(x)w(x)dx = \int_I K_d(x,,y)f(x)dx.$$

1.7. **Un problème d'extremum** $*$**.** Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose

$$S = \{p \in \Pi_d \,:\, \|p\| = 1\}$$

et on définit sur S la fonction Φ_a par $\Phi_a(p) = |p(a)|^2$.ÎPour montrer que le maximum de Φ_a est atteint exactement en deux points qui sont

$$p(x) = \pm\frac{K_d(a,x)}{K_d(a,a)} \tag{1.8}$$

l'idée est la suivante. On part de la relation $p(a) = \sum_{i=0}^{d}(p\,,U_i)U_i(a)$ pour majorer $|p(a)|^2$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz ordinaire dans $\mathbb{R}^{d+1}$ et on utilise le fait que l'inégalité est une égalité lorsque les deux "vecteurs" de $\mathbb{R}^{d+1}$ sont colinéaires.

2. QUADRATURES ET NOMBRES DE CHRISTOFFEL

2.1. Pour montrer que

$$\ell_j^d(x) = \frac{U_d(x)}{U_d'(x_j^d)(x - x_j^d)} \tag{2.1}$$

il suffit de vérifier que le terme de droite est un polynôme de degré au plus $d-1$ qui s'annule en x_i^d pour tout $i \neq j$ et prend la valeur 1 en x_j^d. Pour vérifier que $U_d'(x_j^d)$ est égal à la valeur de $U_d(x)/(x - x_j^d)$ en x_j^d on factorise U_d et on dérive. Tous les termes s'annulent sauf un lorsque $x = x_j^d$.

2.2. **Formules de quadratures de Gauss.** Pour voir que pour tout $p \in \Pi_{2d-1}$ on a

$$\int_I p(x)w(x)dx = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j^d p(x_j^d), \tag{2.2}$$

suivant l'indication, on écrit $p = qU_d + r$ avec $r \in \Pi_{d-1}$. On a alors

$$\int_I p(x)w(x)dx = (qU_d + r,1) = (r,1) + (qU_d,1) = (r,1) + (U_d,q) = (r,1)$$

car U_d est orthogonal à q puisque le degré de q est au plus égal à $(2d-1) - d = d-1$. D'autre part, puisque r est de degré au plus $d-1$, il est égal à son polynôme d'interpolation,

$$r = \sum_{i=1}^{d} r(x_j^d)\ell_j^d = p(x_j^d)\ell_j^d$$

où l'on utilise $r(x_j^d) = p(x_j^d)$ qui découle immédiatement de $p = qU_d + r$. Finalement

$$\int_I p(x)w(x)dx = \int_I r(x)w(x)dx = \int_I (\sum_{i=1}^{d} r(x_j^d)\ell_j^d = p(x_j^d)\ell_j^d)w(x)dx = \sum_{j=1}^{d} p(x_j^d)\lambda_j^d.$$

2.3. Pour obtenir que pour tout m et tout n dans $\{1,\dots,d\}$,

$$\int_I \ell_n^d(x)\,\ell_m^d(x)w(x)dx = \lambda_n^d \delta_{mn} \tag{2.3}$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker, on applique la formule précédente avec le polynôme de degré $^2d - 2 < 2d-1$, $\ell_n^d(x)\ell_m^d(x)$ dont on calcule immédiatement les valeurs en les x_j^d.
Cette propriété implique que les nombres de Chritoffel sont positifs (faire $m = n$).

2.4. Pour montrer que

$$K_{d-1}(x,y) = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{\lambda_j^d}\ell_j^d(x)\ell_j^d(y), \tag{2.4}$$

on remarque que le terme de droite, disons $F(x,y)$, est un polynôme de degré au plus d en x et en y tel que pour tout polynôme p on a

$$(p,K(\cdot,y) = (\sum_{i=1}^{d} p(x_i^d)\ell_i^d, \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{\lambda_j^d}\ell_j^d(x)\ell_j^d(y)) = \sum_{i=1}^{d} p(x_i^d)\ell_i(y)\sum_{j=1}^{d}\delta_{ji} = p(y)$$

où l'on utilise la question précédente et la formule d'interpolation de Lagrange.

3. Suite de quadratures

Dans cette partie on suppose que I est un intervalle fermé borné, $I = [a,b]$. On note $C[a,b]$ l'espace vectoriel normé des fonctions continues sur $[a,b]$ muni de la norme uniforme, notée $\|\cdot\|_\infty$. On rappelle que $C[a,b]$ est un espace de Banach (i.e. est un espace vectoriel normé complet). On note $X^d = \{x_1^d,\dots,x_d^d\}$ l'ensemble des racines de T_d et on définit Q_d sur $C[a,b]$ par

$$Q_d(f) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_j^d\, f(x_j^d). \tag{3.1}$$

On observera que

$$Q_d(f) = \int_I L[X^d,f](x)w(x)dx$$

où $L[X^d,f]$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f par rapport aux points de X^d.

Il a précédemment été établi que $Q_d(f) = \int_I f(x)w(x)dx$ dès lors que $f \in \Pi_{2d-1}$.

3.1. Le fait que Q_d est une application linéaire continue de norme $\int_I w(x)dx$ est immédiat car

$$\|Q_d(f)\| \leq \|f\| \sum_{i=0}^{d} |\lambda_i^d| = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i^d = \int_I \sum_{i=1}^{d} \ell_i^d w(x)dx = \int_I w(x)dx$$

où l'utilise la positivité des λ_i^d et le fait que $\sum_{i=1}^{d} \ell_i^d = 1$ (écrire la formule d'interpolation de Lagrange pour le polynôme 1). Pour s'assurer que la norme est exactement égale à $\int_I w(x)dx$, il suffit de trouver un cas d'égalité. celui-ci est évident : la fonction constante égale à 1.

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier 31062 Toulouse Cedex 9 FRANCE.
E-mail address : jean-paul.calvi@math.ups-tlse.fr