

## LE TEST CONSTANS

JEAN-PAUL CALVI

### 1. PRÉSENTATION DU TEST

Le test se compose de 40 questions, 20 d'algèbre et 20 d'analyse, auxquelles il faut répondre « vrai » ou « faux » en produisant sur son brouillon un argument justifiant sa réponse (une démonstration, la référence à un théorème, un exemple ou un contreexemple). La plupart des questions ont été posées par **Guillaume Constans** aux agrégatifs des années 2000 et suivantes.

Pour débiter le test, il faut cliquer sur le bouton « début ». Le résultat du test est obtenu en cliquant sur le bouton « fin ». La réponse à chaque question s'enregistre en cliquant sur la case choisie. Le bouton « montrer les réponses » permet de visualiser les réponses correctes.

On peut considérer qu'un agrégatif qui répond correctement à au moins 35 de ces questions est en bonne position pour débiter une préparation à l'agrégation efficace. D'un autre côté, les candidats qui ne comprendraient pas dix ou plus de ces énoncés devraient entamer avant septembre une révision intensive en étudiant par exemple un traité de mathématiques spéciales. Il existe un grand choix de textes. Les enseignants de la préparation pourront suggérer des titres.

**Durée maximale conseillée : 45 minutes.**

Cette durée inclut le temps nécessaire pour écrire une courte synthèse de la justification des réponses.

### 2. ALGÈBRE

1. L'ensemble des suites réelles divergentes complété avec la suite nulle est un espace vectoriel.

vrai

faux

---

*Date:* Juin 2011.

Préparation à l'agrégation interne de mathématiques, année 2011-2012.

2. L'ensemble des suites réelles dont chaque terme est supérieur ou égal à 1 est un espace vectoriel.

vrai faux

\_\_\_\_\_

3. L'intersection de 2 sous-espaces vectoriels peut être vide.

vrai faux

\_\_\_\_\_

4. Les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}$  sont  $\{0\}$  et  $\mathbb{R}$ .

vrai faux

\_\_\_\_\_

5. Si  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\deg(P) = n$ , alors  $P, P', \dots, P^{(n)}$  sont des vecteurs indépendants de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

vrai faux

\_\_\_\_\_

6. Si  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par 3 vecteurs de  $E$ , alors  $\dim(H) = 3$ .

vrai faux

\_\_\_\_\_

7. Soient  $A$  et  $B$  dans  $M_2(\mathbb{R})$ , alors  $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ .

vrai faux

\_\_\_\_\_

8. La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est une matrice de rotation.

vrai faux

\_\_\_\_\_

9. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Si  $(\forall X \in \mathbb{R}^n, AX = 0)$  alors  $A = 0$ .

vrai faux

\_\_\_\_\_

10. Soient  $A$  et  $B$  dans  $M_n(\mathbb{R})$ . Si  $B$  est diagonale, alors  $AB = BA$ .

vrai faux

\_\_\_\_\_

11. Soient  $A$  et  $B$  dans  $M_n(\mathbb{R})$ . Si  $AB = I_n$ , alors  $AB = BA$ .

vrai faux

\_\_\_\_\_

12. Toute matrice carrée réelle admet au moins une valeur propre réelle.

vrai faux

\_\_\_\_\_

13. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , alors  $\lambda^2$  est valeur propre de  $A^2$ .

vrai faux

\_\_\_\_\_

14. Soient  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $X \in \mathbb{R}^n$  tels que  $AX = \lambda X$ , alors  $X$  est vecteur propre de  $A$ .

vrai faux

\_\_\_\_\_

15. Le polynôme  $P(X) = X^5 - 12X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 3X - 1$  n'admet aucune racine réelle.

vrai faux

\_\_\_\_\_

16. Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis. Toute injection de  $E$  dans  $F$  est une bijection.

vrai faux

\_\_\_\_\_

17. Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur un ensemble  $E$  forment une partition de  $E$ .

vrai faux

\_\_\_\_\_

18. Si  $f$  est une application linéaire surjective de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  alors  $n \leq m$ .

vrai faux

\_\_\_\_\_

19. La conjugaison est un automorphisme du corps des nombres complexes.

vrai faux

\_\_\_\_\_

20.  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un anneau commutatif unitaire si et seulement si  $p$  est un nombre premier.

vrai

faux

### 3. ANALYSE

1. Toute suite de réels  $(x_n)$  telle que  $\forall n \quad |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}$  est convergente.

vrai

faux

2. Si  $x_n \rightarrow \alpha$ , alors :  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n \rightarrow \alpha$ .

vrai

faux

3. Soit  $(x_n)$  une suite de réels telle que  $|x_n| \rightarrow |\alpha|$ , alors  $x_n \rightarrow \alpha$ .

vrai

faux

4. Soit  $\sum x_n$  une série à termes réels, alors cette série est absolument convergente si et seulement si les séries  $\sum x_n^+$  et  $\sum x_n^-$  sont convergentes. On note  $a^+ = \max(a, 0)$ ,  $a^- = \min(a, 0)$ .

vrai

faux

5. Soit  $f : ]-a, +a[ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b (\in \mathbb{R})$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = b$ .

vrai

faux

6. Soient  $f$  et  $g$  continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $f(x) = g(x)$  pour tout rationnel  $x$  de  $[a, b]$ , alors :  $f = g$ .

vrai

faux

7. Soit  $f$  continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\{-1, +1\}$ , alors  $f = 1$  ou  $f = -1$ .

vrai

faux

8. De toute suite de Cauchy, on peut extraire une sous-suite convergente.

vrai

faux

---

9. Soit  $f$  continue et intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  ayant une limite  $\alpha \in \mathbb{R}$  quand  $x \rightarrow \infty$  alors  $\alpha = 0$ .

vrai faux

---

10. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$  telle que :  $\forall A > 0$ ,  $(f_n)$  est uniformément convergente sur  $[A, +\infty[$ , alors  $(f_n)$  est uniformément convergente sur  $\mathbb{R}^+$ .

vrai faux

---

11. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable, alors  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.

vrai faux

---

12. Il existe des séries entières dont le rayon de convergence vaut  $+\infty$ .

vrai faux

---

13. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(a, \cdot)$  est continue en  $b$  et  $f(\cdot, b)$  est continue en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $(a, b)$ .

vrai faux

---

14. Dans  $\mathbb{R}$  les seuls sous-ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés sont  $\mathbb{R}$  et  $\emptyset$ .

vrai faux

---

15. La suite  $i^n$  admet quatre valeurs d'adhérence. ( $i$  est le nombre complexe usuel).

vrai faux

---

16. Si  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  strictement croissante dérivable alors  $f' > 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

vrai faux

---

**17.** Il existe une et une seule fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  satisfaisant  $f(x + y) = f(x)f(y)$ , pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ .

vrai

faux

\_\_\_\_\_

**18.** L'intégrale  $\int_1^\infty 1/x^\alpha dx$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

vrai

faux

\_\_\_\_\_

**19.** Soit une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Si  $f$  s'annule en  $d$  points alors  $f'$  s'annule en au moins  $d - 1$  points.

vrai

faux

\_\_\_\_\_

**20.** Une application linéaire continue non nulle n'est jamais bornée.

vrai

faux