ANALYSE FONCTIONNELLE
ET VOCABULAIRE DE LA TOPOLOGIE

JEAN-PAUL CALVI

Le thème de cette séquence correspond au chapitre 12 du programme officiel de l'agrégation interne de mathématiques. Les définitions et théorèmes à connaître seront rapidement révisés puis on traitera les (des) exercices. Dans chaque partie du cours, on a sélectionné un résultat particulièrement important dont la démonstration doit être connue des étudiants et qui sera revue en détail durant le cours. Ces points importants apparaissent en **gras** dans le texte. Neuf heures seront consacrées à ce sujet et il ne sera possible d'aborder que quelques aspects du programme. On espère que les autres questions seront étudiées lors des préparations à l'oral. Il serait préférable que les étudiants revoient les définitions et les démonstrations des résultats principaux avant la séance. On peut consulter le *tome 2 (analyse) du cours de mathématiques de J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiès (Dunod)*, Chapitre 3 – ou un traité similaire de mathématiques spéciales.

1. Topologie et espaces métriques

1.1. **Cours.** Distance, boules ouvertes et fermées. Parties ouvertes et fermées. Voisinages. Intérieur, adhérence et frontière d'une partie. Distance à une partie, diamètre d'une partie. Parties denses, points isolés, points d'accumulation. Produits finis d'espaces métriques. Suites, limites, valeurs d'adhérence, sous-suites, suites de Cauchy. Caractérisation de l'adhérence par les suites. Continuité d'une application en un point, caractérisation par les suites. Continuité sur l'espace entier, **caractérisation par les images réciproques des ouverts et fermés**. Homéomorphismes. Applications uniformément continues. Algèbre des fonctions numériques continues.

1.2. **Exercices.**

$\boxed{1}$ Montrer que, dans un espace métrique, tout ensemble fermé est égal à l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts.

$\boxed{2}$ Montrer que dans un espace métrique l'adhérence d'une boule ouverte n'est pas toujours égale à la boule fermée correspondante [on pourra utiliser la distance discrète définie par $d(x,y) = 0$ si $x = y$ et 1 si $x \neq y$.]

$\boxed{3}$ Soit (E,d) un espace métrique. On rappelle que pour toute partie non vide A de E et pour tout $x \in E$, la distance de x à A, notée $d(x,A)$ est définie par $d(x,A) := \inf\{d(x,y) \,:\, y \in A\}$. On note d_A l'application de E dans $\mathbb{R}^+$ définie par $d_A(x) = d(x,A)$.

A

(1) Montrer que d_A est continue (on montrera qu'elle est de Lipschitz). Que dire de $d_A^{-1}(\{0\})$?
(2) Montrer que $d_A = d_B$ si et seulement si $\overline{A} = \overline{B}$.
(3) On suppose que A et B sont deux fermés disjoints de E. Montrer qu'il existe une une fonction continue f sur E telle que $f \equiv 0$ sur A et $f \equiv 1$ sur B. [On cherchera une fonction construite à l'aide de d_A et d_B.]

Date: Juin 2005.

(4) En déduire que dans un espace métrique, deux ensembles fermés disjoints admettent toujours des voisinages disjoints. (On rappelle que, par définition, un voisinage d'une partie X, est un ensemble contenant un *ouvert* contenant X.)

B

On se propose maintenant de démontrer le théorème de prolongement suivant, qui est une version simple d'un théorème de Tiezte-Urysohn.

Théorème. *Soient* (E,d) *un espace métrique,* F *un sous-ensemble fermé quelconque de* E *et* f *un fonction continue sur* F *à valeurs dans* $[a,b] \subset \mathbb{R}$*. Il existe une fonction* g *continue sur* E*, à valeurs dans* $[a,b]$*, telle que* $g \equiv f$ *sur* F*.*

(1) Vérifier le théorème dans le cas où $(E,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $F = [0,1]$. Dans tout ce qui suit, on s'intéresse au cas général.

(2) Montrer que l'on peut supposer, sans perte de généralité, que $[a,b] = [1,2]$.

(3) On va montrer que la fonction g définie par l'expression ci-dessous convient,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in F \\ \frac{1}{d_F(x)} \inf\{f(y)d(x,y) \ : \ y \in F\} & \text{si} \quad x \notin F \end{cases}$$

(a) Montrer que g prend ses valeurs dans $[1,2]$.

(b) Montrer que g est continue sur $E \setminus F$. (On pourra montrer que la fonction qui à $x \in E$ fait correspondre $\inf\{f(y)d(x,y) \ : \ y \in F\}$ est de Lipschitz.)

(c) Montrer que pour tout $x \notin F$, on a

$$g(x) = \frac{1}{d_F(x)} \inf\{f(y)d(x,y) \ : \ y \in F \text{ et } d(x,y) \leq 2d_F(x)\}.$$

(d) Montrer que g est continue en tout point de F.

---

2. ESPACES VECTORIELS NORMÉS SUR $\mathbb{R}$ OU $\mathbb{C}$

2.1. **Cours.** Normes. Distance associée à une norme. Normes équivalentes. Continuité des opérations. **Applications linéaires continues, normes de ces applications**.

2.2. **Exercices.**

$\boxed{4}$ Soit k une fonction continue sur $S := [a,b] \times [c,d]$ et à valeurs complexes. Pour $f \in \mathsf{C}([a,b])$ on définit $K(f)$ par

$$K(f)(t) = \int_a^b f(x) \cdot k(x,t)dx.$$

Montrer que K est une application linéaire continue de $\mathsf{C}([a,b])$ dans $\mathsf{C}([c,d])$ (les deux espaces étant munis de la norme uniforme) et que $|||K||| \leq \|k\|_S$.

$\boxed{5}$ Soit $A = \{a_0,a_1,\dots,a_d\}$ un ensemble de $d+1$ points deux à deux distincts dans l'intervalle $[a,b]$. On note $\mathbf{L}_A$ l'application qui à toute fonction continue f sur $[a,b]$ fait correspondre $\mathbf{L}_A(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f par rapport aux points de A. On rappelle que

$$\mathbf{L}_A(f)(x) = \sum_{i=0}^{d} f(a_i) \prod_{j=0, j\neq i}^{d} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

(1) Montrer que $\mathbf{L}_A$ est un application linéaire continue de l'espace des fonctions continues $\mathsf{C}([a,b])$ (muni de la norme uniforme) dans lui-même et déterminer sa norme. Cette norme est notée $\Delta(A,[a,b])$.
(2) Soit h une bijection affine de $\mathbb{R}$. Quelle relation existe-t-il entre $\Delta(A,[a,b])$ et $\Delta(h(A),h([a,b]))$?
(3) Montrer *l'inégalité de Lebesgue*: pour tout $f \in \mathsf{C}([a,b])$ on a

$$\|f - \mathbf{L}_A(f)\| \leq (1 + \Delta(A,[a,b]))\, \mathrm{dist}(f,\mathcal{P}_d)$$

où $\mathcal{P}_d$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d et $\mathrm{dist}(f,\mathcal{P}_d)$ est la distance uniforme entre f et $\mathcal{P}_d$.

---

3. Espaces métriques compacts

3.1. **Cours.** Définition séquentielle. Parties compactes d'un compact. Parties compactes de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Produit d'un nombre fini d'espaces métriques compacts. Parties compactes de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$. Image continue d'un compact. **Théorème de Heine de continuité uniforme des applications continues.**

3.2. **Exercices.**

$\boxed{6}$ Soit (E,d) un espace métrique, K un sous-ensemble compact de E et Ω un ouvert de E contenant K et dont le complémentaire est non vide. Montrer que $d(K\,, E \setminus \Omega) > 0$ où $d(K\,, E \setminus \Omega) := \inf\{d(x,y) \,:\, x \in K, y \notin \Omega\}$.

$\boxed{7}$ Soit (E,d) un espace métrique.

(1) (x_n) une suite convergente de E. La limite de cette suite est notée l. On pose $K := \{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$. Montrer que K est un compact de E.
(2) Soit f une fonction définie sur E à valeurs dans un autre espace métrique G. Montrer que si, quel que soit K compact de E, $f_{|K}$, la restriction de f à K, est une fonction continue alors f est continue sur E.

---

4. Espaces métriques connexes

4.1. **Cours.** Définitions. Parties connexes. Union de parties connexes d'intersection non vide. Parties connexes de $\mathbb{R}$. Image continue d'un connexe. Théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs : elle implique la connexité et lui équivaut sur un ouvert d'un espace vectoriel normé.

---

5. Espaces vectoriels normés de dimension finie

5.1. **Cours. Théorème d'équivalence des normes**. Les parties compactes sont les fermés bornés. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires en dimension finie. Exponentielle d'un endomorphisme.

5.2. **Exercices.**

$\boxed{8}$ Soit $p \in [1, +\infty]$. On se propose de démontrer que l'application N_p définie sur $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) par

$$N_p(x) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}, \quad x = (x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

est une norme. (Dans le cas $p = \infty$, on convient que $N_p(x) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.) La seule difficulté réside dans l'établissement de l'inégalité triangulaire, qui porte le nom, dans ce cas, d'*inégalité de Minkowski* (1896).

(1) Montrer que l'inégalité de Minkowski se déduit de *l'inégalité de Hölder* (1889) :
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q},$$
où q est l'exposant conjugué de p c'est-à-dire vérifie $1/p + 1/q = 1$. (On pourra utiliser que $(a+b)^p = a(a+b)^{p-1} + b(a+b)^{p-1}$.)

(2) Montrer en utilisant la convexité de l'application exponentielle que pour a et b positifs on a $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$. En déduire l'inégalité de Hölder.

$\boxed{9}$ On munit successivement $\mathbb{C}^m$ des trois normes N_1, N_2 et N_∞. On note avec le même indice mais entre trois traits les normes d'application linéaire (de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}^m$) correspondantes. Montrer que

$$|||u|||_1 = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{m} |u_{ij}|, \quad |||u|||_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{m} |u_{ij}| \quad \text{et} \quad |||u|||_2 = \sqrt{\rho(u^\star u)}$$

où les u_{ij} sont les coefficients de la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{C}^m$ et $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de A, c'est-à-dire le maximum des modules des valeurs propres de A. Pour la norme $|||\cdot|||_2$, on pourra utiliser le fait que tout endomorphisme hermitien v ($v = v^\star$) est diagonalisable avec des valeurs propres réelles dans une base orthonormales de $\mathbb{C}^m$ pour le produit hermitien canonique.

---

6. ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS

6.1. **Cours.** Définition. Parties complètes d'un espace complet. Exemples de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet. **Théorème du point fixe pour les contractions d'un espace complet dans lui même.** Application aux approximations successives. Critère de Cauchy pour l'existence de la limite d'une application en un point.

6.2. **Exercices.**

$\boxed{10}$ Soit (E,d) un espace métrique quelconque et (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de E.

(1) Montrer que (x_n) est bornée.
(2) Montrer que si (x_n) admet une sous-suite convergente alors elle converge.
(3) En déduire que tout espace métrique compact, plus généralement tout espace métrique dont les boules fermées sont compactes, est complet.

$\boxed{11}$ On se propose de démontrer le théorème de prolongement suivant.

Théorème. *Soient (E,d_1) et (F,d_2) deux espaces métriques, A un sous-ensemble dense de E et f une fonction* uniformément *continue de A dans F. Si F est complet* *alors il existe une unique application continue f^{pr} de E dans F qui prolonge f, c'est-à-dire telle que ${f^{pr}}_{|A} = f$.*

(1) Montrer que si f^{pr} existe alors elle est unique.
(2) Soit $x \in E \setminus A$. On construit $f^{\text{pr}}(a)$ comme suit. On prend une suite (a_n) d'élément de A qui converge vers x (ce qui est possible d'après la densité de A dans E) et pose $f^{\text{pr}}(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

    (a) Montrer que $f^{\text{pr}}(a)$ est bien définie c'est-à-dire que la limite ci-dessus existe et que sa valeur ne dépend pas du choix de la suite (a_n) convergeant vers x.
    (b) Montrer que la suite définie comme ci-dessus sur $E \setminus A$ et par $f^{\text{pr}} = f$ sur A est continue sur E et même uniformément continue sur E.

$\boxed{12}$ Soit (E,d) un espace métrique complet et f une fonction de E dans E. On note $f^{(p)}$ la p-ième itérée de f c'est-à-dire

$$f^{(p)} := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

Montrer que *si $f^{(p)}$ est contractante alors f admet une unique point fixe dans E et que ce point fixe est la limite de la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ quelconque dans E et $x_{n+1} = f(x_n)$.*

On rappelle que dire que f est contractante signifie qu'elle vérifie une inégalité de Lipschitz avec une constante k strictement plus petite que 1. Lorsque $p = 1$, l'énoncé à démontrer n'est autre que le théorème du point fixe classique. Dans le cas $p > 1$, on étudiera les sous-suites suivantes de (x_n) : (x_{np}), (x_{np+1}), ..., $(x_{np+(p-1)})$.

---

7. ESPACES DE BANACH

7.1. **Cours.** Définition. Critère de Cauchy pour les séries. L'absolue convergence d'une série implique la convergence. Sous-espaces de Banach. Espaces de Banach usuels de suites et de fonctions. Espace de Banach des applications linéaires continues d'un espace de Banach vers un autre. Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergences simple, uniforme, uniforme sur tout compact. **Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues.** Critère de Cauchy uniforme. Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe C^1 simplement convergente et dont la suite des dérivées converge uniformément. Séries d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergence simple et uniforme. Convergence normale. Critère de Cauchy uniforme. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel.

7.2. **Exercices.**

$\boxed{13}$ On note C_0 l'espace vectoriel des fonctions de limite nulle à l'infini, autrement dit $f \in \mathsf{C}_0$ si $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. C'est espace est muni de la norme sup sur $\mathbb{R}$, $\|f\| := \sup\{f(x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$.

(1) Montrer que $(\mathsf{C}_0\,, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.
(2) Montrer que l'espace C_c des fonctions continues à support compact est un sous-espace dense de C_0. On rappelle que dire que f est à support compact, c'est-dire qu'il existe un intervalle $I = [a_f,b_f]$, dépendant de f, tel que f soit nulle en dehors de I.

$\boxed{14}$ Montrer que l'espace $\mathsf{C}^1([a,b])$ des fonctions (réelles) continûment dérivables est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme $N(f) := \max\{\|f\|_{[a,b]}, \|f'\|_{[a,b]}\}$ où $\|\cdot\|_{[a,b]}$ désigne la norme sup habituelle sur $[a,b]$. Montrer N est équivalente à la norme $\tilde{N}$ définie par $\tilde{N}(f) = \max\{|f(a)|, \|f'\|_{[a,b]}\}$.

$\boxed{15}$ Pour $p \in [1,\infty[$, on note par ℓ^p l'ensemble des suites complexes (x_n) telle que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.

(1) Montrer que (ℓ^p, n_p) est un espace de Banach où n_p est l'application définie sur ℓ^p par

$$n_p((x_n)) := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

(2) Pour p fixé dans $]1,\infty[$, on note q l'exposant conjugué $(1/p+1/q = 1)$. Pour $y = (y_n) \in \ell^q$ on définit ϕ_y sur ℓ^p à valeur dans $\mathbb{C}$ par

$$\phi_y((x_n)) := \sum_{n=0}^{\infty} y_n x_n.$$

Montrer que ϕ_y est une forme linéaire continue sur ℓ^p.

$\boxed{16}$ On se propose d'étudier et d'appliquer le théorème suivant :

Théorème. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et u une application linéaire continue sur E. Si $|||u||| < 1$ alors $I - u$ est inversible.*

Ici $|||\cdot|||$ désigne la norme d'application linéaire induite par la norme $\|\cdot\|$ et I est l'application linéaire identité.

A

(1) Démontrer le théorème en vérifiant que la série de terme général u^n est convergente et que sa somme est bien l'inverse de $I - u$ (penser à l'inverse de $(1 - x)$ donné par $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$).
(2) Donner une démonstration qui utilise le théorème du point fixe. (On pourra considérer l'application $f : \mathbf{L}(E) \to \mathbf{L}(E)$ définie par $f(v) = u \circ v$ où $\mathbf{L}(E)$ est l'espace de Banach des applications linéaires continues de E dans E).
(3) On note $\mathbf{GL}(E)$ l'ensemble des applications linéaires inversibles de $\mathbf{L}(E)$. Déduire du théorème que $\mathbf{GL}(E)$ est un *ouvert* de $\mathbf{L}(E)$.

B

Etant donné $u \in \mathbf{L}(E)$, on appelle *spectre* de u – et on note $\sigma(u)$ – l'ensemble des scalaires λ tels que $\lambda I - u$ soit non inversible. On rappelle que λ est valeur propre de u s'il existe $x \in E$, $x \neq 0$, tel que $u(x) = \lambda x$.

(1) Montrer que si λ est valeur propre de u alors $\lambda \in \sigma(u)$.
(2) Montrer que la réciproque est fausse en général (en dimension infinie). On pourra considérer le cas $E = \mathsf{C}([a,b])$ et $u : E \to E$ définie par $u(f)(x) = x^2 f(x)$ pour lequel on cherchera l'ensemble des valeurs propres et le spectre.
(3) Montrer que $\sigma(u)$ est un ensemble compact du corps des scalaires. On montrera que c'est un ensemble borné et fermé. (On pourra considérer l'application qui à λ scalaire fait correspondre $\lambda I - u$).

8. Espaces préhilbertiens

8.1. **Cours.** Produit scalaire. Inégalités de Cauchy- Schwarz. Norme associée. Théorème de Pythagore. Familles orthonormales. Procédé de Schmidt. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie; distance à un tel sous-espace . Exemples de produits scalaires; exemples de suites de polynômes orthogonaux.